Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

MEGOLDÁSOK 12

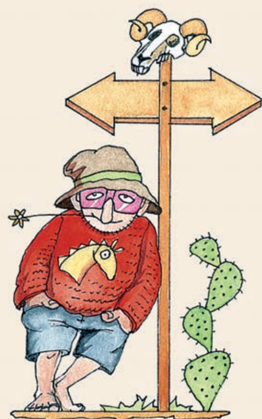
A 2024-es érettségi követelmények szerinti kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2024



TARTALOMJEGYZÉK

Megoldások – 12. évfolyam



12.1. *Logika, bizonyítási módszerek* (4001–4067)

12.2. *Számsorozatok* (4068–4165)



12.3. *Térgeometria* (4166–4511)



12.4. *Valószínűség-számítás, statisztika* (4512–4578)





Készüljünk az érettségire!

12.5. *Rendszerező összefoglalás* (5001–5617)

Gondolkodási módszerek (5001–5139)

Algebra és számelmélet (5140–5303)



Függvények (5304–5404)

Geometria (5405–5617)



12.6. *Érettségi gyakorló feladatsorok*



12.1. LOGIKA, BIZONYÍTÁSI MÓDSZEREK

Logikai feladatok, kijelentések – megoldások

4001 *a)* Nem. *b)* Igen. *c)* Nem. *d)* Igen. *e)* Nem. *f)* Igen.

4002 *a)* Nem. *b)* Igen, igaz. *c)* Igen, hamis.
d) Nem. *e)* Igen, értéke függ a helyzettől. *f)* Igen, hamis.

4003 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Igaz. *d)* Igaz. *e)* Hamis.

4004 A helyes tippek: 1, 1, 2, X, 1, X.

4005 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Igaz.

4006 Nem, ugyanis
a) nem kijelentés (paradoxon);
b) kijelentés, amelynek logikai értéke a következő mondattól függ.

4007 *a)* Hétfőn, kedden, szerdán, pénteken, szombaton.
b) Csütörtökön, vasárnap.

4008 *a)* Minden nap. *b)* Soha.

4009 Beteg nem lehet, mert akkor nem mondhatna igazat. Egészséges orvos sem lehet, hiszen ők igazat mondanak. A megoldás *b)*, vagyis egészséges ápolt.

4010 Nándi és Oszi kijelentései ellentmondanak egymásnak. Ha mindkettőt igaznak fogadnánk el, akkor paradoxonhoz jutnánk, tehát valamelyiknek hamisnak kell lennie. Viszont így Laci és Marci igazat szólnak, azaz Nándi volt a tettes (és közben kiderült az is, hogy Nándi az, aki hazudik).

4011 Tudjuk, hogy kettejük közül az egyik igazat mond, a másik hazudik. Mivel a jelenlegi állapotukról egyelőre nincs információnk, ezért olyan kérdést kell egyiküknek szegezni, amellyel a jól ismert múltbeli helyzet után érdeklődünk. Például:

„Te vagy a királylány?” vagy *„Régen a házastársad mindig igazat mondott?”*

Ha a királylány válasza *„igen”,* akkor igazat mond (tehát a juhász éppen hazudik). Ha a válasza *„nem”,* akkor hazudós napja van (tehát a juhász igazat mond).

Ha a juhász válasza *„nem”,* akkor igazat mond (tehát a királylány éppen hazudik). Ha a válasza *„igen”,* akkor hazudós napja van (tehát a királylány igazat mond).

4012 Az első megjegyzés miatt Tivadar csak Kis, Fekete vagy Fehér lehet. Mivel Feketével és Fehérrel más iskolába járt, Tivadar vezetékneve Kis. Az első megjegyzés miatt Kisnek hívhatták volna még Konrádot (~~Kis~~, Nagy, Fehér) vagy Csillát (~~Kis~~, Nagy, Fekete). Konrád és Emma vezetéknevei ellentétek, így csak színek lehetnek: Fehér Konrád, Fekete Emma és Nagy Csilla.

4013 A legkisebb összeget akkor kapjuk, ha a lehető legalacsonyabb helyezésekkel rendelkezők mondanak igazat (azaz az első 10), mindenki más pedig azt mondja, hogy első lett. Ekkor az összeg $55 + 40 = 95$.

A legnagyobb összeget úgy halljuk, ha az utolsó 10 mond igazat, és minden előttük érkező utolsónak vallja magát. Ekkor az összeg 2455.



4014 Tekintsük végig a lehetőségeket Józsi szemszögéből.

Először tegyük fel, hogy Józsi beteg (azaz pont fordítva látja a valóságot, mint kellene). Ekkor Jani nem beteg, tehát egészséges (amit hisz, az úgy is van). Ekkor viszont Józsi orvos. Ajjaj, Józsi beteg orvos! (Janiról azonkívül, hogy egészséges, nem tudunk semmit.)

Másodszor tegyük fel, hogy Józsi egészséges. Ezek szerint Jani beteg, tehát Józsi nem orvos, hanem ápolt. Ajjaj, ekkor Józsi egészséges ápolt! (Janiról azonkívül, hogy beteg, nem tudunk többet.)

Bárhogy is nézzük, Józsi vagy beteg orvos, vagy egészséges ápolt. Bármelyik is, nem kellene az intézetben tartózkodnia. Janiról a feltételek alapján nem tudunk nyilatkozni.

4015 *a)* Ha az első mondat igaz, akkor saját igazságát állítja. Így a második mondatnak hamisnak kell lennie. Ha az első mondat hamis, akkor a második igaz.

Tehát a két mondat közül pontosan az egyik igaz.

b) Ha az első mondat igaz, akkor a második mondat hamis. Ha az első mondat hamis, akkor a második mondat igaz.

A két mondat közül pontosan az egyik igaz.

c) Ha az első mondat igaz, akkor a második mondat is igaz. Azonban akkor az első mondat hamis. Így ellentmondásra jutunk. Ha az első mondat hamis, akkor a második mondat is hamis. Ami azt jelenti, hogy az első mondat igaz. Így is ellentmondásra jutunk.

Ez a mondatpár paradoxon. A két mondatnak nem tudunk úgy logikai értéket tulajdonítani, hogy teljesüljön. A mondatpár tagjait nem tekinthetjük kijelentéseknek.

d) Ha az első mondat igaz, akkor a második mondat hamis. Ha az első mondat hamis, akkor a második mondat igaz.

Ismét arra jutunk, hogy a két mondat közül pontosan egy igaz, és egy hamis.

4016 Induljunk ki valamelyik állításból, és próbáljunk meg következtetéseket levonni. Kezdjük a legegyértelműbbel. (Zárójelben az állítások sorszáma, melyekből adódik.)

Aki ropit eszik, középen ül. (2)

Mivel sem Károly, sem Zsolt nem iszik kólát, azt csak Pista ihat. (1, 3)

Mivel Zsolt jobbján iszik Pista kólát és a sor szélén ül, így csak a jobb szélen ülhet. Ugyanebből adódik, hogy középen ül Zsolt és a bal oldalon Károly. (3, 5)

A pattogatott kukoricát balra kellett adni, tehát Pista pattogatott kukoricát és Károly sós mogyorót eszik. (4)

Károly szomszédja Zsolt, így ő iszik gyömbért, Károly pedig jeges teát. (6)

A fiúk így ülnek a moziban:

Mozivászon			
	jeges tea	gyömbér	kóla
…	sós mogyoró	ropi	pattogatott kukorica
	Károly	Zsolt	Pista

4017 Ismét kezdjük egy teljesen egyértelmű kijelentéssel. (Zárójelben az állítások sorszáma, melyekből adódik.)

A fiúk nem egymás mellett ülnek. (1)

Mivel Feri nem szereti a gyümölcsleveket és az egyik fiú gyümölcslevet iszik, így Lóri narancslevet iszik. (2, 8)



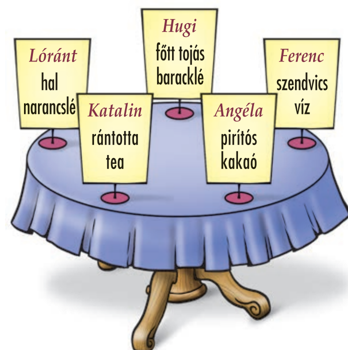
Mivel Angi kakaót, Kati teát iszik, Feri nem szereti a gyümölcslevet és Lóri narancslevet iszik, így Hugi baracklevet és Feri vizet iszik. (2, 3, 9)

Aki szendvicset eszik, vizet iszik hozzá, ezért Feri szendvicset eszik. (5)

Mivel rántottát és főtt tojást Lóri mellett esznek, pirítóst ehet Lóri vagy a Feri mellett (de nem a fiúk között egyedül) ülő lány. Lóriról azonban tudjuk, hogy narancslevet iszik: ekkor nem lényeges az az információ, hogy a pirítóst evő nem teát kér. Tehát pirítóst a Feri mellett ülő lány eszik. (7, előző)

Hugiról már tudjuk, hogy baracklevet iszik és Lóri mellett ül. Szabad még a tea és a kakaó helye: mivel a pirítóst evő nem kér teát, így ő csak kakaót ihat, tehát ő Angéla. (6, 10, 3)

Mivel ételnek már csak egy szabad hely maradt, így Lóri halat eszik. (előzőek)



Angi egyik szomszédja süti magának a reggelit – Feri nem, mert hideg szendvicset eszik. Ebből következik, hogy a Lóri és Angi között ülő rántottát eszik, a fiúk között ülő pedig főtt tojást. (3)

Mivel a rántottát reggeliző nem gyümölcslevet kért, így csak teát ihat: ő Kati. (4)

Következésképpen Hugi a két fiú között főtt tojást reggelizik baracklével. (előző)

A reggelizőkre és az általuk fogyasztott ételekre, italokra egy példa az ábrán látható.

Logikai műveletek – negáció, konjunkció, diszjunkció – megoldások

4018 *a)* $\neg A$; *b)* $A \wedge B$; *c)* $A \vee B$;
d) $(A \wedge B) \vee C$; *e)* $\neg(A \wedge B)$; *f)* $(A \wedge B) \wedge (\neg C) \wedge (\neg D)$;
g) $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$.

4019 *a)* Félek a dolgozattól.
b) Van olyan film, amit még nem láttam.
c) Van olyan szarka, amelyiknek a farka egyszínű.
d) Minden rövid nyakú zsiráf rosszul fésült.
e) Bármely geometriai rendszerben a háromszög belső szögeinek összege 180º.
f) Létezik olyan érettségi feladatsor, amelyben nincs ilyen feladat.
g) Minden holló fekete.
h) Létezik olyan héttel osztható szám, amely 5-tel is osztható.
i) Van két egyenes, melyek nem metszik egymást.

4020 *a)* Hideg van és fázom.
b) Jól felöltözöm vagy mozogni kell.
c) Mozogni kell és nem fázom.
d) Nem igaz, hogy fázom és mozogni kell, vagy jól felöltözöm.
e) Hideg van és fázom, vagy jól felöltözöm és nem kell mozogni.



4021 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Hamis. *e)* Igaz. *f)* Igaz.

4022 *b)*

4023 A és D, illetve B és C egymás tagadásai.

4024 *a)* Nem biliárdozok jól vagy nem golfozok jól.
b) Nem vagy Kata és nem is vagy Klára.
c) Nem igaz, hogy James vagy Bond vagyok.
d) Nem igaz, hogy a boltba megyek és felporszívózok.

4025 *a)* $\neg A$ = Van olyan trapéz, melynek nincsenek párhuzamos oldalai vagy vannak egyenlő szögei.
$\neg B$ = Bármely deltoidnak vannak egyenlő szögei.
$\neg C$ = Minden négyzetnek van olyan oldala, mely nem egységnyi és területe sem az.
b) A kitöltött táblázat:

	Állítás	Tagadás
A = Minden trapéznak van két párhuzamos oldala és minden szöge különböző.	hamis	igaz
B = Van olyan deltoid, melynek minden szöge különböző.	hamis	igaz
C = Létezik olyan négyzet, melynek minden oldala vagy területe egységnyi.	igaz	hamis

4026 *a)* Öt lehetőség van.
1. Az illető mindent megtanul.
2. Csak a verset tanulja meg.
3. A verset megtanulja, azonkívül csak matek házit ír.
4. A verset megtanulja, azonkívül csak fizika házit ír.
5. Csak a reál tárgyak háziját készíti el.

b) Három lehetőség van, de minden esetben meg kell nézni a filmet.
1. Elkészíti mindkét ételt.
2. Csak rántottát süt.
3. Csak bundás kenyeret süt.

4027 *a)* Minden nap minden órájának minden percében csak rád gondolok.
b) Bármely együttesnek van olyan száma, amelyben minden versszakot megértek.
c) Van olyan étel, amit akárhogyan is készítenek el, bármikor hajlandó vagyok megenni.

4028 *a)* Négy lehetőség van: Karcsi korán kelt vagy nem, illetve sokat dolgozott vagy nem. Ha tényleg korán kelt és sokat dolgozott (azaz mindkettő igaz), akkor annak a tagadása hamis. Minden más esetben valamelyik (vagy mindkettő) kijelentés hamis, így tényleg nem igaz, hogy egyszerre teljesülnek. Ekkor az állítás igaz.
b) Ha színvak vagyok, akkor az állítás igaz, bármilyen is a labda. Ha nem vagyok színvak és a labda valóban gömbölyű és piros, akkor is igaz. Ha viszont nem vagyok színvak és a labda valamelyik jellemzője (esetleg mind a kettő) hamis, akkor az összetett állítás hamis.
c) Ha elalszom, akkor az állítás hamis, függetlenül az előadástól. Ha nem alszom el és az előadás nem volt sem rövid, sem izgalmas, akkor is hamis. Ha viszont nem aludtam el és az előadás két jellemzője közül legalább az egyik teljesül, akkor igaz a kijelentés.



4029 *a)* Volt nehéz feladat, vagy olyan, amit nem oldottam meg.

b) Ebben a pizzériában van rossz ízű pizza, és minden pizzát megkóstoltunk.

c) Bármely háromszögnek van olyan szöge, ami nem derékszög.

d) Van olyan Rubik-kocka, amelynek bármely oldalán van olyan szín, ami nem kék.

4030 *a)* Elegendő, ha D hamis.

b) Szükséges, hogy mind a négy kijelentés hamis legyen.

c) Az első kettő vagy a második kettő kijelentésnek egyszerre kell hamisnak lennie.

d) Az első kettő kijelentésnek kell egyszerre igaznak lennie, vagy a második kettőnek egyszerre hamisnak.

4031 Mivel a formulák mindegyikében két kijelentés (változó) szerepel, így értékeik (igaz vagy hamis) összesen négy esetet adnak:

$$i–i,\quad i–h,\quad h–i,\quad h–h.$$

A legegyszerűbb, ha készítünk mindhárom formulához egy-egy *igazságtáblázatot.*

A piros oszlop mindegyik esetre érvényes, a végeredményt a zöld oszlop mutatja.

A	B
i	i
i	h
h	i
h	h

a)

A	∧	(¬B)
i	**h**	h
i	**i**	i
h	**h**	h
h	**h**	i

b)

(A	∧	B)	∨	(¬A)
i	i	i	**i**	h
i	h	h	**h**	h
h	h	i	**i**	i
h	h	h	**i**	i

c)

A	∧	(B	∨	¬A)
i	**i**	i	i	h
i	**h**	h	h	h
h	**h**	i	i	i
h	**h**	h	i	i

4032 A feladatban az első két formula három kijelentést tartalmaz, melyek mindegyike lehet igaz vagy hamis, ezért a lehetőségek száma:

$$2^3 = 8,$$

azaz ennyi sora van az igazságtáblázatnak.

A *c)* kérdésben négy formula szerepel, ott 16 soros a táblázat. A végeredményt most is a zöld oszlop jelöli.

A	B	C
i	i	i
i	i	h
i	h	i
i	h	h
h	i	i
h	i	h
h	h	i
h	h	h

a)

¬	(A	∧	B)	∨	C
h	i	i	i	**i**	i
h	i	i	i	**h**	h
i	i	h	h	**i**	i
i	i	h	h	**i**	h
i	h	h	i	**i**	i
i	h	h	i	**i**	h
i	h	h	h	**i**	i
i	h	h	h	**i**	h

b)

¬A	∧	(B	∨	C)
h	**h**	i	i	i
h	**h**	i	i	h
h	**h**	h	i	i
h	**h**	h	h	h
i	**i**	i	i	i
i	**i**	i	i	h
i	**i**	h	i	i
i	**h**	h	h	h



A	B	C	D
i	i	i	i
i	i	i	h
i	i	h	i
i	i	h	h
i	h	i	i
i	h	i	h
i	h	h	i
i	h	h	h
h	i	i	i
h	i	i	h
h	i	h	i
h	i	h	h
h	h	i	i
h	h	i	h
h	h	h	i
h	h	h	h

c)

¬	(A	∧	B)	∧	(C	∨	D)
h	i	i	i	**h**	i	i	i
h	i	i	i	**h**	i	i	h
h	i	i	i	**h**	h	i	i
h	i	i	i	**h**	h	h	h
i	i	h	h	**i**	i	i	i
i	i	h	h	**i**	i	i	h
i	i	h	h	**i**	h	i	i
i	i	h	h	**h**	h	h	h
i	h	h	i	**i**	i	i	i
i	h	h	i	**i**	i	i	h
i	h	h	i	**i**	h	i	i
i	h	h	i	**h**	h	h	h
i	h	h	h	**i**	i	i	i
i	h	h	h	**i**	i	i	h
i	h	h	h	**i**	h	i	i
i	h	h	h	**h**	h	h	h

Logikai műveletek – implikáció, ekvivalencia – megoldások

4033 *a)* $A \rightarrow B$; *b)* $(A \vee B) \rightarrow C$; *c)* $(A \wedge B) \rightarrow C$; *d)* $A \rightarrow (B \wedge \neg C)$;
e) $A \leftrightarrow (B \vee C)$; *f)* $((B \vee C) \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow (B \vee C))$; *g)* $A \leftrightarrow B$.

4034 *a)* Ha egy négyszög négyzet, akkor paralelogramma. Igaz.
b) Ha egy négyszög paralelogramma, akkor rombusz. Hamis.
c) Egy négyszög pontosan akkor paralelogramma, ha két-két szemközti oldala egyenlő. Igaz.
d) Ha a négyszög két-két szemközti és két-két szomszédos oldala egyenlő, akkor rombusz. Igaz.
e) Ha egy négyszög két-két szemközti és két-két szomszédos oldala egyenlő, továbbá szögei egyenlők, akkor négyzet. Igaz.
f) Ha egy négyszög két-két szemközti és két-két szomszédos oldala egyenlő, vagy szögei egyenlők, akkor rombusz. Hamis.
g) Egy négyszög pontosan akkor négyzet, ha rombusz és szögei egyenlők. Igaz.

4035 *a)* Thalész tétele.
b) B.



4036 *a)* A megfordítása: Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói felezik egymást.

B megfordítása: Ha egy háromszög belső szögeinek felezői egy pontban metszik egymást, akkor súlypontja a háromszögön kívülre esik.

C megfordítása: Ha egy függvény felülről korlátos, akkor van minimuma.

D megfordítása: Ha egy egész szám osztható 21-gyel, akkor osztható 7-tel.

b) A kitöltött táblázat:

	Állítás	Megfordítás
A = Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az paralelogramma.	igaz	igaz
B = Ha egy háromszög súlypontja a háromszögön kívülre esik, akkor belső szögeinek felezői egy pontban metszik egymást.	igaz	hamis
C = Ha egy függvénynek van minimuma, akkor felülről korlátos.	hamis	hamis
D = Ha egy egész szám osztható 7-tel, akkor osztható 21-gyel.	hamis	igaz

4037 *a)* A Pitagorasz-tétel megfogalmazható ekvivalenciaként.

b) Ez a kijelentés igaz, de megfordítása nem.

c) A Thalész-tétel is megfogalmazható ekvivalenciaként.

d) Megfordítása sem igaz.

4038 Figyeljük meg, hogy a feltétel mindig teljesül.

a) Így az implikáció akkor válik igazzá, ha a következtetés is igaz.

A befejezés bármilyen igaz kijelentés lehet, például: $2 + 2 = 4$.

b) Igaz feltétel mellett az implikáció akkor válik hamissá, ha a következtetés hamis.

A befejezés bármilyen hamis kijelentés lehet, például: $2 + 2 = 5$.

4039 Figyeljük meg, hogy a következmény hamis.

a) Az implikáció akkor válik igazzá, ha a feltétel hamis.

A kiegészítés bármilyen hamis kijelentés lehet.

b) Az implikáció akkor hamis, ha a feltétel igaz.

A kiegészítés bármilyen igaz kijelentés lehet.

4040 *a)* Mivel A feltétele hamis, így az implikáció következményétől függetlenül válik igazzá.

Az A mondat kipontozott részére bármit írva az implikáció igaz. (Hiszen $h \to i \equiv i$ és $h \to h \equiv i$.)

b) Mivel B következménye igaz, akármit is írunk feltételnek, az implikáció teljesül. (Hiszen $i \to i \equiv i$ és $h \to i \equiv i$.)

c) Az *a)* pontban ismertetett megfontolások miatt az implikáció nem lehet hamis.

d) A *b)* pontban látott megfontolások miatt az implikáció nem lehet hamis.

4041 *a)* A keresett formulák:

$(A \wedge B) \to C$ = Ha n 3-mal és 8-cal osztható, akkor 24-gyel is osztható.

$D \to \neg F$ = Ha n páros, akkor nem prím.

$E \leftrightarrow (A \vee B)$ = n pontosan akkor osztható 12-vel, ha 3-mal vagy 8-cal osztható.

$(F \wedge \neg A) \to D$ = Ha n prím és nem osztható 3-mal, akkor páros.

b) A logikai értékek: igaz, hamis, hamis, hamis.



4042 Figyeljük meg a következőket:

- A-ból következik D, tehát az A és D kijelentések ugyanarról a számról szólnak.
- B és C kizárják egymást, tehát egyik az egyik, másik a másik számra vonatkozik.
- Amire A és D vonatkozik, az nem lehet prím, azaz A és D kizárja E-t.

Ezek alapján két eset lehetséges.

I. eset: Az egyik számra A, D, B; a másikra E, C vonatkozik. Az egyetlen 5-tel osztható prím az 5. Az A, D, B követelményeknek végtelen sok szám megfelel, legkisebb közülük a 6.

II. eset: Az egyik számra A, D, C; a másikra E, B vonatkozik. Az egyetlen páros prím a 2. Az A, D, C követelményeknek végtelen sok szám megfelel, legkisebb közülük a 15.

4043 *a)* Az A kijelentés csak abban az egy esetben hamis, ha hideg van és nem fázom. Ekkor a B kijelentés is hamis, hiszen nem igaz, hogy nincs hideg és nem fázom. Minden más esetben A és B is igaz. A és B ekvivalens állítások.

b) Az A kijelentés csak akkor hamis, ha piszkálnak és mégsem leszek mérges. B hamis, ha egyrészt nem igaz, hogy nem piszkálnak, másrészt nem igaz, hogy mérges vagyok. Minden más esetben A és B is igaz. A és B ekvivalens állítások.

c) Az A kijelentés pontosan akkor lesz hamis, ha süt a nap és mégsem jó a kedvem. Ebben az esetben a B kijelentés feltétele (nem jó a kedvem) igaz, de a következmény (nem süt a nap) nem teljesül, azaz B is hamis. Amennyiben a kedvem jó, akkor B igaz. Utoljára azt gondoljuk meg, ha rossz a kedvem és a nap se süt: ekkor igaz B feltétele és következménye is, azaz maga B kijelentés. Kimondhatjuk, A és B ekvivalens állítások.

Megjegyzés: Jelölje C = süt a nap, D = jó a kedvem. Ekkor formulákkal leírva az állításokat: $A = C \to D$ és $B = (\neg D) \to (\neg C)$.

d) Írjuk fel formulákkal a kijelentéseket. Jelölje M = most igent mond, S = soha nem mond igent. Ekkor $A = (\neg M) \to S$. A B állítás felírásához azt gondoljuk meg, hogy az „egyszer igent mond” megegyezik a „nem igaz, hogy sohasem mond igent” kijelentéssel. Tehát $B = (\neg S) \to M$.

Vegyük észre, hogy ez a forma megegyezik a *c)* feladatban látottal, csak C helyére $(\neg M)$-t és D helyére S-t kell írnunk! Tehát itt is teljesül, hogy A és B állítások ekvivalensek.

4044 A keresett táblázatok:

A	B
i	i
i	h
h	i
h	h

a)

A	→	B	(¬A)	∨	B
i	**i**	i	h	**i**	i
i	**h**	h	h	**h**	h
h	**i**	i	i	**i**	i
h	**i**	h	i	**i**	h

b)

A	↔	B	(A	→	B)	∧	(B	→	A)
i	**i**	i	i	i	i	**i**	i	i	i
i	**h**	h	i	h	h	**h**	h	i	i
h	**h**	i	h	i	i	**h**	i	h	h
h	**i**	h	h	i	h	**i**	h	i	h

4045 *a)* Felhasználva a kettős tagadást, hogy a diszjunkció kommutatív és $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$:

$$A \to B \equiv (\neg A) \vee B \equiv B \vee (\neg A) \equiv \neg(\neg B) \vee (\neg A) \equiv (\neg B) \to (\neg A).$$

b) Az egyes lépéseket a számok magyarázzák:

$$(A \to B) \to C \equiv (1) \equiv [(\neg A) \vee B] \to C \equiv (2) \equiv \neg[(\neg A) \vee B] \vee C \equiv (3) \equiv [A \wedge (\neg B)] \vee C \equiv$$
$$\equiv (4) \equiv (A \vee C) \wedge [(\neg B) \vee C] \equiv (5) \equiv [\neg(\neg A) \vee C] \wedge [(\neg B) \vee C] \equiv (6) \equiv [(\neg A) \to C] \wedge [B \to C].$$

(1), (2) és (6): Az implikáció már megismert átírása diszjunkcióra, $A \to B \equiv (\neg A) \vee B$.

(3): De Morgan-azonosság diszjunkcióra, $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$.



(4): a diszjunkció disztributív a konjunkcióra, $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

(5): kettős tagadás, $A \equiv \neg(\neg A)$.

Megjegyzés: Az *a)* pontban látott azonosság alapján alkothatjuk meg a *kontrapozíciónak* nevezett bizonyítási eljárást. A *„ha …, akkor …”* állításban megfordítjuk és letagadjuk a feltételt és a következményt, majd ezt az állítást bizonyítjuk. Ilyet alkalmaztunk pl. ebben a kijelentésben:

Ha α, β, γ egy háromszög belső szögei, akkor legalább az egyik szög legalább 60º-os.

A kontrapozíciós állítás:

Ha nem igaz, hogy $\alpha \geq 60^\circ$ vagy $\beta \geq 60^\circ$ vagy $\gamma \geq 60^\circ$, akkor α, β, γ nem egy háromszög belső szögei.

A kontrapozíciós állítás bizonyítása:

A letagadott feltételt a De Morgan-azonosság alapján átírhatjuk $\alpha < 60^\circ$ és $\beta < 60^\circ$ és $\gamma < 60^\circ$ alakban. Így $\alpha + \beta + \gamma < 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$. Mivel bizonyítottuk, hogy minden háromszög belső szögeinek összege 180º, ezért α, β, γ nem lehetnek ugyanazon háromszög szögei. (Természetesen kijelentésünk csak az euklideszi geometriában érvényes.)

Teljes indukció (emelt szintű tananyag) – megoldások

4046 A sorok sorszáma szerinti teljes indukciót alkalmazunk. S_k jelöli a k-adik sorban levő számok összegét.

1. A 0-adik sorban levő 1-esre teljesül, hogy az összeg $S_0 = 1 = 2^0$.
2. Tegyük fel, hogy (t.f.h.) a k-adik sorban az összeg $S_k = 2^k$.
3. Kérdés, hogy $S_{k+1} = 2^{k+1}$ teljesül-e.

   Mivel minden sorban duplán számoljuk az előző sorban előforduló számokat (egyszer jobbra le, egyszer balra le, illetve az első és az utolsó 1-est odaírjuk), így az ott keletkező összeg is duplája lesz az előzőnek:

$$S_{k+1} = 2 \cdot S_k = (2) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

4047 Az n kitevő szerinti teljes indukciót alkalmazunk.

1. A legkisebb természetes számra, $n = 0$-ra teljesül az állítás: $3 \mid 2 \cdot 7^0 + 1 = 3$.
2. T.f.h. $n = k$-ra teljesül az állítás: $3 \mid 2 \cdot 7^k + 1$.
3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén $3 \mid 2 \cdot 7^{k+1} + 1$ teljesül-e.

   Alakítsuk át a kifejezést:

$$2 \cdot 7^{k+1} + 1 = 2 \cdot 7 \cdot 7^k + 1 = 7 \cdot (2 \cdot 7^k + 1) - 6.$$

   Az indukciós feltevés miatt a zárójeles kifejezés (és annak hétszerese) osztható 3-mal, az utolsó 6-os osztható 3-mal, így különbségük is.

4048 Minden esetben n szerinti indukciót alkalmazunk.

a) 1. $n = 0$-ra: $2 \mid 0^2 - 0 = 0$.

2. T.f.h. $n = k$-ra $2 \mid k^2 - k$.
3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén igaz-e, hogy $2 \mid (k + 1)^2 - (k + 1)$.

   Alakítsuk át:

$$(k + 1)^2 - (k + 1) = k^2 + 2k + 1 - k - 1 = k^2 + k = k^2 - k + 2k.$$

   Az első két tag különbsége az indukciós feltevés miatt osztható 2-vel, a $2k$ tag pedig páros. Tehát az állítás igaz.



b) 1. $n = 0$-ra: $27 \mid 10^0 + 18 \cdot 0 - 1 = 0$.
2. T.f.h. $n = k$-ra $27 \mid 10^k + 18k - 1$.
3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re $27 \mid 10^{k+1} + 18 \cdot (k+1) - 1$ teljesül-e.

Alakítsuk át:

$$10^{k+1} + 18 \cdot (k+1) - 1 = 10 \cdot 10^k + 18k + 17 = 10 \cdot (10^k + 18k - 1) - 162k + 27.$$

A zárójeles kifejezés osztható 27-tel (az indukciós feltevés miatt), mint ahogy 162 és 27 is. Így az egész kifejezés osztható 27-tel.

c) 1. $n = 0$-ra $6 \mid 0^3 + 11 \cdot 0 = 0$.
2. T.f.h. $n = k$ esetén $6 \mid k^3 + 11k$.
3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén $6 \mid (k+1)^3 + 11 \cdot (k+1)$ teljesül-e.

Alakítsuk át:

$$(k+1)^3 + 11 \cdot (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11 = k^3 + 11k + 3k \cdot (k+1) + 12.$$

Az első két tag összege az indukciós feltevés miatt osztható 6-tal. A szorzat osztható 3-mal, és mivel két egymást követő szám is szerepel benne, az egyik biztosan páros. Tehát $3k \cdot (k+1)$ is osztható 6-tal. Végül $6 \mid 12$, így 6 az egész kifejezésnek is osztója.

4049 Ismét n szerinti indukciót alkalmazunk.

1. $n = 0$-ra az állítás teljesül: $1 = (1+a)^0 \geq 1 + 0 \cdot a = 1$.
2. T.f.h. $n = k$-ra igaz, hogy $(1+a)^k \geq 1 + k \cdot a$.
3. Kérdés, hogy ekkor $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1) \cdot a$ teljesül-e.

Kezdjük átalakítani a bal oldalt:

$$(1+a)^{k+1} = (1+a) \cdot (1+a)^k \geq (1+a) \cdot (1 + k \cdot a) =$$
$$= 1 + a + k \cdot a + k \cdot a^2 \geq 1 + a + k \cdot a = 1 + (k+1) \cdot a.$$

Az első egyenlőtlenségnél kihasználtuk az indukciós feltevést, a másodiknál egész egyszerűen elhagytunk egy nemnegatív tagot (k természetes szám, $a^2 \geq 0$).

4050 1. $n = 1$-re $1^2 = \dfrac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1$.

2. T.f.h. $n = k$-ra $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6}$.
3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6}$ igaz-e.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$
$$= \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} + \frac{6 \cdot (k+1)^2}{6} = (k+1) \cdot \frac{k \cdot (2k+1) + 6 \cdot (k+1)}{6} =$$
$$= (k+1) \cdot \frac{2k^2 + 7k + 6}{6} = (k+1) \cdot \frac{(k+2) \cdot (2k+3)}{6}.$$

Pontosan ezt kerestük.

4051 n szerinti teljes indukciót alkalmazunk.

1. A kiinduló érték $n = 2$, erre az állítás teljesül: $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} > \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Átalakítva $6\sqrt{2} > 8$, négyzetre emelve mindkét oldalt: $72 > 64$.
2. T.f.h. $n = k$ esetén $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2k-1}{2k} > \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.



3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén teljesül-e: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2\cdot(k+1)-1}{2\cdot(k+1)} > \frac{1}{2\sqrt{(k+1)}}$.

Az indukciós feltevés szerint igaz, hiszen minden szorzótényező pozitív szám:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2\cdot(k+1)-1}{2\cdot(k+1)} > \frac{1}{2\sqrt{k}}\cdot\frac{2\cdot(k+1)-1}{2\cdot(k+1)} = \frac{2k+1}{4\sqrt{k}\cdot(k+1)}.$$

Kérdés, hogy ez a csökkentett érték vajon nagyobb-e még a kérdéses $\frac{1}{2\sqrt{(k+1)}}$-nél. Szorozzuk meg mindkét oldalt $4\sqrt{k}\cdot(k+1)$-gyel:

$$\frac{2k+1}{4\sqrt{k}\cdot(k+1)} > \frac{1}{2\sqrt{(k+1)}},$$

$$2k+1 > 2\sqrt{k\cdot(k+1)}.$$

Négyzetre emelve mindkét oldalt, kapjuk az igaz $4k^2 + 4k + 1 > 4k^2 + 4k$ egyenlőtlenséget.

4052 1. $n = 1$-re: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{12+8+6}{24}>1$.

2. T.f.h. $n = k$-ra az állítás teljesül: $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{3k+1}>1$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re teljesül-e: $\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\ldots+\frac{1}{3\cdot(k+1)+1}>1$.

$$\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\ldots+\frac{1}{3\cdot(k+1)+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{3k+1}+\ldots+\frac{1}{3k+4}=$$

$$=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{3k+1}+\ldots+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}>$$

$$>1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}.$$

Ha most az utolsó négy tag összege pozitív, akkor ez az összeg is nagyobb, mint 1.

Legyen $x = 3k + 3 > 0$, így $k+1=\frac{x}{3}>0$.

Ekkor:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}=$$

$$=\frac{x\cdot(x+1)+x\cdot(x-1)-2\cdot(x^2-1)}{x\cdot(x^2-1)}=\frac{2}{x\cdot(x^2-1)}>0.$$

4053 Vizsgáljuk meg az első néhány összeget:

$$1 = 1;\quad 1 + 3 = 4;\quad 1 + 3 + 5 = 9;\quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16;\quad \ldots$$

Egyrészt azt látjuk, hogy az összeg négyzetszám. Másrészt az utolsó, n-edik szám előáll $(2n - 1)$ alakban. Sejtésünk tehát így szól: az első n páratlan szám összege n^2.

Bizonyítsuk n szerinti teljes indukcióval.

1. $n = 1$-re az állítás teljesül.

2. T.f.h. $n = k$ esetén az állítás teljesül: $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re $1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ teljesül-e.

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$



4054 1. $n = 1$-re $3 = \frac{10^{1+1} - 9 \cdot 1 - 10}{27} = \frac{81}{27} = 3.$

2. T.f.h. $n = k$ esetén $3 + 33 + 333 + \ldots + 33\ldots3 = \frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27}.$

3. Kérdés, hogy $3 + 33 + 333 + \ldots + 33\ldots3 + 33\ldots33 = \frac{10^{k+2} - 9 \cdot (k+1) - 10}{27}$ teljesül-e.

(Az utolsó $33\ldots33$ szám $(k + 1)$ darab 3-as számjegyet tartalmaz.)

Használjuk fel az indukciós feltevést, majd vizsgáljuk meg, egyenlő-e a két oldal:

$$\frac{10^{k+1} - 9k - 10}{27} + 33\ldots33 = \frac{10^{k+2} - 9 \cdot (k+1) - 10}{27}, \qquad / \cdot 27$$

$$10 \cdot 10^k - 9k - 10 + 27 \cdot 33\ldots33 = 100 \cdot 10^k - 9k - 19, \qquad / + 9k,\ +10,\ -10 \cdot 10^k$$

$$81 \cdot 11\ldots11 = 90 \cdot 10^k - 9, \qquad / : 9$$

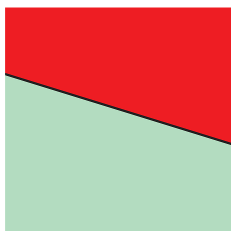
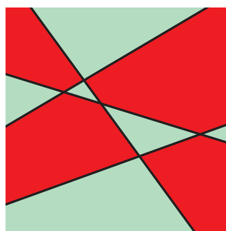
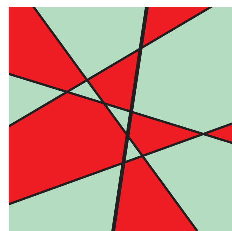
$$9 \cdot 11\ldots11 = 10^{k+1} - 1,$$

$$99\ldots99 = 10^{k+1} - 1,$$

ez pedig igaz, mert a bal oldalon $(k + 1)$ darab 9-es számjegyet találunk.

4055 Az egyenesek száma szerinti teljes indukciót alkalmazunk.

1. Egy egyenes $(n = 1)$ a síkot két részre osztja: az egyiket pirosra, a másikat zöldre színezzük.
2. T.f.h. $n = k$ egyenes esetén kiszíneztük a feltételeknek megfelelően a „térképet”.
3. Meg tudjuk-e ezt tenni még egy $(k + 1)$-edik egyenes berajzolása esetén? Igen, ugyanis berajzolva az újabb vonalat, ez két részre osztja a térképet. Az egyik oldalt hagyjuk meg úgy színezve, ahogy eddig is volt. A másik felén minden rész színét változtassuk az ellenkezőjére. Így
   – ezen az oldalon a szomszédos részek különböző színei különbözők maradnak;
   – azok a részek, amelyekbe az új egyenes belemetsz, két színűek lesznek, az egyenes két oldalán különböző színeket találunk.

Így elérjük, hogy továbbra se legyenek oldalszomszédos, azonos színű részek.

4056 1. $n = 0$ esetén $11 \mid 2^{6 \cdot 0 + 1} + 3^{2 \cdot 0 + 2} = 2 + 9 = 11.$

2. T.f.h. $n = k$-ra $11 \mid 2^{6k+1} + 3^{2k+2} = 2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9^k.$

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$-re vajon $11 \mid 2^{6 \cdot (k+1)+1} + 3^{2 \cdot (k+1)+2}$ teljesül-e.

$$2^{6 \cdot (k+1)+1} + 3^{2 \cdot (k+1)+2} = 2^{6k+7} + 3^{2k+4} = 64 \cdot 2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9 \cdot 9^k =$$
$$= 64 \cdot (2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9^k) - 64 \cdot 9 \cdot 9^k + 9 \cdot (2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9^k) - 9 \cdot 2 \cdot 64^k.$$

A két zárójelben levő kifejezés az indukciós feltevés szerint osztható 11-gyel, ezért koncentráljunk a maradék két tagra. Kiemelve belőlük (–1)-et, kapjuk:

$$64 \cdot 9 \cdot 9^k + 9 \cdot 2 \cdot 64^k = 9 \cdot (2 \cdot 64^k + 9 \cdot 9^k) + 55 \cdot 9 \cdot 9^k.$$

Itt a zárójeles kifejezés az indukciós feltevés szerint ismét osztható 11-gyel, mint ahogy az utolsó tagban levő 55-ös együttható is. Készen vagyunk: az összes tagról kimutattuk, hogy osztható 11-gyel.



4057 *a)* Kezdjük néhány eset megvizsgálásával:

$$1! < 3^1;\quad 2! < 3^2;\quad \ldots;\quad 6! < 3^6;\quad 7! > 3^7;\quad 8! > 3^8.$$

Sejtésünk: bármely $n \geq 7$ egész számra $n! > 3^n$.

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

1. $n = 7$-re az állítás teljesül: $5040 = 7! > 3^7 = 2187$.
2. T.f.h. $n = k$ értékre teljesül az állítás: $k! > 3^k$.
3. Kérdés, hogy $(k+1)! > 3^{k+1}$ teljesül-e. Induljunk ki a faktoriálisból, használjuk az indukciós feltevést:

$$(k+1)! = k! \cdot (k+1) > (k+1) \cdot 3^k.$$

Ha ez utóbbi kifejezés nagyobb vagy egyenlő, mint $3^{k+1} = 3 \cdot 3^k$, akkor készen is vagyunk:

$$(k+1) \cdot 3^k \geq 3 \cdot 3^k?$$

Osszuk le mindkét oldalt a pozitív 3^k-nal, így $k + 1 \geq 3$, ami természetesen teljesül, hiszen $k > 6$.

b) Vizsgáljunk meg néhány értéket:

$$3^0 > 0^3;\quad 3^1 > 1^3;\quad 3^2 > 2^3;\quad 3^3 = 3^3;\quad 3^4 > 4^3;\quad 3^5 > 5^3;\quad \ldots$$

Úgy tűnik, 3-nál nagyobb és kisebb értékekre teljesül az állítás, csak 3-ra nem (ekkor egyenlőség áll fenn). A bizonyítandó állítás tehát: bármely $n > 3$ természetes számra $3^n > n^3$.

Megjegyzés: Ha megengedjük az egyenlőséget, akkor $n = 0$-tól kimondhatjuk az állítást.

1. $n = 4$ esetén $81 = 3^4 > 4^3 = 64$.
2. T.f.h. $n = k$-ra $3^k > k^3$.
3. Kérdés, hogy $3^{k+1} > (k+1)^3$ teljesül-e. Először alakítsuk át a bal oldalt, majd használjuk fel az indukciós feltételt:

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3 \cdot k^3.$$

Ha igaz, hogy $3 \cdot k^3 \geq (k+1)^3$, akkor készen is vagyunk.

Fejtsük ki a zárójelet, vonjunk ki mindkét oldalból k^3-t:

$$2k^3 \geq 3k^2 + 3k + 1.$$

Osszuk el mindkét oldalt k-val $(k > 3)$, és rendezzünk a tört kivételével egy oldalra:

$$2k^2 - 3k - 3 \geq \frac{1}{k}.$$

A parabola zérushelyei:

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}, \qquad \text{azaz} \qquad k_1 \approx -0{,}69 \quad \text{és} \quad k_2 \approx 2{,}19.$$

Ne feledjük, hogy számunkra csak a $k > 3$ egész értékek lényegesek!

Ezekre $\frac{1}{k}$ kisebb 1-nél, a parabola pedig pozitív egész értékeket vesz fel, tehát az egyenlőtlenség teljesül.

4058 Figyeljük meg alaposan az összeget. Mivel a szinuszfüggvény 2π szerint periodikus, valamint $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, ezért a kérdéses összeg megegyezik a

$$-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + \ldots$$

váltakozó előjelű összeggel.



Az alábbi táblázatban n az összeadandó váltakozó előjelű számok számát jelöli, S_n pedig az összegüket.

n	1	2	3	4	5	6	7
	–1	–1 + 2	1 – 3	–2 + 4	2 – 5	–3 + 6	3 – 7
S_n	–1	1	–2	2	–3	3	–4
	$-\frac{n+1}{2}$	$\frac{n}{2}$	$-\frac{n+1}{2}$	$\frac{n}{2}$	$-\frac{n+1}{2}$	$\frac{n}{2}$	$-\frac{n+1}{2}$

A probléma az, hogy összegünk a váltakozó előjel miatt kétféleképpen viselkedik: más lesz páros sok és más páratlan sok szám összegére. Az indukciót csak két lépésben végezhetjük el. Egyszer igazolnunk kell a párosról páratlanra történő lépés helyességét, egyszer pedig a páratlanról párosra lépés helyességét. Ehhez írjunk fel két kiinduló értéket és két indukciós feltevést.

Kezdjük a páratlan esettel.

1. $n = 1$-re az állítás igaz, $-1 = 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 1 \cdot \pi\right) = -\frac{1+1}{2} = -1.$

2. T.f.h. $n = (2k-1)$-re az állítás teljesül, azaz $S_n = S_{2k-1} = -\frac{n+1}{2} = -\frac{2k-1+1}{2} = -k.$

3. Kérdés, hogy $n = 2k$-ra igaz-e az állítás: $S_n = \frac{n}{2}$ vagy másképp $S_{2k} = \frac{2k}{2} = k.$

$$S_{2k} = S_{2k-1} + 2k = -k + 2k = k.$$

Páratlanról párosra tehát át tudunk lépni. Gondoljunk bele, a párosról páratlanra átlépő indukcióhoz nincs szükség kezdőérték-vizsgálatra, ugyanis az $n = 1$ kezdőértéket megvizsgáltuk, és utána igazoltuk a róla való továbblépést. A második $n = 2$ érték igazsága ebből már következik.

Lássuk a páros eseteket.

2. T.f.h. $n = 2k$-ra az állítás teljesül, azaz $S_{2k} = \frac{n}{2} = \frac{2k}{2} = k.$

3. Kérdés, hogy $n = 2k + 1$-re igaz-e.

$$S_n = S_{2k+1} = S_{2k} - (2k+1) = k - 2k - 1 = -k - 1 = -\frac{2k+2}{2} = -\frac{(2k+1)+1}{2} = -\frac{n+1}{2}.$$

Megjegyzés: Érdemes megvizsgálni a következő összeget is (az utolsó tagban sin-t vagy cos-t írunk aszerint, mire jön ki a váltakozó lépés):

$$1 \cdot \sin\left(1 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 4 \cdot \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \ldots + n \cdot \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

4059 A probléma kettős. Egyrészt a 2. indukciós feltevésben gyakorlatilag bármilyen k-ra feltesszük, hogy minden $n \le k$-ra igaz a feltétel. Ez azonban csak $n = k = 0$-ra igaz, bármely annál nagyobb értékre nem teljesül a feltétel.

Másrészt a 3. pontban kifejtett gondolatmenetben két értékre, k-ra és $(k-1)$-re is alkalmazzuk az indukciós feltételt, holott a kezdőérték-vizsgálatot csak egy értékre végeztük el ($n = 0$-ra). Persze a feladatban ezt nem is végezhetjük el többre, hiszen csak $a^0 = 1$ bármely a-ra.

Megjegyzés: Természetesen, ha több kezdőértékre is meg tudjuk állapítani az állítás igazságát, akkor ezeket fel is használhatjuk a bizonyításban.



Vegyes feladatok – megoldások

4060 *a)* Hamis. Például $2 + 3 = 5$.

b) Hamis. Mindkettő kisebb vagy egyenlő, mint 1, de ha az egyik 1, a másik 0.

c) Igaz. Négyzetszám csak 0 vagy 1 maradékot adhat hárommal osztva.

d) Igaz. Például $f(x) = 0$.

4061 *a)* Nem, mert a De Morgan-azonosságok szerint B-ben „vagy" műveletnek kell szerepelni.

b) Igen, hiszen a műveletek disztributívak.

4062 *a)* Kinyitottam a sütőt vagy kivettem a tálat, és megégettem a kezem.

Nem igaz, hogy kinyitottam a sütőt és kivettem a tálat.

Kinyitottam a sütőt és kivettem a tálat, vagy nem vettem ki a tálat és megégettem a kezem.

b) Nem nyitottam ki a sütőt és nem vettem ki a tálat, vagy nem égettem meg a kezem.

Kinyitottam a sütőt és kivettem a tálat.

Nem nyitottam ki a sütőt vagy nem vettem ki a tálat, és kivettem a tálat vagy nem égettem meg a kezem.

4063 *a)* $B \leftrightarrow (A \wedge C)$;

b) $(C \wedge B) \rightarrow (\neg A)$.

c) Ha esik az eső, akkor próbára megyek vagy fáradt vagyok.

d) Próbára megyek és nem vagyok fáradt, de esik az eső.

4064 A bolondokháza eme lakója őrült orvos.

4065 A kitöltött táblázat: (➡)

Állítás	Igaz	Hamis
a)		X
b)	X	
c)	X	
d)		X

4066 1. $n = 0$-ra $6 \mid 0 \cdot (0^2 + 5) = 0$.

2. T.f.h. $n = k$ esetén $6 \mid k \cdot (k^2 + 5) = k^3 + 5k$.

3. Kérdés, hogy $n = k + 1$ esetén $6 \mid (k+1) \cdot [(k+1)^2 + 5]$ teljesül-e.

$$(k+1) \cdot [(k+1)^2 + 5] = (k+1) \cdot [k^2 + 2k + 6] = k^3 + 3k^2 + 8k + 6 =$$
$$= k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6 = k^3 + 5k + 3k \cdot (k+1) + 6.$$

Az első két tag összege, azaz $k^3 + 5k$ az indukciós feltevés miatt osztható 6-tal. A szorzat osztható 3-mal és az egyik tényezője biztosan páros, tehát osztható 6-tal.

4067 A meggondolással két probléma is van. Egyrészt az indukciós feltevés hibás, nyilván lehet már két leányt is találni, akiknek különböző színű a haja. Másrészt ha ez igaz is lenne, a bizonyítás elve akkor sem működik $n = 1$-ről $n = 2$-re való átlépéskor. Egymást átfedő csoportok létrehozásában gondolkodunk, de 2 fő esetén 1 fős csoportok lesznek, melyek között nincs átfedés.



12.2. SZÁMSOROZATOK

A sorozat fogalma, példák sorozatokra – megoldások

4068 *a)* $a_5 = -2, \quad a_{20} = 28;$ *b)* $b_5 = 75, \quad b_{20} = 0;$ *c)* $c_5 = -100, \quad c_{20} = 200;$

d) $d_5 = 53, \quad d_{20} = 7703;$ *e)* $e_5 = \sqrt{19}, \quad e_{20} = 8;$ *f)* $f_5 = \sqrt{21} - 5, \quad f_{20} = -11;$

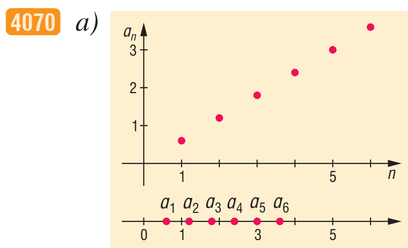
g) $g_5 = 0, \quad g_{20} = \frac{45}{41};$ *h)* $h_5 = 11, \quad h_{20} = \frac{397}{17}$

4069 *a)* $a_n = 4 + n;$ *b)* $b_n = 2n - 5;$ *c)* $c_n = -2^{n-1};$

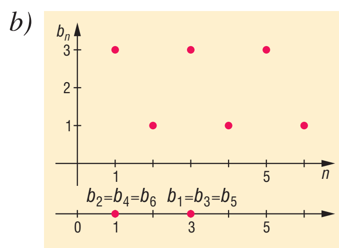
d) $d_n = (-1)^{n+1};$ *e)* $e_n = \frac{1}{n};$ *f)* $f_n = \sqrt[n+1]{7};$

g) $g_n = \log_2 n;$ *h)* $h_n = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad n = 3k+1, \\ 2, & \text{ha} \quad n = 3k+2, \\ 3, & \text{ha} \quad n = 3k. \end{cases}$

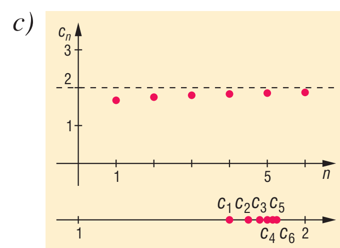
4070 *a)*



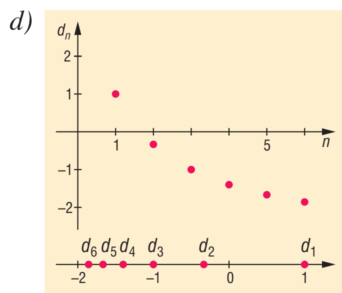
b)



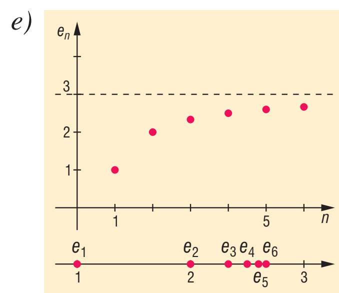
c)



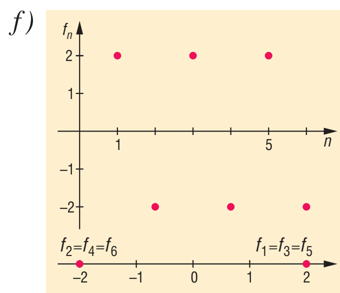
d)



e)



f)



4071 *a)* $16; \quad 4; \quad 1; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{16}; \quad \frac{1}{64};$ *b)* 2006; 2002; 1998; 1994; 1990; 1986;

c) $\sqrt{3}; \quad \sqrt{7}; \quad \sqrt{11}; \quad \sqrt{15}; \quad \sqrt{19}; \quad \sqrt{23}.$

4072 $a_{2010} = 1, \quad S_{2010} = 6030.$

4073 *a)* $a_{50} = 12 = b_{25};$ *b)* $a_{12} = 4 = b_{99};$ *c)* $a_{60} = 1 = b_{67};$

d) $a_{43} = \frac{1}{2} < b_{101} = \frac{7}{13};$ *e)* $a_{77} = 3 > b_7 = 2.$

4074 *a)* $n = 6;$ *b)* $n = 10;$ *c)* $n = 11;$

d) $n = 12;$ *e)* $n = 2^{30};$ *f)* $n = 1; 5; 13; 17; \ldots$



Példák rekurzív sorozatokra – megoldások

4075 *a)* 5; 4; 2; –2; –10; *b)* 5; 6; 3; 12; –15;

c) 5; $\frac{7}{3}$; $\frac{5}{9}$; $-\frac{17}{27}$; $-\frac{115}{81}$; *d)* 5; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{24}$; $\frac{1}{24}$.

4076 Építsük fel a sorozatot: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$ és a negyedik tagtól kezdve:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3},$$

tehát a további tagok:

$$a_4 = 7;\quad a_5 = 13;\quad a_6 = 24;\quad a_7 = 44;\quad a_8 = 81;\quad a_9 = 149;\quad a_{10} = 274.$$

Tehát 274-féleképpen érhetünk fel.

4077 A sorozat tagjai: 1; 1; 1; 1; 1, …, tehát $a_{2010} = 1$ és $S_{2010} = 2010$.

4078 A sorozat tagjai: 1; 1; 0; –1; –1; 0; 1; 1; …, látható, hogy egy hatos periódus után újra ugyanazok a számok lesznek a sorozat elemei.

Mivel $2009 = 6 \cdot 334 + 5$, a 2009-edik tag –1 lesz.

Egy periódusban a számok összege 0, mivel a hatodik elem is 0, az első 2009 tag összege is 0.

4079 Vizsgáljuk meg a sorozat tagjait:

$$a_3 = \frac{q+1}{p};\quad a_4 = \frac{\frac{q+1}{p}+1}{q} = \frac{p+q+1}{p\cdot q};\quad a_5 = \frac{\frac{p+q+1}{p\cdot q}+1}{\frac{q+1}{p}} = \frac{(p+1)\cdot(q+1)}{p\cdot q}\cdot\frac{p}{q+1} = \frac{p+1}{q};$$

$$a_6 = \frac{\frac{p+1}{q}+1}{\frac{p+q+1}{p\cdot q}} = p;\quad a_7 = \frac{p+1}{\frac{p+1}{q}} = q.$$

A tagok ismétlődnek, a periódus öt. Tehát:

$$a_{2014} = a_4 = \frac{p+q+1}{p\cdot q}.$$

4080 *a)* Lehet, például: 1; 2009; 2010; …

b) Ha a második tag x, a sorozat tagjai:

$$1;\quad x;\quad 1+x;\quad 2\cdot(1+x);\quad 4\cdot(1+x);\quad 8\cdot(1+x);\quad \dots;\quad a_n = 2^{n-3}\cdot(1+x).$$

A $2^{n-3}\cdot(1+x) = 1000$ egyenlet legnagyobb megoldása $n = 6$, ekkor $x = 124$.

Számtani sorozatok – megoldások

4081 *a)* $a_{11} = 23$; *b)* $a_{56} = 158$; *c)* $a_{237} = 701$; *d)* $a_{2010} = 6020$.

4082 *a)* 46; *b)* 91; *c)* 9721.

4083 *a)* 2773-adik; *b)* 3016-odik; *c)* nem tagja a sorozatnak.

4084 $d = -1$.

4085 *a)* 116; *b)* 798.



4086 *a)* $a_6 = 23 + 5 \cdot 5 = 48$ km. *b)* $S_7 = 266$ km.

4087 A világcsúcs 158 kg.

4088 *a)* $a_1 = 7$ és $d = 3$. *b)* $S_{40} = 2620$.

4089 *a)* $a_1 = 50$ és $d = -4$. *b)* $S_{50} = -2400$.

4090 Igen, mivel

$$\frac{11\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{3\sqrt{5} + 1 + 8\sqrt{5} - 2}{2}.$$

A sorozat különbsége:

$$d = \frac{5\sqrt{5} - 3}{2}.$$

4091 *a)* A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + 2d + a_1 + 7d &= 34 \\ a_1 + d + a_1 + 10d &= 46 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $a_1 = -10$ és $d = 6$.

b) $2012 = a_{338}$.

4092 Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + (a_1 + 3d) &= 38 \\ (a_1 + 6d) - (a_1 + 2d) &= 16 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = 4$ és $a_1 = 13$.

a) 92; *b)* 101; *c)* 7860.

4093 A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} (a_1 + 4d) \cdot (a_1 + 9d) &= -25 \\ 2a_1 + 8d &= 10 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $a_1 = 13$ és $d = -2$.

4094 Az egyenletrendszerünk:

$$\left.\begin{aligned} 3a_1 + 3d &= -9 \\ 3a_1 + 9d &= 39 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = 8$ és $a_1 = -11$.

4095 Az egyenletrendszerünk a következő:

$$\left.\begin{aligned} 8a_1 + 28d &= 14 \\ 4a_1 + 26d &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldás: $d = -\frac{1}{2}$ és $a_1 = \frac{7}{2}$.

4096 A feltétel szerint:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{a_5 + a_6 + a_7 + a_8} = \frac{4a_1 + 6d}{4a_1 + 22d} = \frac{1}{3}, \quad \text{amiből} \quad d = 2a_1.$$

A keresett arány:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}}{a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{20}} = \frac{10a_1 + 45d}{10a_1 + 145d} = \frac{1}{3}.$$



4097 A feltétel alapján:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}}=\frac{(a_5-4d)+(a_5-3d)+(a_5-2d)+(a_5-d)+a_5}{(a_5+d)+(a_5+2d)+(a_5+3d)+(a_5+4d)+(a_5+5d)}=$$

$$=\frac{50-10d}{50+15d}=\frac{1}{5},$$

ebből pedig a sorozat differenciája: $d=\frac{40}{13}$.

4098 *a)* Mivel $a_1=3$ és $d=8$, ezért: $a_n=2011=251\cdot 8+3$, amiből leolvasható, hogy $n=252$.
A $2011=3+(n-1)\cdot 8$ egyenlet megoldásából szintén $n=252$ adódik.
Tehát 252 házhoz kézbesített levelet a postás.

b) Mivel $a_1=6$ és $d=10$, továbbá az utolsó 6-ra végződő házszám a 2006, ezért felírható: $a_n=2006=200\cdot 10+6$, amiből leolvasható, hogy $n=201$.
A $2006=6+(n-1)\cdot 10$ egyenlet megoldásából szintén $n=201$ adódik.
Tehát 201 házhoz kézbesített levelet a postás.

4099 A számtani sorozat első k elemének összege $S_k=\frac{a_1+a_k}{2}\cdot k$, ez alapján: $k=28$.

4100 A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$\frac{2\cdot 17+(n-1)\cdot 10}{2}\cdot n=1472.$$

Rendezett alakja: $5n^2+12n-1472=0$, megoldásai $n_1=16$ és $n_2=-18{,}4$. Természetesen csak a pozitív egész szám lehet megoldás. Tehát 16 számot adtunk össze.

4101 Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned}5010&=\frac{2a_1+3\cdot(n-1)}{2}\cdot n\\ 6895&=\frac{2a_1+3\cdot(n+9)}{2}\cdot(n+10)\end{aligned}\right\}.$$

Az a_1 kiejtése után a $3n^2-347n+10\,020=0$ egyenletet kapjuk, amelynek pozitív egész megoldása: $n=60$, ebből $a_1=-5$.

4102 *a)* A következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{44+(n-1)\cdot 5}{2}\cdot n=385,\qquad \text{ahonnan}\qquad 5n^2+39n-770=0.$$

Ennek pozitív megoldása: $n\approx 9{,}12$, tehát 10 nap alatt ki tudja olvasni a könyvet.

b) $S_9=378$, tehát a tizedik napra csak 7 oldal olvasnivaló marad.

4103 Egy vágásnál 9-cel nő a lapok száma, ha összesen k darab lapot vágtunk el:

$$2010=30+9k\quad\Rightarrow\quad k=220.$$

Tehát 220 lap szétvágásával létrejöhetett 2010 darab, valószínűleg jól számolt az illető.

4104 Az alábbi egyenlőtlenséget kell megoldanunk:

$$10\,000\le 13+17\cdot(n-1)\le 99\,999.$$

Azt kapjuk, hogy $588{,}47\le n\le 5882{,}53$. Az első ötjegyű tag: $a_{589}=10\,009$, az utolsó ötjegyű tag: $a_{5882}=99\,990$. Tehát a sorozatnak 5294 ötjegyű tagja van.



4105 Ha a középső oldal b és a sorozat különbsége d, akkor az oldalak:

$$b-d; \quad b; \quad b+d.$$

Ha az utóbbi az átfogó, akkor Pitagorasz tétele alapján:

$$(b-d)^2+b^2=(b+d)^2,$$

amiből $b^2=4bd$. Mivel $b\neq 0$, ezért $b=4d$.

Tehát a háromszög oldalai: $3d$; $4d$; $5d$.

Az egyik hegyesszög:

$$\sin\alpha=\frac{3d}{5d}=\frac{3}{5} \quad\Rightarrow\quad \alpha=36{,}87°.$$

A másik hegyesszög: $\beta=53{,}13°$.

4106 Ha az oldalak hossza:

$$b-d; \quad b; \quad b+d;$$

a kerületből: $b=40$. A másik feltételből:

$$(40-d)\cdot(40+d)=1431, \quad \text{azaz} \quad 1600-d^2=1413,$$

amiből $d=13$ vagy $d=-13$.

Így az oldalak hossza: 27 cm, 40 cm és 53 cm.

A területet Héron-képlettel érdemes számolni: $T\approx 526{,}5\ \text{cm}^2$.

4107 Az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege: $(n-2)\cdot 180°$. A számtani sorozat miatt:

$$(n-2)\cdot 180°=\frac{142{,}5+172{,}5}{2}\cdot n,$$

melynek megoldása: $n=16$.

4108 Az első 201 természetes szám összege:

$$1+2+3+\ldots+201=201\cdot 101=20\,301.$$

Ha az összegbe k helyett $-k$ kerül, akkor $2k$-val csökken. Mivel kezdetben páratlan volt az összeg, nem kaphatunk 2010-et.

4109 Például nincs 3-ra végződő négyzetszám, ezért az $a_n=10n+3$ megfelel, de megoldás lehet a $b_n=16n+7$ is.

4110 Ha az első szám $\overline{ab}$, akkor a számok:

$$10a+b; \quad 10b+a; \quad 100a+b.$$

Mivel számtani sorozatot alkotnak:

$$10b+a=\frac{10a+b+100a+b}{2}, \quad \text{amiből} \quad b=6a.$$

Csak a 16; 61; 106 számhármas felel meg.

4111 A feltételek alapján:

$$\left.\begin{aligned} m&=a_1+(k-1)\cdot d \\ k&=a_1+(m-1)\cdot d \end{aligned}\right\}.$$

Kivonva egymásból:

$$m-k=d\cdot[(k-1)-(m-1)]=d\cdot(k-m),$$

ahonnan, mivel $k\neq m$, adódik, hogy:

$$d=-1 \quad \text{és} \quad a_1=k+m-1, \quad \text{tehát} \quad a_n=k+m-1-(n-1)=k+m-n.$$



4112 Jelöljük az $\{a_n\}$ sorozat első elemét a_1-gyel, különbségét pedig d-vel. Írjuk fel a $\{b_n\}$ sorozat általános tagját:

$$b_n = \frac{a_{5n-4} + a_{5n}}{2} \cdot 5 = \frac{2a_1 + (10n - 6) \cdot d}{2} \cdot 5 = 5a_1 + 25n \cdot d - 15d =$$

$$= (5a_1 - 15d) + 25d \cdot n = (5a_1 - 15d) + (n-1) \cdot 25d + 25d = (5a_1 + 10d) + (n-1) \cdot 25d.$$

Az általános tag azt mutatja, hogy egy olyan számtani sorozatot kapunk, melynek első eleme: $b_1 = 5a_1 + 10d$, differenciája pedig $D = 25d$.

Mértani sorozatok – megoldások

4113 A sorozat első hat tagja:

$$a_1 = -2; \quad a_2 = \frac{3}{4}; \quad a_3 = -\frac{9}{32}; \quad a_4 = \frac{27}{256}; \quad a_5 = -\frac{81}{2048}; \quad a_6 = \frac{243}{16384}.$$

4114 A keresett tagok:

$$a_1 = \frac{a_4}{q^3} = -\frac{5}{27}; \quad a_6 = a_4 \cdot q^2 = 45; \quad a_9 = -1215.$$

4115 Mivel:

$$q^3 = \frac{a_4}{a_1} = -\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Így a tizedik elem, illetve az első tíz tag összege:

$$a_{10} = 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^9 = -\frac{5}{128}, \quad \text{illetve} \quad S_{10} = 20 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{1705}{128}.$$

4116 Mivel

$$q^4 = \frac{a_5}{a_1} = 16 \quad \Rightarrow \quad q = 2 \quad \text{vagy} \quad q = -2.$$

Az első esetben: $a_8 = -384$ és $S_8 = -765$. A második esetben: $a_8 = 384$ és $S_8 = 255$.

4117 Mivel

$$q^2 = \frac{a_8}{a_6} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Az első esetben:

$$a_1 = \frac{a_6}{q^5} = 896 \quad \text{és} \quad S_6 = 1764.$$

A második esetben:

$$a_1 = \frac{a_6}{q^5} = -896 \quad \text{és} \quad S_6 = -588.$$

4118 Mivel $q = 1$, ezért minden tag 23, így $S_9 = 207$.

4119 Mivel $q = -1$, ezért $S_{100} = 0$.



4120 Ha a mértani sorozat elemei:

$$1 + x;\quad 8 + x;\quad 22 + x;$$

akkor

$$(8 + x)^2 = (1 + x)\cdot(22 + x).$$

Megoldva az egyenletet: $x = 6$, tehát a sorozatunk:

$$7;\quad 14;\quad 28.$$

A sorozat hányadosa: $q = 2$.

4121 A hosszak olyan mértani sorozatot alkotnak, ahol $q = 1{,}25$ és $a_1 = 1$.
A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$15 = 1\cdot 1{,}25^{n-1}.$$

Tízes alapú logaritmussal számolva:

$$n = 1 + \frac{\lg 15}{\lg 1{,}25} \approx 13{,}14.$$

Tehát a 14. napon éri el a 15 méteres hosszúságot.

4122 Keressük az alábbi egyenlőtlenség megoldásait:

$$10\,000 \le 3\cdot 5^{n-1} \le 99\,999.$$

Tízes alapú logaritmussal számolva:

$$\lg 3333{,}33 \le \lg 5^{n-1} \le \lg 33333,$$

azaz

$$\frac{\lg 3333{,}33}{\lg 5} \le n - 1 \le \frac{\lg 33333}{\lg 5},$$

ahonnan

$$6{,}04 \le n \le 7{,}47.$$

Tehát a sorozatnak csak a hetedik tagja ötjegyű. Valóban: $a_7 = 46\,875$.

4123 A következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot q^2 + a_1\cdot q^3 &= 80 \\ a_1\cdot q^4 - a_1\cdot q^2 &= 240 \end{aligned}\right\},$$

kiemelés után:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot q^2\cdot(1+q) &= 80 \\ a_1\cdot q^2\cdot(q^2-1) &= 240 \end{aligned}\right\}.$$

Mivel $q \ne -1$, a második és első egyenlet hányadosából adódik, hogy:

$$\frac{q^2-1}{q+1} = 3,$$

tehát $q = 4$, a sorozat első eleme $a_1 = 1$.

4124 *a)* Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1\cdot(1+q) &= 15 \\ a_1\cdot q^2\cdot(1+q) &= 60 \end{aligned}\right\}.$$

Megoldásai:

$$a_1 = 5 \text{ és } q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -15 \text{ és } q = -2.$$



b) A megoldást a

$$\frac{16}{q} + 16 + 16q = 56, \quad \text{azaz} \quad 2q^2 - 5q + 2 = 0$$

egyenletből kapjuk:

$$q = 2 \text{ és } a_1 = 8 \quad \text{vagy} \quad q = \frac{1}{2} \text{ és } a_1 = 32.$$

c) A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cdot \left(1 + q + q^2\right) &= 57 \\ a_1 \cdot \left(1 - q^2\right) &= 15 \end{aligned}\right\}.$$

Elosztva a két egyenletet, adódik hogy:

$$24q^2 + 5q - 14 = 0.$$

Megoldásai:

$$q = \frac{2}{3} \text{ és } a_1 = 27 \quad \text{vagy} \quad q = -\frac{7}{8} \text{ és } a_1 = 64.$$

d) Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cdot (1 + q) &= 160 \\ a_1 \cdot q^5 \cdot (1 + q) &= 1215 \end{aligned}\right\}.$$

A két egyenlet hányadosából:

$$q^5 = \frac{243}{32},$$

ebből adódik, hogy:

$$q = \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad a_1 = 64.$$

4125 A következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cdot \left(1 + q + q^2 + q^3\right) &= 468 \\ a_1 \cdot q^4 \cdot \left(1 + q + q^2 + q^3\right) &= 292\,500 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletek osztásával kapjuk, hogy $q^4 = 625$, amiből $q = 5$ vagy $q = -5$.
A megoldás:

$$a_1 = 3 \text{ és } q = 5 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -\frac{9}{2} \text{ és } q = -5.$$

4126 Mivel:

$$\frac{7 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \cdot \left(5 + 3\sqrt{3}\right) = 97 + 56\sqrt{3},$$

a négyzetre emelés és a nevező gyöktelenítése után:

$$\left(\frac{\sqrt{3} + 2}{2 - \sqrt{3}}\right)^2 = \left(7 + 4\sqrt{3}\right)^2 = 97 + 56\sqrt{3},$$

ezért az állítás igaz. A mértani sorozat hányadosa:

$$q = \sqrt{3} - 1.$$



4127 Ha a számtani sorozat differenciája d, a feltétel szerint:

$$(10-d)^2 = (10-2d)\cdot(10+2d).$$

Az egyenlet két megoldása:

$$d_1 = 0 \quad \text{és} \quad d_2 = 4.$$

A számtani sorozat első tagjai és a mértani sorozat hányadosai:

$$d = 0 \quad \text{esetén} \quad a_1 = 10 \quad \text{és} \quad q = 1, \quad \text{illetve} \quad d = 4 \quad \text{esetén} \quad a_1 = -2 \quad \text{és} \quad q = 3.$$

4128 Az $\{a_n\}$ számtani sorozatra vonatkozó feltételből: $a_2 = 2$, így a számok:

$$2-d; \quad 2; \quad 2+d.$$

A $\{b_n\}$ mértani sorozat első három eleme:

$$7-d; \quad 4; \quad 3+d.$$

Ebből:

$$4^2 = (7-d)\cdot(3+d),$$

ennek megoldásai:

$$d_1 = 5 \quad \text{és} \quad d_2 = -1.$$

Az első esetben: $q_1 = 2$ és $b_1 = 2$, a második esetben: $q_2 = \frac{1}{2}$ és $b_1 = 8$.

4129 A mértani sorozat elemei:

$$\frac{12}{q}; \quad 12; \quad 12q.$$

A számtani sorozat elemei:

$$\frac{12}{q} + 4; \quad 15; \quad 12q + 1.$$

A számtani sorozat tulajdonságából:

$$15 = \frac{\frac{12}{q} + 4 + 12q + 1}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad 12q^2 - 25q + 12 = 0,$$

ezt megoldva:

$$q_1 = \frac{4}{3} \quad \text{és} \quad q_2 = \frac{3}{4}.$$

4130 Ha a legkisebb oldal a, és a sorozat hányadosa q, $q > 1$, akkor az oldalak:

$$a; \quad aq; \quad aq^2.$$

Pitagorasz tétele alapján:

$$a^2 + (aq)^2 = \left(aq^2\right)^2.$$

Mivel $a \neq 0$, eloszthatjuk az egyenletet, és a $q^4 - q^2 - 1 = 0$ negyedfokú egyenlethez jutunk. Megoldva:

$$\left(q^2\right)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

mivel $q^2 > 0$, ezért adódik, hogy:

$$q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

A háromszög hegyesszögei:

$$\cos\alpha = \frac{a}{aq^2} = \frac{1}{q^2},$$

ebből $\alpha = 51{,}83°$, a másik szög $\beta = 38{,}17°$.



4131 Az oldalak hossza:

$$9;\quad 9q;\quad 9q^2.$$

A kerület:

$$19 = 9 + 9q + 9q^2,$$

ebből:

$$q_1 = \frac{2}{3} \quad \text{és} \quad q_2 = -\frac{5}{3}.$$

Természetesen csak a $q = \frac{2}{3}$ megoldás.

A háromszög oldalai: 9 cm, 6 cm, 4 cm.

A legnagyobb szög a leghosszabb oldallal szemben van, koszinusztétellel számolva:

$$\cos\alpha = \frac{6^2 + 4^2 - 9^2}{48} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 127{,}17°.$$

A háromszög legnagyobb szöge $\alpha = 127{,}17°$.

4132 A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 63 \\ a_2 \cdot (a_1 + a_3) &= 810 \end{aligned}\right\}.$$

A megoldáshoz vezessünk be új változót, legyen $x = a_1 + a_3$, a kapott

$$\left.\begin{aligned} a_2 + x &= 63 \\ a_2 \cdot x &= 810 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai: $a_2 = 45$ és $x = 18$, vagy $a_2 = 18$ és $x = 45$.

I. Ha $a_2 = 45$ és $x = 18$, akkor a $18 = \frac{45}{q} + 45q$ egyenletnek nincs megoldása.

II. Ha $a_2 = 18$ és $x = 45$, akkor a $45 = \frac{18}{q} + 18q$ egyenlet megoldásai és a keresett sorozat:

$$q_1 = 2,\quad a_1 = 9 \quad \text{vagy} \quad q_2 = \frac{1}{2},\quad a_1 = 36.$$

4133 Legyenek a számtani sorozat tagjai:

$$a_1 = x - d;\quad a_2 = x;\quad a_3 = x + d;\quad d \neq 0.$$

A mértani sorozat elemei:

$$b_{n-1} = a_1 \cdot a_2 = (x - d) \cdot x;\quad b_n = a_2 \cdot a_3 = x \cdot (x + d);\quad b_{n+1} = a_3 \cdot a_1 = x^2 - d^2.$$

A mértani sorozat tulajdonsága alapján: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, vagyis:

$$[x \cdot (x + d)]^2 = (x - d) \cdot x \cdot (x^2 - d^2).$$

A műveletek elvégzése után, mivel $d \neq 0$, $x \neq 0$, $x + d \neq 0$, adódik, hogy: $d = 3x$.

A számtani sorozat tagjai:

$$a_1 = -2x;\quad a_2 = x;\quad a_3 = 4x.$$

A mértani sorozat elemei:

$$b_{n-1} = -2x^2;\quad b_n = 4x^2;\quad b_{n+1} = -8x^2.$$

A keresett hányados: $q = -2$.



4134 Jelöljük x-szel a sorozat ötödik tagját:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{q}+xq&=-40\\ \frac{x}{q^2}+xq^2&=68\end{aligned}\right\},\quad \text{ebből mivel } x\neq 0:\quad \left.\begin{aligned}\frac{1}{q}+q&=\frac{-40}{x}\\ \frac{1}{q^2}+q^2&=\frac{68}{x}\end{aligned}\right\}.$$

Felhasználva, hogy

$$\left(q+\frac{1}{q}\right)^2=q^2+\frac{1}{q^2}+2,$$

a kapott egyenlet:

$$\left(\frac{-40}{x}\right)^2=\frac{68}{x}+2.$$

Ennek megoldásai: $x_1=16$ és $x_2=-50$.

Az elsőt visszahelyettesítve:

$$q+\frac{1}{q}=-\frac{5}{2},\quad \text{ebből:}\quad q_1=-2 \quad \text{és} \quad q_2=-\frac{1}{2},$$

a sorozat első tagjai pedig:

$$\{a_1\}_1=1 \quad \text{és} \quad \{a_1\}_2=256.$$

A második esetben $q+\frac{1}{q}=\frac{4}{5}$. Ennek nincs megoldása.

Kamatszámítás, törlesztőrészletek kiszámítása – megoldások

4135 $180\,000\cdot 1{,}07^{10}=354\,087$ Ft.

4136 $9800\cdot 0{,}97^{10}\approx 7227$ fő.

4137 $500\,000\cdot 1{,}06^8-500\,000=796\,924-500\,000=296\,924$ Ft lesz a haszon.

4138 $1\,000\,000\cdot 1{,}08^5\cdot 1{,}06^{15}=3\,521\,330$ Ft.

4139 A $118\,000\cdot x^{30}=170\,000$ egyenlet megoldása: $x\approx 1{,}0122$, ami 1,22%-os éves növekedést jelent.

4140 A $0{,}87^x=0{,}5$ egyenlet megoldása:

$$x=\frac{\lg 0{,}5}{\lg 0{,}87}\approx 4{,}98.$$

Ha nem lesz változás, körülbelül 5 év múlva már felére csökken a fecskék száma.

4141 A $6\,506\,300=4\,800\,000\cdot x^6$ egyenlet megoldása: $x\approx 1{,}052$, tehát a bank 5,2%-os kamatot adott.

4142 Az $1{,}047^x=3$ egyenlet megoldása:

$$x=\frac{\lg 3}{\lg 1{,}047}\approx 23{,}92,$$

tehát 24 év alatt növekszik háromszorosára a betétünk.



4143 *a)* A keresett összeg kiszámítása:

$$(200\,000 \cdot 1{,}045^{14} + 200\,000 \cdot 1{,}045^{13} + 200\,000 \cdot 1{,}045^{12} + \ldots + 200\,000) \cdot 1{,}045^{6} =$$

$$= 200\,000 \cdot \left(1 + 1{,}045 + 1{,}045^{2} + \ldots + 1{,}045^{14}\right) \cdot 1{,}045^{6} =$$

$$= 200\,000 \cdot \frac{1{,}045^{15} - 1}{1{,}045 - 1} \cdot 1{,}045^{6} = 5\,413\,249.$$

Tehát $5\,413\,249$ Ft lesz a számlán a gyermek 20 éves korában.

b) Legyen az évente befizetett összeg A. A következő egyenletet kell megoldanunk:

$$A \cdot 1{,}075^{20} + A \cdot 1{,}075^{19} + \ldots + A \cdot 1{,}075 = 2 \cdot 10^{7}.$$

Mivel a nevezőben egy mértani sorozat első 20 tagjának összege szerepel, ebből

$$A = \frac{2 \cdot 10^{7}}{1{,}075 + 1{,}075^{2} + \ldots + 1{,}075^{20}} = \frac{2 \cdot 10^{7}}{1{,}075 \cdot \dfrac{1{,}075^{20} - 1}{1{,}075 - 1}}.$$

Kiszámítva $A = 429\,622$ Ft. Ennyit kell minden évben befizetni.

c) Jelöljük n-nel a befizetések számát.

Akkor érik el a kitűzött összeget, ha igaz lesz az alábbi egyenlet:

$$500\,000 \cdot 1{,}086^{n} + 500\,000 \cdot 1{,}086^{n-1} + \ldots + 500\,000 \cdot 1{,}086 = 2 \cdot 10^{7}.$$

Kiemelve:

$$500\,000 \cdot (1{,}086^{n} + 1{,}086^{n-1} + \ldots + 1{,}086) = 2 \cdot 10^{7}.$$

A zárójelben lévő összeg egy mértani sorozat első n tagja, ezért:

$$500\,000 \cdot 1{,}086 \cdot \frac{1{,}086^{n} - 1}{1{,}086 - 1} = 2 \cdot 10^{7},$$

amit rendezve $1{,}086^{n} = 4{,}1676$.

Mindkét oldal logaritmusával számolva:

$$n = \frac{\lg 4{,}1676}{\lg 1{,}086} \approx 17{,}3.$$

A család dönthet úgy, hogy 17 év után már nem raknak be több pénzt, ekkor 19 355 014 forintot vehetnek fel az év végén.

Ha úgy döntenek, hogy 18 éven keresztül fizetnek, akkor az utolsó év végén 21 562 546 forinthoz jutnak.

4144 A $250\,000 \cdot 1{,}05^{x} = 400\,000$ egyenletből: $1{,}05^{x} = 1{,}6$, ahonnan:

$$x = \frac{\lg 1{,}6}{\lg 1{,}05} \approx 9{,}6.$$

Tehát 10 év múlva, azaz 2010 januárjában éri el a betét a 400 000 Ft-ot.

4145 Az első bank öt év múlva

$$1\,000\,000 \cdot 1{,}04^{5} + 700\,000 \cdot 1{,}063^{5} \approx 2\,166\,742 \text{ Ft-ot fizet.}$$

A második bank öt év múlva

$$1\,700\,000 \cdot 1{,}019^{20} \approx 2\,477\,038 \text{ Ft-ot fizet.}$$

Tehát a Peták Bankot érdemes választani.



4146 Ha az évenként felvett összeg x, akkor az alábbi egyenletet kell megoldanunk:

$$\{[(10^8 \cdot 1{,}05 - x) \cdot 1{,}05 - x] \cdot \ldots \cdot 1{,}05 - x\} = 0.$$

Átrendezve:

$$10^8 \cdot 1{,}05^{20} = x \cdot (1{,}05^{19} + 1{,}05^{18} + \ldots + 1),$$

vagyis

$$x = \frac{10^8 \cdot 1{,}05^{20}}{\dfrac{1{,}05^{20} - 1}{1{,}05 - 1}} = 8\,024\,258{,}72 \approx 8\,024\,259 \text{ Ft.}$$

Tehát évente $8\,024\,259$ Ft-ot vehet fel a bankból.

4147 *a)* Ha x a havi törlesztőrészlet, akkor a következő egyenletet kell megoldani:

$$15 \cdot 10^6 \cdot \left(1 + \frac{8}{12 \cdot 100}\right)^{180} - x \cdot \left(1 + \frac{8}{12 \cdot 100}\right)^{179} - x \cdot \left(1 + \frac{8}{12 \cdot 100}\right)^{178} - \ldots - x = 0.$$

A megoldás:

$$x = \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 1{,}006667^{180}}{\dfrac{1{,}006667^{180} - 1}{1{,}006667 - 1}} = 143\,372 \text{ Ft.}$$

Tehát a havi díj: $143\,372$ Ft.

b) Az évente fizetendő összeg legyen y. Ekkor az egyenletünk:

$$15 \cdot 10^6 \cdot 1{,}08^{15} - y \cdot (1{,}08^{14} + 1{,}08^{13} + \ldots + 1) = 0.$$

A megoldás:

$$y = \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 1{,}08^{15}}{\dfrac{1{,}08^{15} - 1}{1{,}08 - 1}} = 1\,752\,443,$$

ebből a havi díj: $146\,037$ Ft.

c) Az első esetben a $\dfrac{180 \cdot 143\,372}{15\,000\,000} = 1{,}72$, a második esetben a $\dfrac{15 \cdot 1\,752\,443}{15\,000\,000} = 1{,}752$-szeresét kell visszafizetni.

Vegyes feladatok – megoldások

4148 A megadott számtani sorozat adatai:

$$a_1 = -2, \quad d = 5, \quad S_{30} = 2115.$$

4149 A megadott mértani sorozat adatai:

$$a_1 = 7, \quad q = 2, \quad S_{20} = 7\,340\,025.$$

4150 Célszerű a sorozatok első néhány tagját kiszámítani, majd a kialakult sejtést a definíciók segítségével $\left(a_{n+1} - a_n = d, \text{ illetve } \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q\right)$ igazolni.

Számtani sorozatok: *a)*, *b)*, *d)*, ***j)***, ***k)***.

Mértani sorozatok: ***c)***, *g)*, *h)*, *i)*.

4151 $S_{30} = 630\sqrt{3} - 195.$



4152 A következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$500 < 7 + \frac{3}{7}\cdot(n-1) < 1000,$$

ennek megoldása:

$$1151{,}33 < n < 2318.$$

Tehát 1166 tag felel meg.

4153 A három tag szorzatából $a_2 = 105$.
A három tag összegéből:

$$\frac{105}{q} + 105 + 105q = 1687.$$

Az egyenlet megoldásai: $q_1 = 15$ és $q_2 = \frac{1}{15}$.
A feltételnek megfelelő sorozatok: $a_1 = 7,\ q = 15$ és $a_1 = 1575,\ q = \frac{1}{15}$.

4154 Mivel

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 7n - [2\cdot(n-1)^2 - 7\cdot(n-1)] = 4n - 9,$$

a sorozat számtani, $a_1 = -5$ és $d = 4$.

4155 Számtani sorozat, ahol: $d = 11,\ a_1 = 1008,\ a_{818} = 9995$, és az összeg: $S_{818} = 4\,500\,227$.

4156 A feltételekből adódik: $q^{17} = \frac{120}{18} = \frac{20}{3}$, azaz $q = \sqrt[17]{\frac{20}{3}}$.

a) Mivel az $a_3\cdot q^x = 108$, azaz a $q^x = \frac{108}{18} = 6$ egyenlet megoldása

$$x = \frac{\lg 6}{\lg q} = \frac{\lg 6}{\lg \sqrt[17]{\frac{20}{3}}} \approx 16{,}056$$

nem egész szám, ezért a 108 nem tagja a sorozatnak.

b) Mivel $a_3\cdot q^x = 800$, ezért $q^x = \frac{800}{18} = \frac{400}{9}$, az egyenlet megoldása: $x = 34$, tehát a sorozat 37. tagja 800.

4157 Az egyenletek hányadosait véve: $q^2 = 4$, azaz $q_1 = 2$ vagy $q_2 = -2$.
Visszahelyettesítés után a következő négy sorozat adódik:

$$a_1 = \frac{1}{2},\ q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -\frac{1}{2},\ q = 2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = \frac{1}{2},\ q = -2 \quad \text{vagy} \quad a_1 = -\frac{1}{2},\ q = -2.$$

4158 A feltételekből az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_1\cdot q + a_1\cdot q^2 &= \frac{21}{4} \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1\cdot q} + \frac{1}{a_1\cdot q^2} &= \frac{7}{3} \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletek hányadosát véve: $(a_1\cdot q)^2 = \frac{9}{4}$. Ebből $a_1\cdot q = \frac{3}{2}$ vagy $a_1\cdot q = -\frac{3}{2}$.

Mivel $a_1\cdot a_2\cdot a_3 = (a_2)^3$, a keresett szorzat: $\frac{27}{8}$ vagy $-\frac{27}{8}$.



4159 *a)* Mivel a különbség: $d = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$, ezért a számok:

$$3; \quad 14\frac{1}{4}; \quad 25\frac{1}{2}; \quad 36\frac{3}{4}; \quad 48.$$

b) Mivel $q^4 = 16$, ebből $q_1 = 2$ vagy $q_2 = -2$.
A lehetséges számok:

$$3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48 \quad \text{vagy} \quad 3;\ -6;\ 12;\ -24;\ 48.$$

4160 Mivel az első három tag összege 18, ezért a számtani sorozatban $a_2 = 6$.
A számtani sorozat elemei:

$$6-d; \quad 6; \quad 6+d;$$

a mértani sorozat elemei:

$$7-d; \quad 6; \quad 6+d.$$

A mértani sorozat tulajdonsága alapján:

$$6^2 = (7-d)\cdot(6+d).$$

Az egyenlet megoldásai: $d_1 = 3$ és $d_2 = -2$.

Az első esetben a számtani sorozatban $a_1 = 3$ és a mértani sorozatban $q = \frac{3}{2}$.

A második esetben a számtani sorozatban $a_1 = 8$ és a mértani sorozatban $q = \frac{2}{3}$.

4161 Az első feltétel alapján a számokra:

$$a_1 + a_1\cdot q + a_1\cdot q^2 = 114.$$

A számtani sorozat miatt:

$$a_1\cdot q = a_1 + 3d \quad (1) \qquad \text{és} \qquad a_1\cdot q^2 = a_1 + 24d \quad (2).$$

(1)-ből (2)-be helyettesítve:

$$a_1\cdot q^2 = a_1 + 8\cdot(a_1\cdot q - a_1).$$

Mivel $a_1 \neq 0$, adódik, hogy:

$$q^2 - 8q + 7 = 0, \quad \text{ebből} \quad q_1 = 7 \text{ és } q_2 = 1.$$

Ha $q = 7$, az első feltételbe visszahelyettesítve: $a_1 = 2$, a számok: 2; 14; 98.

Ha $q = 1$, akkor $a_1 = 38$, a számok: 38; 38; 38.

4162 *a)* A feltételek miatt:

$$x = \frac{y+4x-5}{2} \qquad \text{és} \qquad (4x-5)^2 = x\cdot(7x+10).$$

A második egyenlet megoldásai: $x_1 = 5$ és $x_2 = \frac{5}{9}$. Az elsőbe helyettesítve: $y_1 = -5$ és $y_2 = \frac{35}{9}$.
Tehát a négy szám:

$$-5; \quad 5; \quad 15; \quad 45 \qquad \text{vagy} \qquad \frac{35}{9}; \quad \frac{5}{9}; \quad -\frac{25}{9}; \quad \frac{125}{9}.$$

b) Az első esetben a különbség 10, a hányados 3, a második esetben a különbség $-\frac{30}{9} = -\frac{10}{3}$, a hányados pedig -5.

4163 *a)* $41{,}9\cdot 10^6\cdot 1{,}054^4 \approx 51\,710\,230.$

b) $\frac{41{,}9\cdot 10^6}{1{,}011^6} \approx 39\,238\,020.$



c) Ha az évenkénti csökkenésnek megfelelő szorzószám p, akkor $48{,}8 \cdot p^5 = 38$, ahonnan:

$$p = \sqrt[5]{\frac{38}{48{,}8}} \approx 0{,}9512.$$

Tehát évente 4,88%-kal csökken a termelés.

d) Jelölje x a 2013 után eltelt évek számát. A $0{,}97^x = 0{,}74$ egyenletből:

$$x = \frac{\lg 0{,}74}{\lg 0{,}97} \approx 9{,}89.$$

10 év múlva, azaz 2023-ban éri el a termelés a 2013-as év 74%-át.

4164 Legyen a visszafizetésig hátralévő hónapok száma n.
Ha minden hónapban 200 000 Ft-ot fizetnek be, akkor n hónap múlva:

$$18 \cdot 10^6 \cdot 1{,}01^n - 200\,000 \cdot (1{,}01^{n-1} + 1{,}01^{n-2} + \ldots + 1{,}01^2 + 1) = 0.$$

A zárójelben egy mértani sorozat első n tagjának összege áll:

$$18 \cdot 10^6 \cdot 1{,}01^n - 200000 \cdot \frac{1{,}01^n - 1}{1{,}01 - 1} = 0.$$

Rendezve: $1{,}01^n = 10$, megoldás logaritmussal: $n = \frac{\lg 10}{\lg 1{,}01} \approx 231{,}4.$

Tehát 232 hónap, azaz 19 év és 4 hónap alatt tudják visszafizetni a hitelt.

4165 *a)* A 4,8%-os infláció az árak 1,048-szoros emelkedését jelenti, hasonlóan a többi érték is, tehát négy év alatt az árszínvonal $1{,}048 \cdot 1{,}039 \cdot 1{,}072 \cdot 1{,}214 \approx 1{,}417$-szeresre növekedett, ami 41,7%-os inflációt jelent.

b) Ha az árak 1,068-szorosra emelkedtek, akkor a vásárlóérték az $\frac{1}{1{,}068}$-szorosára csökkent, vagyis $1100000 \cdot \frac{1}{1{,}068} \approx 1029963$ Ft lett, ami 70 037 Ft-tal való csökkenést jelent.

c) Ha x az inflációs szorzó, akkor $\frac{620000}{680000} = \frac{1}{x}$, amiből $x \approx 1{,}0968$. Tehát az infláció mértéke 9,68% volt.

d) A 25 000 Ft-tal való béremelés $\frac{25000}{420000} \cdot 100 \approx 5{,}95$%-os emelést jelen, ez nem éri el az infláció mértékét. Béla fizetésének vásárlóértéke $\frac{1{,}0595}{1{,}06} \cdot 100 \approx 99{,}95$%-ára változott, vagyis 0,05%-kal csökkent.



12.3. TÉRGEOMETRIA

Térelemek – megoldások

4166 *a)* A pontok $\binom{10}{2} = 45$ egyenest határoznak meg.

b) Minimálisan 1 síkot határoznak meg a pontok.

c) Maximálisan $\binom{10}{3} = 120$ síkot határoznak meg a pontok.

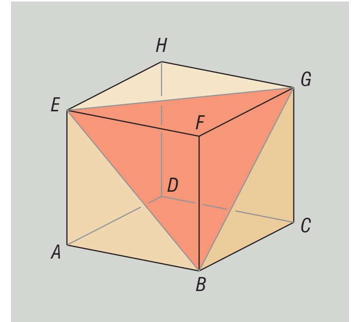
4167 Ha bármely két sík párhuzamos, akkor a metszésvonalak száma 0. A metszésvonalak számának maximuma: $\binom{10}{2} = 45$.

4168 *a)* Az ábra egy ilyen síkot mutat. A következő síkok felelnek meg a feltételnek:

BEG, *BED*, *AFH*, *AFC*, *DGB*, *DGE*, *HCF*, *HCA*.

A kocka csúcsai közül összesen 8 sík tartalmaz pontosan 3 csúcsot.

b) A sík a kockának 3 vagy 4 csúcsát tartalmazhatja. A 3 csúcsot tartalmazó síkokból 8 darab van. A 4 csúcsot tartalmazó síkok vagy a kocka két párhuzamos helyzetű lapátlóját tartalmazzák, vagy a kocka valamelyik lapját. Mindkét fajta síkból 6 darab van. A legalább 3 csúcsot tartalmazó síkok száma 20.



4169 *a)* *BF*, *CG*, *DH*;

b) *AD*, *BC*, *AE*, *BF*, *FG*, *EH*, *CG*, *DH*;

c) *CG*, *DH*, *EH*, *FG*.

4170 *a)* 90°; *b)* 90°; *c)* 90°; *d)* 0°; *e)* 45°; *f)* 60°; *g)* 45°.

Az *AC* egyenes kitérő helyzetű az *FB*, *HF*, *ED* és *HG* egyenesekkel. Az *AC* egyenes párhuzamos az *EG* egyenessel.

4171 *a)* $a\sqrt{2}$; *b)* $a\sqrt{3}$.

4172 A lapátlók hossza: $3\sqrt{2} \approx 4{,}24$ cm, illetve $3\sqrt{10} \approx 9{,}49$ cm.

A testátlók hossza: $3\sqrt{11} \approx 9{,}95$ cm.

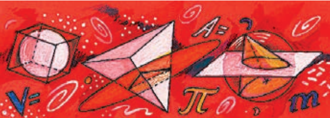
4173 A kocka éle: $\sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$ cm.

4174 Körülbelül 54,74°-ot.

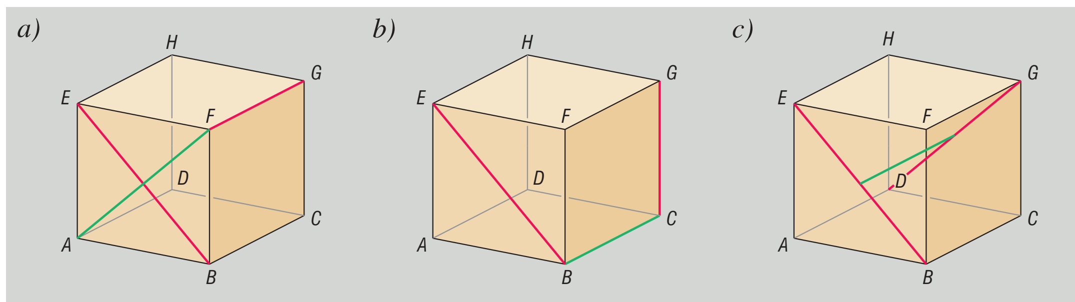
4175 60°-ot. (Lásd a 4168. feladat ábráját.)

4176 Körülbelül 35,26°-ot.

4177 Három különböző távolság lép fel: $\frac{a}{2}$, $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ és $\frac{3a}{2}$.



4178 A piros szakaszok normál transzverzálisainak a kocka valamely lapjára vagy belsejébe eső részét minden esetben zöld színnel jelöltük meg.



a) Az EB és FG szakaszok távolsága $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, hajlásszögük 90º.

b) Az EB és GC szakaszok távolsága a, hajlásszögük 45º.

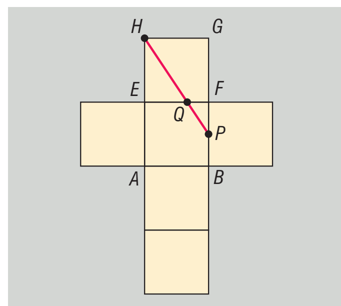
c) Az EB és DG szakaszok távolsága a, hajlásszögük 90º.

4179 A keletkező háromszög szabályos, oldalának hossza: $\frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}5$ cm.

4180 A kialakuló négyszög minden oldala $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, tehát rombusz. Mivel átlói a kocka két szemközti lapjának középpontját kötik össze, ezért átlói is ugyanakkorák, így valóban négyzetről van szó. Természetesen szögeiről is könnyen belátható, hogy 90º-osak.

A keletkező négyzet területe: $\frac{a^2}{2}$.

4181 *a)* $\frac{3}{2}a$. *b)* $2{,}5a$.



c) A kocka lapjain haladó legrövidebb PH út megtalálásához készítsük el a kocka síkbeli hálóját. A lapokon vezető legrövidebb út a P pontot a H ponttal összekötő szakasz lesz. Az ábrán látható háló esetén a PHG derékszögű háromszögben:

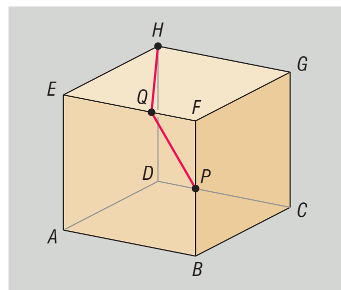
$$PH = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

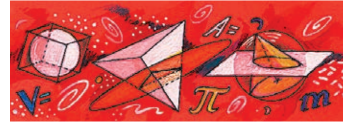
A legrövidebb út hossza: $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Megjegyzés: Ha a legrövidebb PH út az EF élt a Q pontban metszi, akkor a PQF és PHG háromszögek hasonlóságát felhasználva meghatározhatjuk a Q pont F csúcstól való távolságát, hiszen:

$$\frac{QF}{HG} = \frac{PF}{PG} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad QF = \frac{HG}{3} = \frac{EF}{3},$$

ezért Q a kocka EF élének F-hez közelebbi harmadolópontja. A kocka lapjain vezető egyik legrövidebb PH utat az ábra szemlélteti.





Nem a fenti az egyetlen legrövidebb út, amely a kocka lapjain a P pontból a H pontba vezet. Javasoljuk az FG élen keresztülhaladó út, valamint a kocka ahhoz tartozó hálójának megkeresését is.

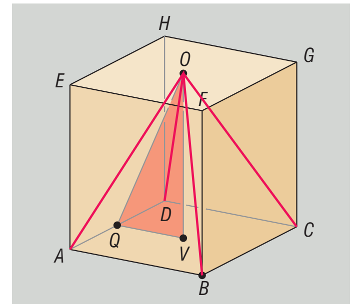
A teljes precizitáshoz hozzátartozik az AE, illetve a CG éleken keresztülvezető utak vizsgálata is. Az ilyen utak közül a legrövidebb hossza azonban $\frac{a\sqrt{17}}{2}$, ami nagyobb, mint az EF élen áthaladó legrövidebb út hossza.

4182 *a)* Az alaplap élei (AB, BC, CD, DA) 12 cm hosszúak. Az oldallapokon található élek (AO, BO, CO és DO) hossza Pitagorasz tételével számolható. Például az AOE derékszögű háromszögben $AO^2 = AE^2 + OE^2$, azaz

$$AO^2 = 12^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2, \quad \text{amiből} \quad AO = \sqrt{216} = 6\sqrt{6} \approx 14{,}70 \text{ cm.}$$

A gúla oldaléleinek hossza körülbelül 14,70 cm.

b) A gúla ADO oldallapja és $ABCD$ alaplapja által bezárt szög megegyezik az OQV derékszögű háromszög Q csúcsánál lévő szögével, ahol Q az AD él felezőpontja, V pedig az $ABCD$ alaplap középpontja. Az $ADO_{\triangle}$ alaphoz tartozó magassága Pitagorasz tételével számolva:



$$OQ = 6\sqrt{5} \approx 13{,}42 \text{ cm.}$$

Mivel $OV = 12$ cm, ezért:

$$\sin(OQV\sphericalangle) = \frac{12}{6\sqrt{5}} \approx 0{,}8944 \quad \Rightarrow \quad OQV\sphericalangle \approx 63{,}43°.$$

A gúla oldallapja és alaplapja által bezárt szög körülbelül 63,43°.

c) A keresett szög megegyezik például az OAV derékszögű háromszög A csúcsánál lévő szögével. Az $OAV_{\triangle}$-ben:

$$\sin(OAV\sphericalangle) = \frac{12}{6\sqrt{6}} \approx 0{,}8165 \quad \Rightarrow \quad OAV\sphericalangle \approx 54{,}74°.$$

A gúla oldaléle az alaplappal körülbelül 54,74°-os szöget zár be.

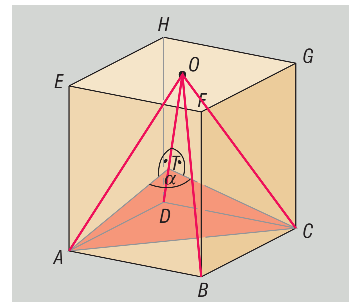
d) Az OA oldalél és az AD alapél által bezárt szöget az OAQ derékszögű háromszögből számolhatjuk ki:

$$\operatorname{tg}(OAQ\sphericalangle) = \frac{OQ}{AQ} = \frac{6\sqrt{5}}{6} \approx 2{,}2361 \quad \Rightarrow \quad OAQ\sphericalangle \approx 65{,}91°.$$

A gúla oldaléle az alapéllel körülbelül 65,91°-os szöget zár be.

e) Jelöljük T-vel az $ADO_{\triangle}$ A csúcsából induló magasságának DO oldalon lévő talppontját. Ekkor a T pont egyben a $DCO_{\triangle}$ C csúcsából induló magasságának is talppontja, ezért a két szomszédos oldallap hajlásszöge megegyezik az AT és CT magasságok hajlásszögével.

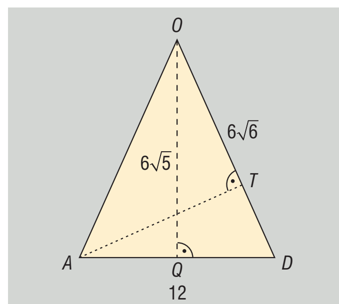
A két sík által bezárt α szöget az ACT egyenlő szárú háromszög oldalaiból fogjuk kiszámolni.





Előbb kiszámoljuk az AT szakasz hosszát. Az $ADO_\triangle$ alaphoz tartozó magassága a *b)* feladat alapján:

$$OQ = 6\sqrt{5} \approx 13,42 \text{ cm}.$$



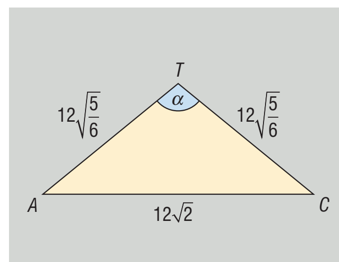
A háromszög területét kétféleképpen számítva:

$$\frac{6\sqrt{6} \cdot AT}{2} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{5}}{2},$$

$$AT = 12\sqrt{\frac{5}{6}} \approx 10,95 \text{ cm}.$$

Végül az $ACT_\triangle$-ben a koszinusztétel alapján:

$$AC^2 = AT^2 + CT^2 - 2 \cdot AT \cdot CT \cdot \cos\alpha.$$



Mivel $AC = 12\sqrt{2}$ $(\approx 16,97 \text{ cm})$, ezért:

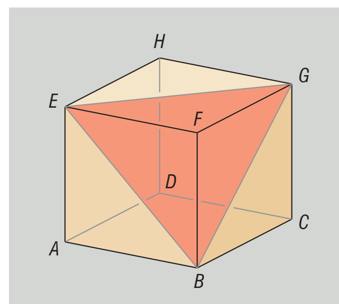
$$288 = 120 + 120 - 2 \cdot 12 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot 12 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = -0,2.$$

A gúla két oldallapja $101,54°$-os szöget zár be egymással.

4183 A kocka csúcsai közül összesen $\binom{8}{3} = 56$-féleképpen lehet hármat kiválasztani.

a) Szabályos háromszöget úgy kaphatunk, ha kiválasztunk egy csúcsot, valamint a csúcsra illeszkedő két lapátló csúcstól különböző végpontjait (ilyen például az ábrán szereplő $BEG_\triangle$). Mivel egy csúcshoz 3 lapátló csatlakozik, ezért közülük 2-t összesen 3-féleképpen lehet kiválasztani. Ez azt jelenti, hogy a kocka minden csúcsa 3 darab szabályos háromszögre illeszkedik (például a B csúcs a BEG, BED, BDG háromszögekre). Mivel 8 csúcs van, ezért a háromszögek száma 24, de minden háromszöget mind a három csúcsánál egyszer számoltunk, így összesen 8 darab szabályos háromszög választható ki a kocka csúcsai közül, ezért a keresett valószínűség: $\frac{8}{56} = \frac{1}{7}$.



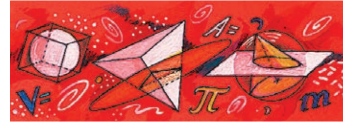
b) Derékszögű háromszögből kétféle van.

I. A kocka valamelyik lapjára illeszkedő háromszög. Minden lapon 4 derékszögű háromszög található (például a $BCGF$ lapon a BCG, CGF, GFB, FBC háromszögek). Ebből a fajta háromszögből tehát összesen 24 darab van.

II. A kocka valamelyik átlós síkjára illeszkedő háromszög. Minden ilyen síkon 4 derékszögű háromszög található (például az $ACGE$ síkon az ACG, CGE, GEA, EAC háromszögek). Mivel összesen 6 átlós sík van, ezért az ilyen típusú háromszögek száma szintén 24.

Összesen 48 darab derékszögű háromszög választható ki a kocka csúcsai közül, ezért a keresett valószínűség: $\frac{48}{56} = \frac{6}{7}$.

4184 Igaz. A két metszésvonal nem lehet kitérő helyzetű, mert egy síkban vannak, ugyanis mindkettő benne van a párhuzamosokat metsző síkban. Ugyanakkor nem lehet a két egyenes metsző helyzetű sem, mert a feltételek alapján különböző, egymással párhuzamos síkokban találhatók. Ebből adódóan a két kialakuló metszésvonal csakis párhuzamos lehet egymással.

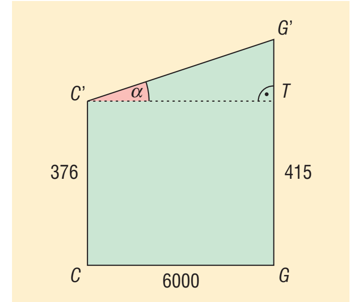


4185 *a)* Az AE éllel a GF, BC, KJ élek párhuzamosak.

b) Az ED egyenesre a következő élek merőlegesek: EF, AG, BK, CJ, HI (illetve az összeillesztés után vele megegyező LM).

c) Az EF egyenessel kitérő helyzetű élek: DC (illetve az összeillesztés után vele megegyező LC), BC, AB, MJ, KJ.

4186 *a)* Az ábra azt a függőleges síkmetszetet mutatja, amelyik tartalmazza a Csobánc (C'), valamint a Szent György-hegy (G') csúcsát is. A két hegycsúcs vízszintes síkon lévő vetületét C, illetve G jelöli. A térképen mért 15 cm a valóságban 6000 méternek felel meg, ezért $CG = 6000$ méter. Ha a $CGG'C'$ derékszögű trapéz C' csúcsából induló magasságának talppontját T jelöli, akkor a $G'C'T$ derékszögű háromszögben:



$$G'C'^2 = C'T^2 + G'T^2,$$

$$G'C'^2 = 6000^2 + (415 - 376)^2,$$

$$G'C' = \sqrt{36\,001\,521},$$

$$G'C' \approx 6000{,}1 \text{ m}.$$

A két hegycsúcs távolsága 6000,1 méter.

b) A $G'C'T_\triangle$-ben:

$$\cos\alpha = \frac{6000}{\sqrt{36\,001\,521}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 0{,}37^\circ.$$

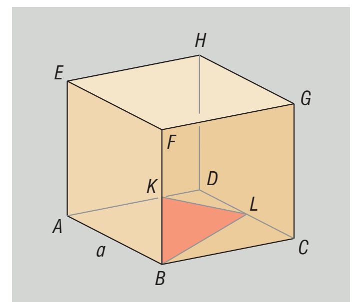
A Csobánc tetejéről a Szent György-hegy teteje 0,37°-os „emelkedési szög” alatt látszik (gyakorlatilag egy vonalban vannak).

Megjegyzés: $\cos\alpha$ négy tizedesjegyre kerekített értéke 1,0000, amiből α-ra 0°-ot kapnánk, ami azért lenne furcsa, mert a Szent György-hegy a magasabb.

Ha a $\cos\alpha$ kiszámolásakor a $G'C'$ távolság *a)* feladatban kapott közelítő értékét használjuk, akkor $\alpha \approx 0{,}33°$ adódik.

A feladat mutatja, hogy még a négy tizedesjegyre történő kerekítés sem mindig ad hű képet a valóságról.

4187 Tekintsük az $ABCDEFGH$ kocka BF élének K, illetve CD élének L felezőpontját. Mivel KB merőleges az $ABCD$ lap síkjára, így merőleges annak minden egyenesére, ezért az LKB háromszög derékszögű. A háromszög LB befogójának hossza könnyen kiszámolható az LBC derékszögű háromszögből. Pitagorasz tétele alapján ugyanis:

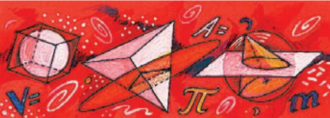


$$LB^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2 \quad \Rightarrow \quad LB = a\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

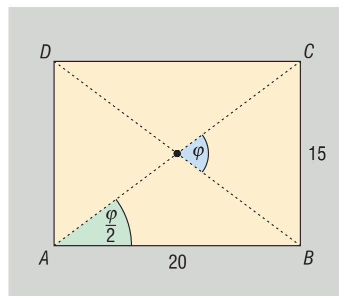
Végül az LKB háromszögben:

$$LK^2 = LB^2 + BK^2 = \frac{5}{4}a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}a^2 \quad \Rightarrow \quad LK = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Könnyen belátható, hogy bármely két kitérő helyzetű él felezőpontja ugyanekkora távolságra van egymástól.



4188 *a)* Ha az $ABCD$ alaplap átlói által bezárt szög φ, akkor az átlók $\frac{\varphi}{2}$ szöget zárnak be a téglalap megfelelő oldalával (ld. ábra).



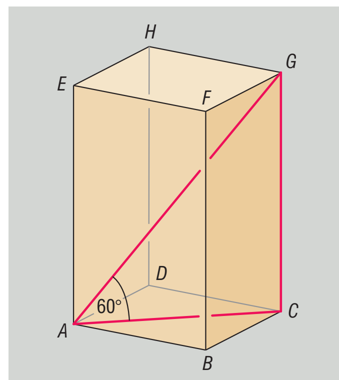
Az ABC derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{15}{20},$$

$$\varphi \approx 73{,}74^\circ.$$

Az alaplap két átlója $73{,}74^\circ$-os szöget zár be egymással.

b) Az AC átló hossza 25 cm (Pitagorasz-tétel). Az ábra ACG háromszögében:



$$\cos 60^\circ = \frac{AC}{AG},$$

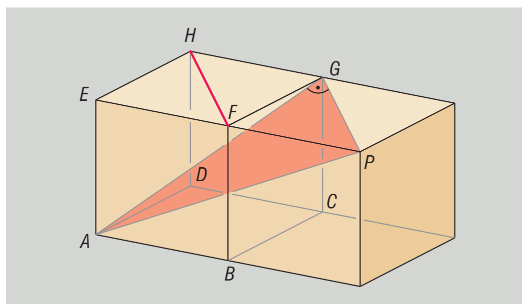
$$AG = 50\text{ cm}.$$

A téglatest testátlója 50 cm hosszú.

c) A téglatest GC, illetve a GC-vel párhuzamos éleinek hossza:

$$25\sqrt{3} \approx 43{,}30\text{ cm}.$$

4189 A két egyenes hajlásszögét úgy a legegyszerűbb kiszámolni, ha az egyiket önmagával párhuzamosan a másik egyenes egy pontjába toljuk. Például helyezzünk az $ABCDEFGH$ kocka „mellé” egy ugyanakkora élű kockát az ábrán látható módon. Mivel $GP \parallel HF$, ezért az AG testátló és a HF lapátló hajlásszöge megegyezik az AG szakasz, valamint az új kocka GP lapátlója által bezárt szöggel.

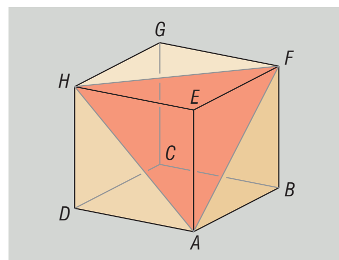


A keresett szöget az AGP háromszög oldalaiból számolhatjuk. Ha a kocka élét a jelöli, akkor az AG testátló hossza: $AG = a\sqrt{3}$, a GP lapátló hossza: $GP = a\sqrt{2}$, míg az AP szakasz hossza Pitagorasz tételének alkalmazásával $AP = a\sqrt{5}$. Vegyük észre, hogy $AG^2 + GP^2 = AP^2$, hiszen:

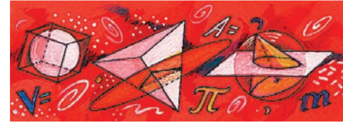
$$\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(a\sqrt{5}\right)^2,$$

ezért Pitagorasz tételének megfordítása alapján az AGP háromszög derékszögű. Az AG testátló, valamint a HF lapátló tehát merőleges egymásra.

4190 *a)* Mivel a HAF háromszög minden oldala a kocka lapátlójával egyenlő (ld. ábra), ezért a háromszög szabályos. Ebből következik, hogy



$$HAF\sphericalangle = 60^\circ.$$



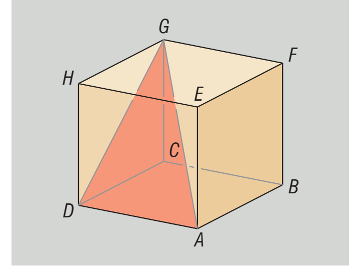
b) Ha a kocka éle a hosszúságú, akkor az ADG háromszög oldalai:

$$AD = a, \quad GD = a\sqrt{2} \quad \text{és} \quad AG = a\sqrt{3}.$$

Mivel $AD^2 + DG^2 = AG^2$, ezért a háromszög derékszögű, így

$$ADG\sphericalangle = 90^\circ.$$

Megjegyzés: Mivel AD merőleges a $DCGH$ síkra, ezért annak minden egyenesére is merőleges, amiből szintén adódik, hogy $ADG\sphericalangle = 90^\circ$.



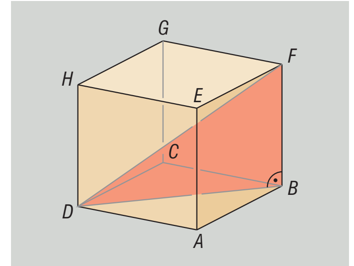
c) A *b)* feladathoz hasonló módszerrel belátható, hogy

$$FGD\sphericalangle = 90^\circ.$$

d) Ha a kocka éle a, akkor a BDF derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} BDF\sphericalangle = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$BDF\sphericalangle \approx 35{,}26^\circ.$$



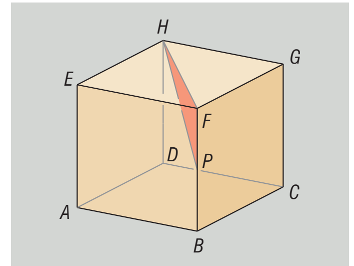
4191 *a)* A PHF háromszög derékszögű, hiszen PF merőleges az $EFGH$ síkra, így merőleges annak minden egyenesére. A háromszög oldalai:

$$PF = 5 \text{ cm}, \quad FH = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14 \text{ cm}.$$

Pitagorasz tétele alapján:

$$PH^2 = 5^2 + \left(10\sqrt{2}\right)^2,$$

$$PH = 15 \text{ cm}.$$



b) Az EKH derékszögű háromszögben:

$$KH^2 = EK^2 + EH^2 = 5^2 + 10^2 = 125,$$

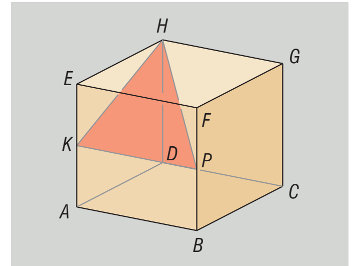
amiből:

$$KH = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ cm}.$$

Az *a)* feladat eredménye alapján $PH = 15$ cm. Nyilvánvaló továbbá, hogy $KP = 10$ cm. Mivel

$$KH^2 + KP^2 = 125 + 100 = 225 = PH^2,$$

ezért Pitagorasz tételének megfordítása alapján a PHK háromszög derékszögű.



Megjegyzés: Ez abból is következik, hogy a KP szakasz merőleges a kocka $AEHD$ lapjára.

c) Az EPF derékszögű háromszögben:

$$EP^2 = 10^2 + 5^2 = 125,$$

amiből:

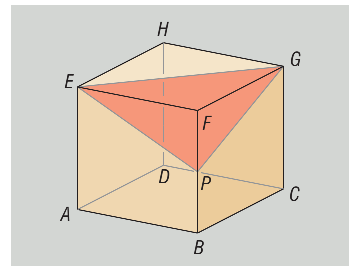
$$EP = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ cm}.$$

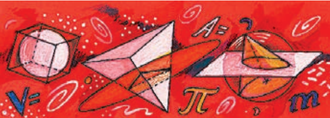
Az EPF és GPF háromszögek egybevágóságából következik, hogy:

$$GP = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ cm},$$

tehát az EGP háromszög egyenlő szárú ($EP = GP$). Mivel EG a kocka lapátlója, ezért:

$$EG = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14 \text{ cm}.$$





d) Az LPE derékszögű háromszögben:

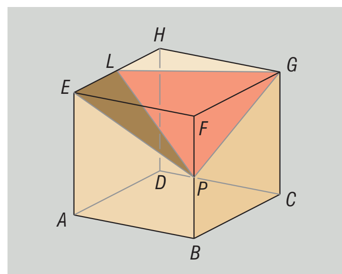
$$PL^2 = 5^2 + \left(5\sqrt{5}\right)^2 = 150,$$

azaz

$$PL = 5\sqrt{6} \approx 12{,}25 \text{ cm}.$$

Az LPG háromszög egyenlő szárú, hiszen

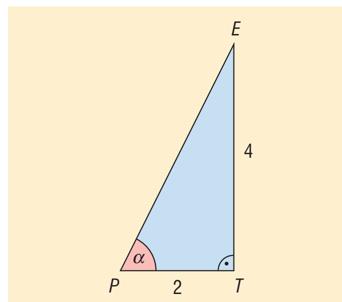
$$GP = GL = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18 \text{ cm}.$$



4192 Jelöljük T-vel az E pont $ABCD$ síkra eső merőleges vetületét, valamint P-vel az ADE egyenlő szárú háromszög E csúcsából induló magasságának AD alapra illeszkedő talppontját. Az EPT derékszögű háromszögben $PT = 2$ m és $ET = 4$ m. Az ADE tetősík a vízszintes $ABCD$ síkkal bezárt szögére:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2,$$
$$\alpha \approx 63^\circ.$$

Az ADE és BCF tetősíkok a vízszintes síkkal 63°-os szöget zárnak be.

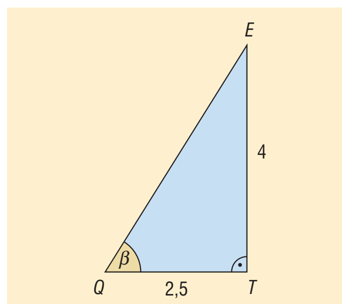


A másik két tetősík vízszintessel bezárt szögét hasonló módszerrel számolhatjuk ki. Ha Q jelöli az $ABFE$ trapéz E csúcsából húzott magasság AB szakaszra illeszkedő talppontját, akkor az EQT háromszög befogói: $ET = 4$ m és $TQ = 2{,}5$ m.

A tetősík vízszintessel bezárt β szögére:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{2{,}5},$$
$$\beta \approx 58^\circ.$$

Az $ABFE$ és $DCFE$ tetősíkok a vízszintes síkkal 58°-os szöget zárnak be.



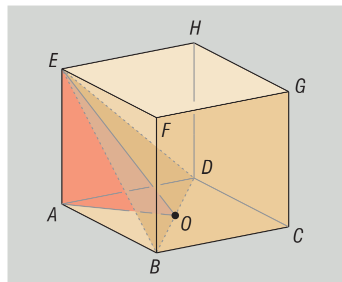
4193 *a)* Az EBD háromszög minden oldala a kocka egy-egy lapátlója, ezért az $EBD_\triangle$ minden oldala $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm hosszúságú, így a háromszög valóban szabályos.

b) Az $ABCD$ négyzet középpontját jelöljük O-val. Ekkor AO és BD a négyzet egy-egy átlójára illeszkedik, ezért merőlegesek egymásra.

Másrészt EO az EBD szabályos háromszög egyik magassága, ezért EO is merőleges BD-re.

Összefoglalva: AO és EO egyaránt merőleges az $ABCD$ és EBD síkok metszésvonalára, ezért a két sík hajlásszöge éppen az $EOA\sphericalangle$. Az OEA derékszögű háromszögben:

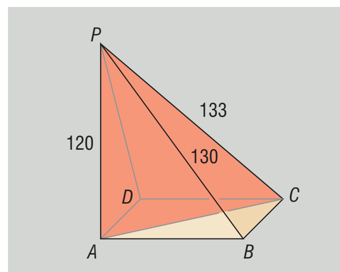
$$\operatorname{tg} EOA\sphericalangle = \frac{10}{\frac{10\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2},$$
$$EOA\sphericalangle \approx 54{,}74^\circ.$$



Az $ABCD$ alaplap síkja az EBD síkkal 54,74°-os szöget zár be.



4194 *a)* A helikopter, amelynek helyét az ábrán P-vel jelöltük, illeszkedik az $ABCD$ téglalap síkjának A pontban emelt merőleges egyenesére. Ebből következően az AP egyenes merőleges az $ABCD$ sík minden egyenesére, így a BPA, CPA és DPA háromszögek mindegyike derékszögű. A $BPA_{\triangle}$-ből:



$$AB^2 = 130^2 - 120^2 = 2500,$$
$$AB = 50 \text{ m.}$$

A $CPA_{\triangle}$-ből:

$$AC^2 = 133^2 - 120^2 = 3289,$$
$$AC = 57{,}3 \text{ m.}$$

A szintén derékszögű $ABC_{\triangle}$-ből:

$$BC^2 = AC^2 - AB^2,$$
$$BC^2 = 3289 - 2500 = 789,$$
$$BC = 28{,}1 \text{ m.}$$

A leszállópálya oldalai 28,1 m, illetve 50 m hosszúak.

b) A $PDA_{\triangle}$-ből:

$$PD^2 = PA^2 + AD^2 = 120^2 + 789 = 15\,189,$$

amiből $PD = 123{,}2$ méter.

c) A feladat az $ACP\sphericalangle$-et kérdezi. A $CPA_{\triangle}$-ből:

$$\sin ACP\sphericalangle = \frac{120}{133},$$
$$ACP\sphericalangle \approx 64{,}5°.$$

A C pontból a helikopter körülbelül 64,5°-os emelkedési szögben látszik.

d) Tegyük fel, hogy a helikopter x méteres magasságban van, amikor a D pontból kétszer akkora szög alatt látszik, mint a C pontból. Ha a helikopter helyét ekkor is P jelöli, akkor

$$\operatorname{tg} ACP\sphericalangle = \frac{x}{AC} = \frac{x}{\sqrt{3289}} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} ADP\sphericalangle = \frac{x}{AD} = \frac{x}{\sqrt{789}}.$$

Mivel a feltételek szerint $ADP\sphericalangle = 2 \cdot ACP\sphericalangle$, ezért a megfelelő addíciós összefüggés alapján:

$$\operatorname{tg} ADP\sphericalangle = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} ACP\sphericalangle}{1 - \operatorname{tg}^2 ACP\sphericalangle}.$$

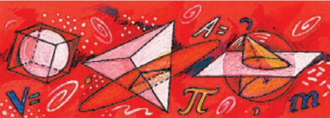
A kapott értékeket behelyettesítve:

$$\frac{x}{\sqrt{789}} = \frac{2 \cdot \frac{x}{\sqrt{3289}}}{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{3289}}\right)^2}.$$

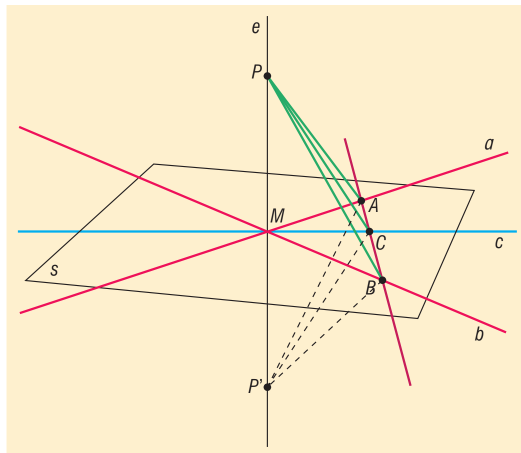
Rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$x^2 = 3289 \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{789}}{\sqrt{3289}}\right),$$
$$x \approx 8{,}2 \text{ m.}$$

A helikopter 8,2 méter magasan van, amikor a D pontból kétszer akkora szögben látszik, mint a C pontból.



4195 Tegyük fel, hogy az e egyenes merőleges az S sík két metsző helyzetű egyenesére. Célunk annak igazolása, hogy az e egyenes az S sík minden egyenesére merőleges.



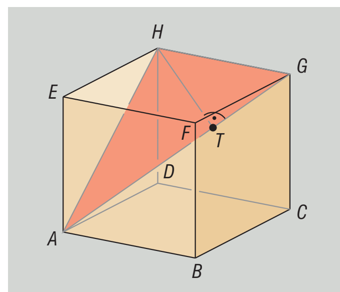
Két egyenes hajlásszöge nem változik, ha közülük az egyiket önmagával párhuzamosan eltoljuk, ezért „fogjuk meg” az S síkon azt a két egyenest, amelyre az e egyenes merőleges, majd toljuk el azokat úgy, hogy átmenjenek az S sík és az e egyenes M metszéspontján. Jelöljük az eltolt egyeneseket a-val és b-vel, ekkor az e egyenes merőleges a-ra és b-re is. Előző megjegyzésünk alapján elegendő megmutatni, hogy az e egyenes merőleges az összes olyan egyenesre, amely az S síkban halad, és átmegy az M ponton. Legyen c egy a-tól és b-től is különböző egyenes (ld. ábra). Megmutatjuk, hogy az e egyenes merőleges a c egyenesre.

Vegyünk fel az S síkban egy tetszőleges, de az M pontot nem tartalmazó egyenest, amely metszi az a, b és c egyenesek mindegyikét. A metszéspontokat jelölje rendre A, B és C. Vegyünk fel továbbá egy P (M-től különböző) pontot az e egyenesen, majd tükrözzük az M pontra, így kapjuk a P' pontot. Ekkor persze $MP = MP'$.

Vizsgáljuk meg a kialakuló ábrát. Az ábrában több egyenlő szárú háromszöget is felfedezhetünk. Mivel e és a merőlegesek egymásra, ezért a $PMA_\triangle$ és $P'MA_\triangle$ egybevágó (két-két oldal + általuk közbezárt szög), amiből adódik, hogy $PA = P'A$, így a $PP'A_\triangle$ valóban egyenlő szárú. Ugyanígy belátható, hogy egyenlő szárú a $PP'B_\triangle$ is.

Az eddigi eredményeinket összefoglalva láthatjuk, hogy $PA = P'A$ és $PB = P'B$. Ebből azonnal következik, hogy az $ABP_\triangle$ egybevágó az $ABP'_\triangle$-gel, hiszen oldalaik hossza páronként megegyezik. Az egybevágóság miatt a megfelelő szögeik is egyenlők, így például $PBC\sphericalangle = P'BC\sphericalangle$. Ebből adódóan újabb háromszögekről láthatjuk be, hogy egybevágóak: a $PBC_\triangle$ és $P'BC_\triangle$ ugyanis két-két oldalban ($PB = P'B$ és BC közös oldal), valamint az általuk bezárt szögükben megegyezik, ezért valóban egybevágóak. Ebből következik, hogy $PC = P'C$, azaz a $PP'C_\triangle$ egyenlő szárú. Mivel M a PP' alap felezőpontja, ezért CM a háromszög egyik magassága, amiből következik, hogy az e egyenes merőleges a c egyenesre. Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

4196 *a)* A kocka GH éle merőleges az $ADHE$ lap síkjára, ezért merőleges annak minden egyenesére, így az $AGH_\triangle$ derékszögű, a derékszögű csúcs a H pontnál van.



A H pont AG testátlótól való távolsága megegyezik az $AGH_\triangle$ AG átfogójához tartozó HT magasságának hosszával (ld. ábra).

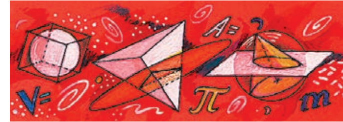
Az $AGH_\triangle$ oldalai:

$$HG = a, \quad AH = a\sqrt{2} \quad \text{és} \quad AG = a\sqrt{3}.$$

A háromszög területét kétféleképpen felírva:

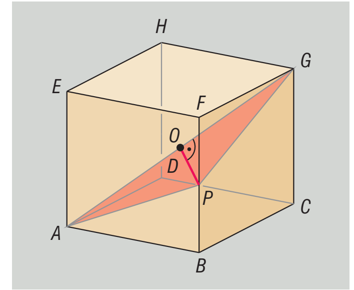
$$\frac{AH \cdot HG}{2} = \frac{AG \cdot HT}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot HT}{2} \quad \Rightarrow \quad HT = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

A H pont az AG testátlótól $a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ egység távolságra van.



b) Az ABP derékszögű háromszögben:

$$AP^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad AP = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$



A $GPF_\triangle$ és az $APB_\triangle$ egybevágó (két-két oldal + általuk bezárt szög), ezért átfogóik ugyanakkorák, így:

$$AP = GP = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

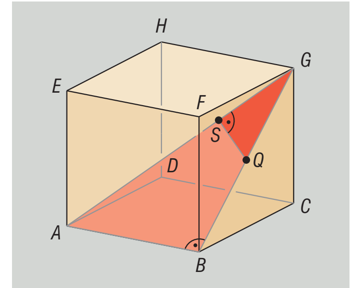
Az $AGP_\triangle$ tehát egyenlő szárú, az alaphoz tartozó magasságát (P és az AG testátló távolságát) az $APO_\triangle$-ből számíthatjuk:

$$OP^2 = AP^2 - AO^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad OP = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

A P pont az AG testátlótól $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ egység távolságra van.

Megjegyzés: Az OP szakasz hossza „ránézésre" is megmondható, hiszen OP párhuzamos a kocka HF lapátlójával, hossza pedig annak éppen fele.

c) A $BCGF$ lap középpontját Q, a Q pont merőleges vetületét az AG testátlón S jelöli az ábrán.



A Q pont AG testátlótól való távolsága megegyezik az SQ szakasz hosszával.

Figyeljük meg az ábra GQS és GAB háromszögeit. Mindkét háromszög derékszögű (a derékszögek S-nél, illetve B-nél vannak), továbbá a G csúcsaiknál lévő szögük közös.

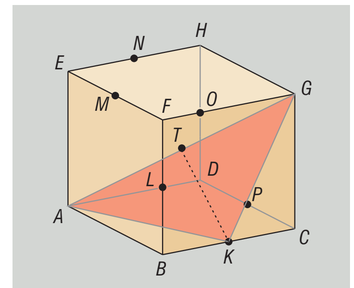
Ebből következik, hogy a két háromszög hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalaik arányára:

$$\frac{SQ}{AB} = \frac{GQ}{AG} \quad \Rightarrow \quad \frac{SQ}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad \Rightarrow \quad SQ = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

A $BCGF$ lap középpontja az AG testátlótól $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ egység távolságra van.

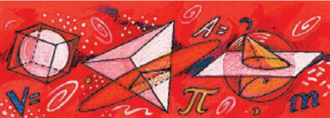
4197 *a)* Tekintsük az ábrán látható AGK háromszöget. A háromszög AK oldalát az AKB derékszögű háromszögből könnyen ki tudjuk számolni:

$$AK^2 = AB^2 + KB^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad AK = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$



Mivel az $AKB_\triangle$ és $GKC_\triangle$ egybevágó, ezért $AK = GK$, így az $AGK_\triangle$ egyenlő szárú. Ebből következik, hogy ha az AG testátló felezőpontja T, akkor a KT szakasz az AGK egyenlő szárú háromszög magassága, és így merőleges az AG alapra. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a KT szakasz hossza megegyezik a K pont AG testátlótól való távolságával.

Könnyen belátható, hogy az L, M, N, O és P pontok mindegyike egy-egy, az $AGK_\triangle$-gel egybevágó háromszöget alkot az AG testátló két végpontjával, amiből következik, hogy a felsorolt pontok mindegyike ugyanakkora távolságra található a kocka AG testátlójától. Ez a távolság éppen a KT szakasz hossza.



b) A KT szakasz hosszát az ATK derékszögű háromszögből így számíthatjuk ki:

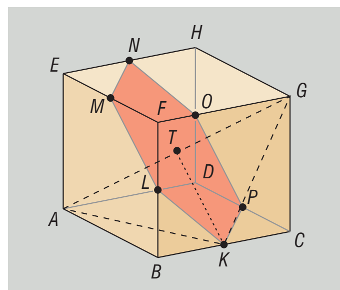
$$KT^2 = AK^2 - AT^2 = \frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{4}a^2 = \frac{1}{2}a^2 \quad \Rightarrow \quad KT = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

A K, L, M, N, O, P pontok mindegyike $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ távolságra van az AG testátlótól.

Megjegyzés: A KT szakasz hosszát az ábra alapján is meghatározhatjuk. Mivel T a kocka középpontja, T a KN szakaszra esik, és azt felezi. KN hossza pedig megegyezik az $ABCD$ lapátlójának hosszával, vagyis $KN = a\sqrt{2}$. Így

$$KT = \frac{KN}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

c) Mivel a $KGT_\triangle$-ben a T csúcsnál derékszög van, ezért a K pont illeszkedik a T pontban az AG testátlóra emelt merőleges síkra. A $KLMNOP$ hatszög összes csúcsa derékszögű háromszöget alkot a T és a G pontokkal, ezért az összes csúcs illeszkedik az említett síkra. Ez persze azt is jelenti, hogy a hatszög csúcsai egy síkban fekszenek. Ez a sík 90º-os szöget zár be a kocka AG testátlójával.

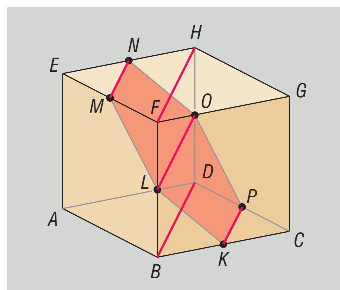


Egy másik bizonyítást is adunk arra vonatkozóan, hogy a $KLMNOP$ hatszög csúcsai egy síkban fekszenek.

Mivel az LO szakasz a $BDHF$ téglalap középvonala, ezért LO párhuzamos a kocka FH, illetve BD lapátlóival.

Az MN szakasz középvonala az $FHE_\triangle$-nek, ezért MN és FH szintén párhuzamos egymással.

Végül: KP a $BDC_\triangle$ középvonala, amiből következik, hogy KP párhuzamos a BD lapátlóval.



Összefoglalva: az LO, MN, KP szakaszok párhuzamosak egymással. Mivel két párhuzamos egyenes (szakasz) mindig egy síkban fekszik, ezért az L, O, M, N pontok, valamint az L, O, K, P pontok egy-egy síkban fekszenek. E két sík azonban megegyezik egymással, mivel a kocka, és így a $KLMNOP$ hatszög is középpontosan szimmetrikus az LO szakasz felezőpontjára, ami csak úgy lehetséges, ha a hat pont valóban egy síkon helyezkedik el.

d) Az *a)* feladatban már kiszámoltuk az AKG háromszög oldalait:

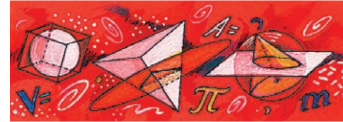
$$AK = KG = a\frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad AG = a\sqrt{3}.$$

A koszinusztétel alapján:

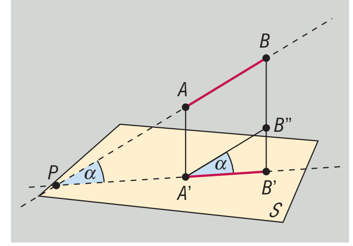
$$3a^2 = \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{4}a^2 - 2\cdot\left(a\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(a\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\cos AKG\sphericalangle,$$

amiből a műveletek elvégzése után:

$$\cos AKG\sphericalangle = -\frac{1}{5}.$$



4198 *a)* Ha $\alpha = 0°$, azaz az AB szakasz párhuzamos az S síkkal, akkor $A'B' = AB$, azaz $\frac{A'B'}{AB} = 1$. Ha $\alpha = 90°$, vagyis az AB szakasz merőleges az S síkra, akkor $A'B' = 0$, azaz $\frac{A'B'}{AB} = 0$.



Más esetekben húzzunk az A' ponton át párhuzamost az AB egyenessel, majd jelöljük B''-vel a BB' egyenessel való metszéspontját. Az $AA'B''B$ négyszög paralelogramma, ezért $A'B'' = AB$.

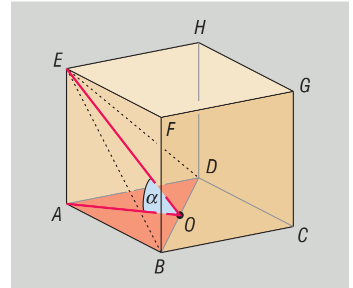
A $B''B'A'$ derékszögű háromszögben:

$$\cos\alpha = \frac{A'B'}{A'B''}, \quad \text{amiből} \quad \frac{A'B'}{AB} = \cos\alpha.$$

A fenti összefüggés azokban az esetekben is érvényes, ha $\alpha = 0°$, vagy $\alpha = 90°$.

b) Az *a)* feladat eredménye alapján az $A'B'$ szakasz hossza akkor minimális, ha $\alpha = 90°$. Az $A'B'$ szakasz hossza akkor maximális, ha $\alpha = 0°$.

4199 *a)* Az $EBD_\triangle$ szabályos, minden oldala a megadott $ABCDEFGH$ kocka lapátlója, azaz $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm.



A háromszög EO magasságának (ld. ábra) hossza:

$$EO = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{6} \approx 12{,}25 \text{ cm}.$$

Az $EBD_\triangle$ területe:

$$T_{EBD} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{6}}{2} = 50\sqrt{3} \approx 86{,}60 \text{ cm}^2.$$

b) Az $EBD_\triangle$-nek az $ABCD$ síkra vonatkozó merőleges vetülete az $ABD_\triangle$.

c) Az ABD egyenlő szárú háromszög T területére:

$$T = \frac{BD \cdot AO}{2}.$$

Az OEA derékszögű háromszögben:

$$\cos\alpha = \frac{AO}{EO},$$

ha ezt behelyettesítjük a területképletbe, azt kapjuk, hogy:

$$T = \frac{BD \cdot EO \cdot \cos\alpha}{2} = \frac{BD \cdot EO}{2} \cdot \cos\alpha.$$

Vegyük észre, hogy az EO szakasz az $EBD_\triangle$ BD oldalához tartozó magassága, ezért az utolsó egyenlőség jobb oldalán szereplő tört éppen az $EBD_\triangle$ területe, tehát

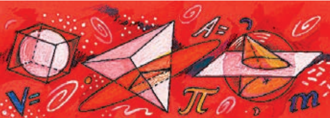
$$T = T_{EBD} \cdot \cos\alpha.$$

d) Az ABD egyenlő szárú derékszögű háromszög területe:

$$T = \frac{AB \cdot AD}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50 \text{ cm}^2.$$

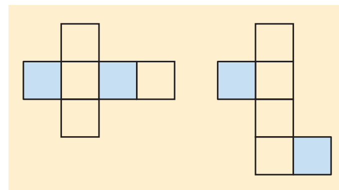
Így felhasználva az *a)* és *c)* feladatok eredményeit:

$$T = T_{EBD} \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad 50 = 50\sqrt{3} \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 54{,}74°.$$



Testek osztályozása, szabályos testek – megoldások

4200 Az alábbi 2 ábra lehet egy kocka síkbeli hálózata. A szemközti lapokat színezéssel jelöltük meg.

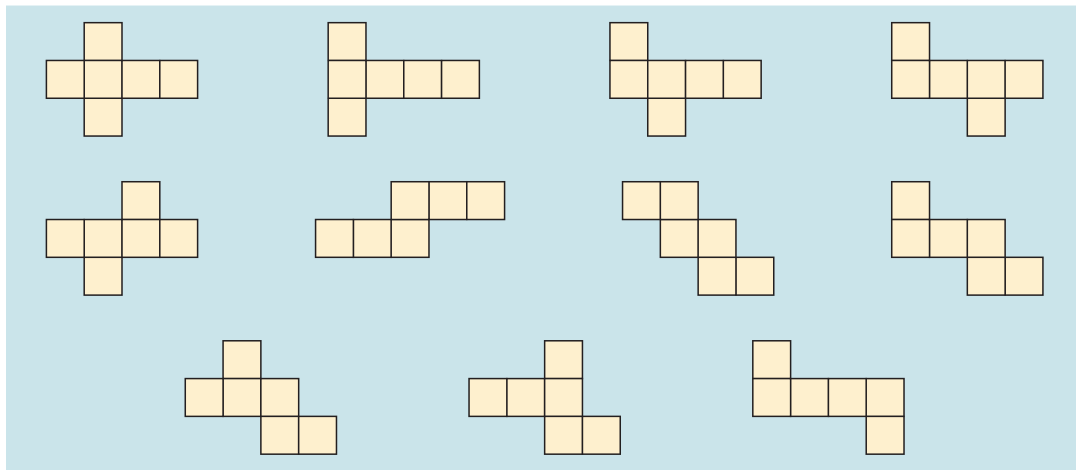


4201 *a)* 24;

b) 24;

c) 8.

4202 Összesen 11 különböző síkbeli hálója van egy kockának.



4203 *a)* Barnabás maximum 21 darab kockát használhatott fel. Az ábra a tornyot felülnézetben mutatja, az egyes négyzetekbe azt írtuk, hogy ott hány kockát helyezett egymásra.

1	1	1	1
1	3	1	2
1	1	1	1
1	2	1	2

Oldalnézet

Elölnézet

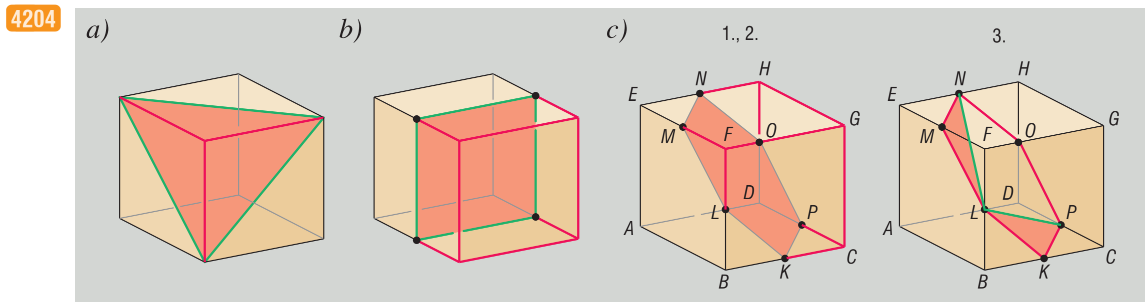
b) Lehetséges, hogy Barnabás a torony megépítéséhez pontosan 10 darab kockát használt fel. Egy ilyen torony felülnézeti képét az ábra mutatja.

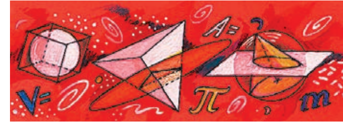
			1
	3		
			1
1	1	1	2

Oldalnézet

Elölnézet

4204





a) Szabályos háromszögben lehet a kockát metszeni, amint azt az előző ábra mutatja.

b) A kocka metszhető négyzetben.

c) A kockát lehet szabályos hatszögben metszeni.

Ennek igazolásához tekintsük az ábra szerinti 6 él felezőpontját, azaz a *K*, *L*, *M*, *N*, *O* és *P* pontokat. Megmutatjuk, hogy a felsorolt pontokat tartalmazó sík szabályos hatszögben metszi a kockát. Ehhez a következőket kell igazolnunk:

1. A hat pont egy síkon fekszik. Ezt közvetlenül igazoltuk a 4197. feladatban.
2. A *KLMNOP* hatszög minden oldala egyenlő. Ez könnyen belátható, hiszen ha a kocka élét *a* jelöli, akkor a *KLMNOP* hatszög minden oldala átfogója egy-egy olyan egyenlő szárú derékszögű háromszögnek, amelynek befogói $\frac{a}{2}$ hosszúságúk. Például a *KL* szakasz a *KLB*, az *LM* szakasz az *LMF* derékszögű háromszög átfogója. Ebből következik, hogy a *KLMNOP* hatszög minden oldala $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ hosszúságú.
3. A *KLMNOP* hatszög minden szöge egyenlő. Megmutatjuk, hogy például a *K* és *M* csúcsoknál található szögek ugyanakkorák. Ehhez tekintsük az *LPK* és *LNM* háromszögeket. Mindkét háromszög egyenlő szárú, száraik egyenlő hosszúak, továbbá $LP = LN$, hiszen mindkét szakasz a kocka két kitérő helyzetű élének felezőpontját köti össze (ld. 4187. feladat). Ebből adódik, hogy a két háromszög egybevágó, ezért megfelelő szögeik is megegyeznek, így a *KLMNOP* hatszögben a *K* és *M* csúcsoknál ugyanakkora szögek vannak.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a *KLMNOP* hatszög szabályos.

Megjegyzés: A 4235. feladatban egy másik módszert is találhatunk annak igazolására, hogy a hatszög szögei egyenlők.

d) A kocka szabályos nyolcszögben nem metszhető, mert csak 6 lapja van, így síkmetszeteinek legfeljebb 6 oldala lehet.

4205 22,5 cm.

4206 $6\sqrt{3} \approx 10,4$ cm.

4207 $\frac{12\sqrt{2}}{2} \approx 8,49$ cm.

4208 *a)* A levágott testet egy szabályos háromszög és 3 egyenlő szárú derékszögű háromszög határolja.

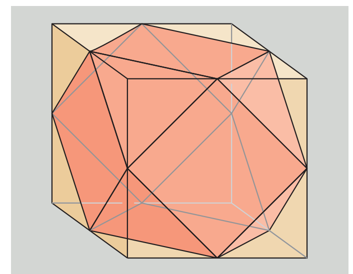
b) A levágott test egy szabályos háromoldalú gúla (tetraéder).

c) A visszamaradó testnek 7 lapja, 10 csúcsa és 15 éle van.

d) Mivel $10 + 7 = 15 + 2$, vagyis a csúcsok és lapok számának összege 2-vel nagyobb az élek számánál, ezért az Euler-féle poliédertétel teljesül a visszamaradó testre.

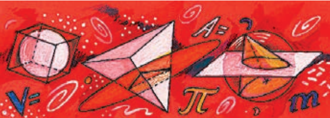
e) A testet 3 négyzet, egy szabályos háromszög, valamint 3 egybevágó ötszög határolja.

4209 *a)* A visszamaradó test az ábrán látható. A testet 6 négyzet, valamint 8 szabályos háromszög határolja.

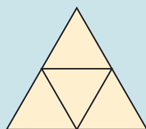
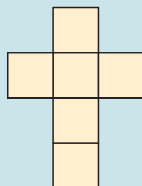
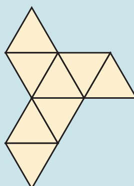
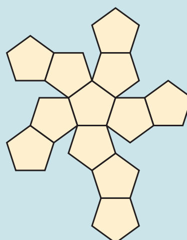
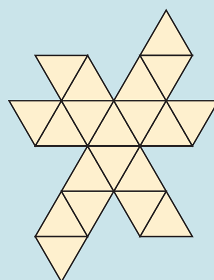


b) A testnek 14 lapja, 12 csúcsa, valamint 24 éle van.

c) Mivel $12 + 14 = 24 + 2$, vagyis a csúcsok és lapok számának összege 2-vel nagyobb az élek számánál, ezért az Euler-féle poliédertétel teljesül a visszamaradó testre.



4210

Szabályos tetraéder	Kocka	Oktaéder	Dodekaéder	Ikozaéder
				

4211

Test neve	Lapok száma	Csúcsok száma	Élek száma
Kocka	6	8	12
Szabályos tetraéder	4	4	6
Oktaéder	8	6	12
Háromszög alapú hasáb	5	6	9
Háromszög alapú gúla	4	4	6
Négyzet alapú hasáb	6	8	12
Négyzet alapú gúla	5	5	8
Ötszög alapú hasáb	7	10	15
Ötszög alapú gúla	6	6	10
Tizenkétszög alapú hasáb	14	24	36
Tizenkétszög alapú gúla	13	13	24

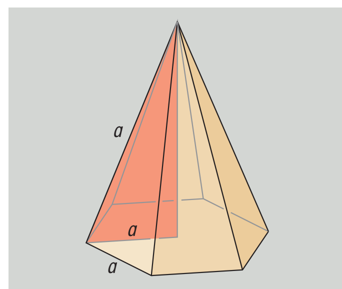
A csúcsok és lapok számának összege minden esetben 2-vel nagyobb az élek számánál.

4212 A hasábnak 6 oldallapja van.

4213 A gúlának 12 oldallapja van.

4214 *a)* $(n-1)\cdot 720°$; *b)* $(n-1)\cdot 360°$.

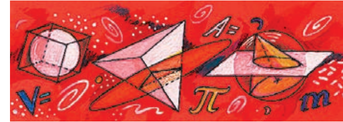
4215 Ha a szabályos hatoldalú gúla oldallapjai szabályos háromszögek lennének, akkor az ábrán a-val jelölt szakaszok hossza megegyezne. Ekkor a narancsszínnel jelölt derékszögű háromszög átfogója ugyanakkora lenne, mint az egyik befogója, ami lehetetlen. Ebből következik, hogy a szabályos hatoldalú gúla oldallapjai nem lehetnek szabályos háromszögek.



4216 *a)* 73,74°; *b)* 73,74°;
c) 118,07°; *d)* 60°.

4217 Az alkotó és az alaplap síkja által bezárt szöget α, a kúp nyílásszögét φ jelöli.
a) $\alpha \approx 67{,}38°$, $\varphi \approx 45{,}24°$; *b)* $\alpha \approx 67{,}38°$, $\varphi \approx 45{,}24°$; *c)* $\alpha \approx 53{,}13°$, $\varphi \approx 73{,}74°$.

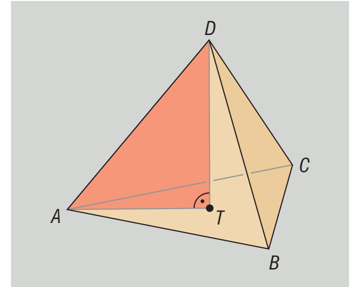
4218 60°.



4219 *a)* 54,74°; *b)* 75,04°.

4220 63,43°.

4221 Az $ABCD$ szabályos tetraéder D csúcsából induló magasságának talppontját T-vel jelöltük. Mivel a T pont egyben az $ABC_\triangle$ súlypontja is, ezért az AT szakasz az $ABC_\triangle$ súlyvonalának $\frac{2}{3}$-szorosa. A szabályos háromszög súlypontja és magasságpontja egybeesik, ezért az ABC szabályos háromszög súlyvonalának hossza megegyezik a magasságának hosszával, így:



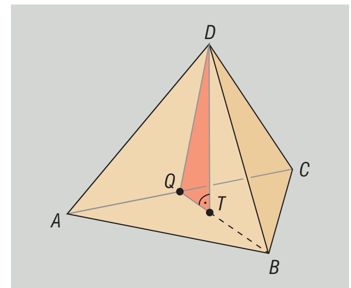
$$AT = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Az $ADT_\triangle$ derékszögű, hiszen DT merőleges az ABC alaplap síkjára, így merőleges annak minden egyenesére is. Pitagorasz tételéből következik, hogy:

$$DT^2 = AD^2 - AT^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2a^2}{3} \quad \Rightarrow \quad DT = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Az a élű szabályos tetraéder csúcsa a szemközti laptól $a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ távolságra van.

4222 Az $ABCD$ szabályos tetraéder ABC és ACD lapjainak hajlásszögét a két lap közös egyenesére (AC) a síkokon belül emelt merőlegesek hajlásszögeként számolhatjuk. Mivel az ABC és ACD háromszögek szabályosak, ezért az AC oldalhoz tartozó magasságaik az AC szakasz Q felezőpontjában metszik egymást. Ebből következik, hogy a két lap hajlásszöge megegyezik a $DQB\sphericalangle$-gel (ld. ábra).



Ha az $ABCD$ tetraéder éleinek hossza a, és a $DQB_\triangle$ D-ből induló magasságvonalának talppontja T, akkor a 4221. feladat eredménye alapján:

$$DT = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

A DQT derékszögű háromszögben:

$$\sin(DQB\sphericalangle) = \frac{DT}{DQ} = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{DQ}.$$

A DQ szakasz a magasság az ACD szabályos háromszögben, ezért:

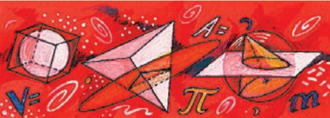
$$DQ = a\frac{\sqrt{3}}{2},$$

amiből következik, hogy:

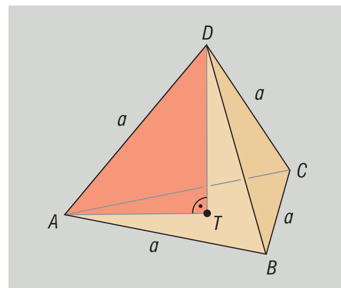
$$\sin(DQB\sphericalangle) = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$DQB\sphericalangle \approx 70{,}53°.$$

A szabályos tetraéder két szomszédos lapja 70,53°-os szöget zár be egymással.



4223 Ha az $ABCD$ szabályos tetraéder éleinek hossza a, és a D csúcsából induló magasságának talppontja T, akkor az AD él és az ABC alaplap által bezárt szög megegyezik a $DAT\sphericalangle$-gel.



A 4221. feladat eredménye alapján:

$$DT = a\sqrt{\frac{2}{3}},$$

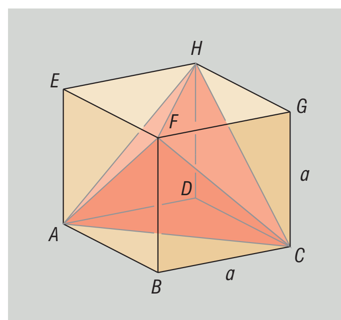
így az ADT derékszögű háromszögben:

$$\sin(DAT\sphericalangle) = \frac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{a} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad DAT\sphericalangle \approx 54{,}74^\circ.$$

A szabályos tetraéder éle az élt nem tartalmazó lapjával $54{,}74^\circ$-os szöget zár be.

4224 Az $ABCDEFGH$ kocka két kitérő helyzetű lapátlójának végpontjai egy szabályos tetraéder csúcsai. Példaként tekintsük az A, C, H és F pontokat, és húzzuk meg az ábrán is látható lapátlókat. A kialakuló $ACFH$ tetraéder minden éle a kockának egy-egy lapátlója, ezért a tetraédert négy szabályos háromszög határolja. Ebből következik, hogy az $ACFH$ tetraéder szabályos.

Ha a kocka éle a, akkor a keletkező szabályos tetraéder éleinek hossza: $a\sqrt{2}$.



4225 A 4224. feladatban megmutattuk, hogy a szabályos tetraéder kockába foglalható (ld. 4224. feladat ábrája). Azt is beláttuk, hogy a szabályos tetraéder éle a tartalmazó kocka élének $\sqrt{2}$-szöröse, ezért ha a kocka éle x, akkor $x\sqrt{2} = a$, amiből:

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

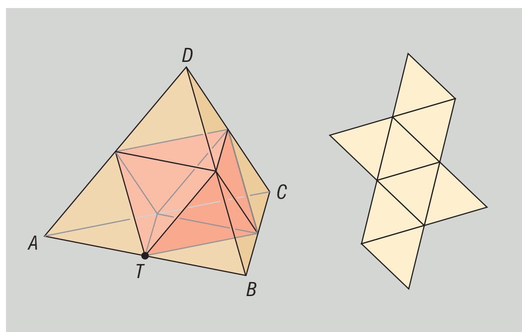
Az a élű szabályos tetraédert tartalmazó kocka éle tehát $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

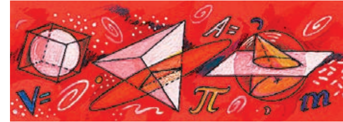
A 4224. feladat ábráján szereplő szabályos tetraéder AC és FH éle kitérő helyzetűek, távolságuk éppen a kocka élének hosszával egyenlő, azaz $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. A tartalmazó kocka AC és FH lapátlója merőleges egymásra, ezért a szabályos tetraéder kitérő helyzetű élei is merőlegesek egymásra.

4226 *a)* A tetraéder „csonkolása” után az ábrán látható testet kapjuk. A másik ábra a test síkbeli hálóját mutatja.

b) A visszamaradó testnek 8 lapja, 6 csúcsa és 12 éle van. Megjegyezzük, hogy egy szabályos oktaéder marad vissza a tetraéderből.

c) Mivel $8 + 6 = 12 + 2$, ezért a lapok és csúcsok számának összege 2-vel nagyobb az élek számánál, így az Euler-féle poliédertétel teljesül a testre.

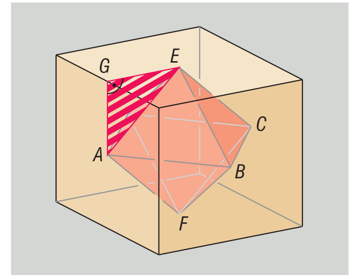




4227 *a)* A keletkező *FABCDE* test minden éle ugyanakkora hosszúságú, hiszen bármely éle a kocka két szomszédos lapjának középpontját köti össze (ld. ábra). Ha az *A* és *E* pontokat tartalmazó lapok közös élének felezőpontja *G*, akkor az *AEG* derékszögű háromszögben:

$$AE^2 = AG^2 + EG^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow AE = 10\sqrt{2} \approx 14{,}14 \text{ cm}.$$

Az *FABCDE* test minden éle 14,14 cm hosszúságú.

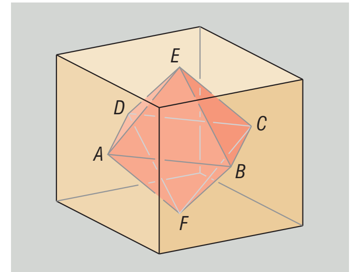


b) A testnek 8 lapja, 6 csúcsa és 12 éle van.

c) Az *FABCDE* testet szabályos háromszögek határolják. A keletkező test egy szabályos oktaéder.

4228 Az ábrán látható *FABCDE* szabályos oktaéderben példaként megvizsgáljuk, hogy az *AB* él a többi éllel mekkora szöget zár be. A szabályos oktaéder lapjai szabályos háromszögek, így az *AB* él a következő szakaszokkal 60°-os szöget zár be: *AF*, *BF*, *AE*, *BE*.

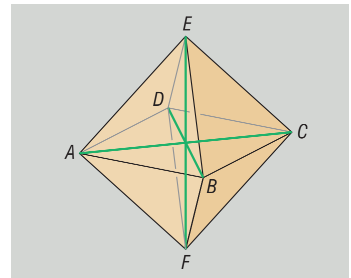
A 4227. feladatban láttuk, hogy a szabályos oktaéder csúcsai egy kocka lapjainak középpontjai (ld. ábra). Ebből adódóan az *ABCD* négyszög négyzet, ezért az *AB* él a *DC* éllel párhuzamos (így azzal 0°-os szöget zár be), továbbá a következő élekre merőleges (így azokkal 90°-os szöget zár be): *AD*, *BC*.



A hiányzó 4 él (*DF*, *CF*, *DE*, *CE*) mindegyike kitérő helyzetű az *AB* éllel. Kitérő egyenesek (szakaszok) hajlásszöge alatt a tér egy tetszőleges pontján átmenő, velük párhuzamos, metsző helyzetű egyenesek hajlásszögét értjük. Vegyük észre, hogy a *DC* él párhuzamos az *AB* éllel, ezért az *AB* és *DE* élek hajlásszöge megegyezik a *DC* és *DE* élek hajlásszögével, ami 60°. Ugyanígy belátható, hogy *AB* a másik 3 hiányzó éllel is 60°-os szöget zár be.

A szabályos oktaéder két éle tehát a következő szögek valamelyikét zárja be egymással: 0°, 60° és 90°.

4229 A szabályos oktaédernek 3 testátlója van, amelyeket az ábrán zölddel jelöltünk meg. Mindegyik testátló egy-egy 10 cm oldalú négyzetnek az átlója (pl. az *AC* testátló az *ABCD* négyzet átlója), ezért hosszuk $10\sqrt{2} \approx 14{,}14$ cm. Bármely két testátlót is választjuk ki, azok biztosan egy négyzet átlói (pl. az *AC* és *BD* testátlók az *ABCD* négyzet átlói), ezért a szabályos oktaéder bármely két testátlója merőleges egymásra.



4230 *a)* Az ábrán látható derékszögű háromszögben:

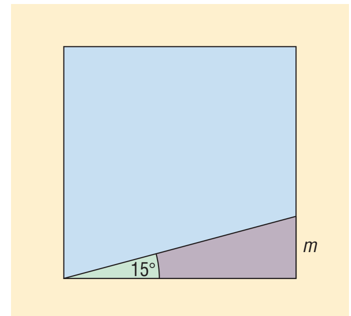
$$\text{tg}15° = \frac{m}{5}, \quad \text{amiből} \quad m \approx 1{,}34 \text{ cm}.$$

Az ék „magassága” körülbelül 1,34 cm.

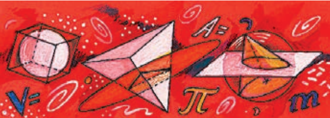
b) A kockát egy téglalapban metszettük el, melynek egyik (az ábrán látható négyzet síkjára merőleges) oldala 5 cm, a másik oldala pedig:

$$\frac{5}{\cos 15°} \approx 5{,}18 \text{ cm}.$$

A kocka síkmetszetének területe megközelítőleg 25,90 cm^2.



c) A kockából egy derékszögű háromszög, illetve egy derékszögű trapéz alapú egyenes hasáb keletkezik. Az ábra a két test alaplapját mutatja.



4231 *a)* Ági a dobótetraéderrel 4, a dobóoktaéderrel 8, a dobódodekaéderrel 12, a dobóikozaéderrel pedig 20 különböző számot dobhat. A 4 testtel összesen $4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 20 = 7680$-féle dobás végezhető.

A prímszámok 1-től 20-ig: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Ahhoz, hogy mindegyik testtel prímszámot dobjunk, a tetraéderrel 2, az oktaéderrel 4, a dodekaéderrel 5, míg az ikozaéderrel 8 számot dobhatunk. Ezért a prímszámok dobása szempontjából kedvező esetek száma $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 = 320$, annak a valószínűsége pedig, hogy mindegyik testtel prímszámot dobunk:

$$\frac{320}{7680} \approx 0{,}0417.$$

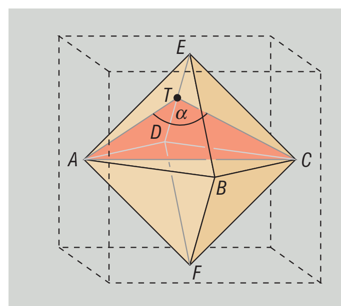
b) Mivel $4 + 8 + 12 + 20 = 44$, ezért a dobott pontok összege az alábbi esetekben lehet legalább 42.

1. A pontok összege 44. Ez csak úgy lehetséges, ha Ági mindegyik testtel a lehető legnagyobb számot dobja. A pontok összege 1 esetben lehet 44.
2. A dobott pontok összege 43. Ekkor Áginak egy kivételével mindegyik testtel a lehető legnagyobb számot kell dobnia, a maradék testtel pedig a legnagyobb számnál 1-gyel kisebbet. Attól függően, hogy melyik testtel nem dob maximális értéket, ez az eset 4-féleképpen következhet be.
3. A dobott pontok összege 42. Ekkor vagy két testtel dob 1-gyel kisebbet, mint a maximális érték, vagy egy testtel dob 2-vel kisebbet a maximumnál, míg a többi testtel a legnagyobb értéket kell dobnia. Az első változat $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen, a második pedig 4-féleképpen következhet be.

A kedvező esetek száma tehát: $1 + 4 + 10 = 15$, annak a valószínűsége pedig, hogy legalább 42 a dobott pontok összege:

$$\frac{15}{7680} \approx 0{,}00195.$$

4232 Az *FABCDE* szabályos oktaéder *ADE* és *CDE* lapjainak hajlásszögét fogjuk kiszámolni. A térben való jobb tájékozódás érdekében az ábrán megjelenítettük azt a kockát is, amelynek középpontjai az oktaéder csúcspontjai. A két lap hajlásszöge megegyezik az *ADE*, valamint a *CDE* szabályos háromszögek *AT*, illetve *CT* magasságainak hajlásszögével. A keresett szöget például az *ACT* egyenlő szárú háromszög oldalaiból számolhatjuk ki.



Ha az oktaéder minden éle a hosszúságú, akkor az *AT*, illetve *CT* magasság: $AT = CT = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (egy-egy a oldalú szabályos háromszög magasságai), míg $AC = a\sqrt{2}$ (az a oldalú *ABCD* négyzet átlója). Ha a két szomszédos lap hajlásszögét α-val jelöljük, akkor az $ACT_{\triangle}$-ben a koszinusztétel alapján:

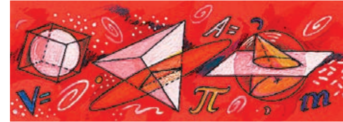
$$AC^2 = AT^2 + CT^2 - 2 \cdot AT \cdot CT \cdot \cos\alpha,$$

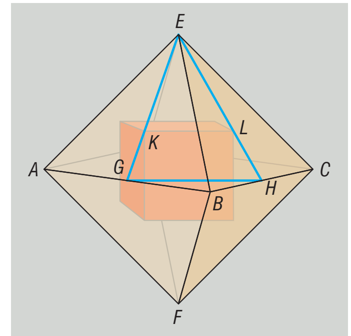
$$2a^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\alpha.$$

Rendezés után:

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}, \qquad \text{amiből} \qquad \alpha \approx 109{,}47°.$$

A szabályos oktaéder két szomszédos lapja $109{,}47°$-os szöget zár be egymással.





4233 *a)* Az *FABCDE* szabályos oktaédert, valamint a lapjait „érintő” beírt kockát az ábra mutatja (a *D* pont takarás miatt nem látható). A szobor magassága megegyezik az *FE* szakasz hosszával. Mivel *FE* az *AFCE* négyzet átlója, a négyzet oldala pedig 1 méter, ezért a szobor magassága:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41 \text{ m}.$$

b) Feladatunk a szabályos oktaéderbe írt kocka *KL* élének kiszámítása. A feltételek alapján *K* és *L* az *ABE*, illetve a *BCE* szabályos háromszögek középpontja. Az ábrán *G*-vel jelöltük az *AB*, *H*-val pedig a *BC* szakasz felezőpontját.

Vizsgáljuk meg a $GHE_\triangle$-et. Mivel *GE* és *HE* magasság egy-egy 1 m oldalú szabályos háromszögben, ezért:

$$GE = HE = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (m)}.$$

Ebből következik, hogy a $GHE_\triangle$ egyenlő szárú. A háromszög *GH* alapja középvonal a szintén egyenlő szárú $ACB_\triangle$-ben, ezért:

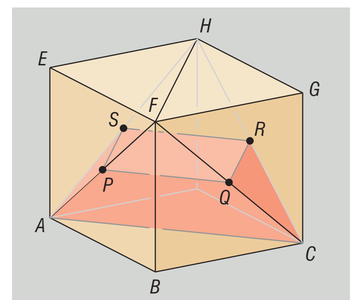
$$GH = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (m)},$$

hiszen *AC* pedig egy 1 m oldalú négyzet átlója (természetesen az *ABCD* négyzetről van szó).

Végül vegyük alaposan szemügyre a $KLE_\triangle$-et. Mivel *K* az $ABE_\triangle$, *L* pedig a $BCE_\triangle$ súlypontja, ezért e pontok 2 : 1 arányban osztják a megfelelő háromszögek *EG*, illetve *EH* súlyvonalait. Ebből azonban az is következik, hogy a $GHE_\triangle$-et az *E* középpontú $\frac{2}{3}$ arányú középpontos hasonlóság éppen a $KLE_\triangle$ viszi át. Az említett középpontos hasonlóság a *GH* szakaszt a *KL* szakaszba viszi, ezért:

$$KL = \frac{2}{3} \cdot GH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ (m)}.$$

Az oktaéder belsejében elhelyezett kocka éleinek hossza körülbelül 0,47 m.



4234 A jobb térbeli tájékozódás érdekében az *ACHF* szabályos tetraédert belefoglaltuk az *ABCDEFGH* kockába az ábrán látható módon (a *D* pont takarás miatt nem látszik). A tetraéder *AF*, *CF*, *CH* és *AH* éleinek felezőpontja rendre *P*, *Q*, *R* és *S*. Megmutatjuk, hogy a *PQRS* négyszög rombusz, azaz a szabályos tetraéder metszhető rombuszban.

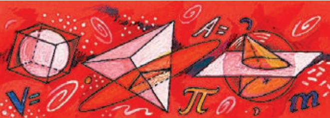
Mivel a *PQ* szakasz középvonal az $ACF_\triangle$-ben, ezért:

$$PQ = \frac{AC}{2}, \qquad (1)$$

továbbá *PQ* párhuzamos *AC*-vel. Hasonló megfontolással láthatjuk, hogy *SR* középvonal az $ACH_\triangle$-ben, amiből következik, hogy:

$$SR = \frac{AC}{2}, \qquad (2)$$

továbbá *SR* is párhuzamos *AC*-vel. Összefoglalva: *PQ* és *SR* ugyanazzal a szakasszal párhuzamos, amiből következik, hogy *PQ* és *SR* egymással is párhuzamos. Másrészt *PQ* = *SR*, így végül az is következik, hogy a *PQRS* négyszög paralelogramma.



Ugyanígy belátható, hogy QR középvonal az $FHC_\triangle$-ben, amiből következik, hogy:

$$QR = \frac{FH}{2}, \qquad (3)$$

illetve PS középvonal az $FHA_\triangle$-ben, amiből pedig:

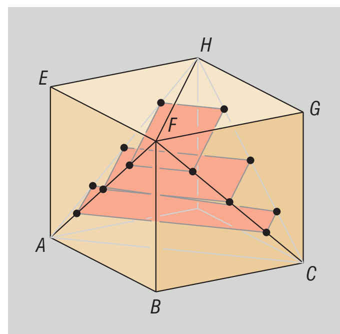
$$PS = \frac{FH}{2}. \qquad (4)$$

Az (1), (2), (3) és (4) egyenlőségek alaposabb vizsgálata után megállapíthatjuk, hogy a $PQRS$ négyszög minden oldala az $ABCDEFGH$ kocka valamelyik lapátlójának a felével egyenlő hosszúságú.

Mivel a kockának minden lapátlója ugyanakkora, ezért ugyanez érvényes a $PQRS$ négyszög oldalaira is. Ebből már következik, hogy a $PQRS$ paralelogramma valóban rombusz.

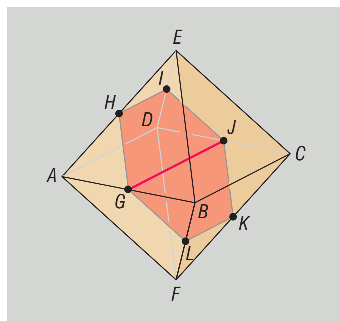
Megjegyzés: A $PQRS$ sík párhuzamos az $ABCDEFGH$ kocka $ABCD$, illetve $EFGH$ lapjaival, továbbá a tetraéder FH és AC éleivel.

Az alábbi ábra azt mutatja, hogy a szabályos tetraéder egyik élével párhuzamos síkok mind paralelogrammában metszik a tetraédert (amennyiben metszik).

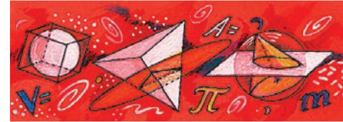


4235 Megmutatjuk, hogy a szabályos oktaédert lehet szabályos hatszögben metszeni.

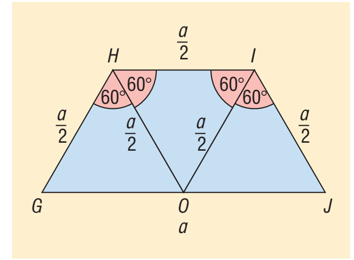
Jelöljük az $FABCDE$ szabályos oktaéder AB, AE, DE, DC, CF és BF éleinek felezőpontját az ábra szerint a G, H, I, J, K, L pontokkal. A $GHIJKL$ hatszög szabályos. Ennek igazolásához az alábbiakat kell végiggondolnunk.



1. A hat pont egy síkban fekszik. A HI szakasz középvonal az ADE háromszögben, ezért HI és AD párhuzamos egymással. A GJ szakasz középvonal az $ABCD$ négyzetben, ezért GJ szintén párhuzamos AD-vel. Ez azt is jelenti, hogy GJ és HI egyaránt párhuzamos az oktaéder AD élével, amiből következik, hogy HI és GJ párhuzamos egymással. Hasonlóan mutatható meg, hogy GJ és LK szintén párhuzamos egymással. Ekkor azonban a GJ és a HI, valamint a GJ és az LK szakaszok párhuzamosak egymással, ezért végpontjaik, azaz a G, J, H, I, valamint a G, J, L, K pontok egy-egy síkra illeszkednek. E két sík azonban egybeesik egymással, hiszen a szabályos oktaéder, és így a $GHIJKL$ hatszög is középpontosan szimmetrikus a GJ szakasz felezőpontjával, ami csak úgy lehetséges, ha a $GHIJKL$ hatszög csúcsai egy síkban fekszenek.
2. A $GHIJKL$ hatszög oldalai egyenlők. Vegyük észre, hogy a hatszög minden oldala középvonal a szabályos oktaéder egy-egy lapján: például IH középvonal az ADE háromszögben, GH középvonal a BEA háromszögben és így tovább. Ebből adódik, hogy a hatszög minden oldala feleakkora, mint az $FABCDE$ szabályos oktaéder éle, így a hatszög minden oldala egyenlő hosszúságú.



3. A $GHIJKL$ hatszög minden szöge 120º-os. Példaként megmutatjuk ezt a hatszög H és I csúcsainál lévő szögekről. Ha a szabályos oktaéder éleinek hossza a, akkor a $GJIH$ trapéz oldalainak hossza (ld. ábra):

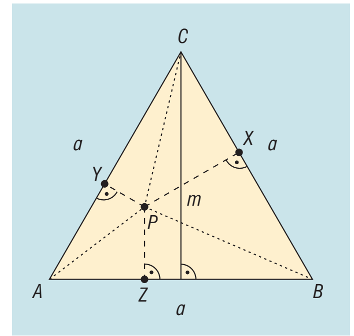


$$HI = IJ = GH = \frac{a}{2}, \qquad \text{illetve} \qquad GJ = a.$$

Ha a trapéz rövidebb alapjának végpontjait (H és I) összekötjük a hosszabb alap felezőpontjával (az ábrán az O pont), akkor ezzel a trapézt három szabályos háromszögre bonthatjuk fel, amiből következik, hogy a H és I csúcsoknál valóban 120º-os szögek vannak.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $GHIJKL$ sík a szabályos oktaédert valóban szabályos hatszögben metszi.

4236 *a)* Kössük össze a P pontot az ABC szabályos háromszög csúcsaival, ezzel a háromszöget három kisebb háromszögre, a BCP, CAP, illetve ABP háromszögekre bontottuk. A három keletkező háromszögnek egy-egy oldala éppen a hosszúságú. Vegyük észre még, hogy a PX, PY, PZ szakaszok mindegyike az a hosszúságú oldalhoz tartozó magasság az egyes háromszögekben. Ezek alapján az ABC háromszög területe:



$$T_{ABC} = T_{BCP} + T_{CAP} + T_{ABP},$$

$$T_{ABC} = \frac{a \cdot PX}{2} + \frac{a \cdot PY}{2} + \frac{a \cdot PZ}{2},$$

$$\frac{a \cdot m}{2} = \frac{a}{2} \cdot (PX + PY + PZ),$$

ahol m az ABC háromszög magasságának hosszát jelöli. Egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy:

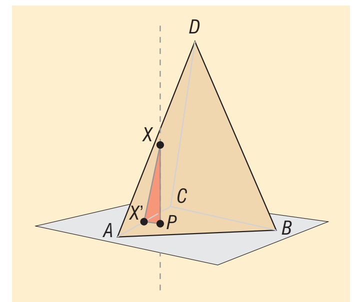
$$PX + PY + PZ = m.$$

Mivel a jobb oldal nem függ a P pont kiválasztásától, ezért bebizonyítottuk, hogy a PX, PY, PZ szakaszok hosszának összege (a P pont helyzetétől függetlenül) az ABC háromszög magasságával egyenlő.

Megjegyzés: A $PX + PY + PZ$ összeget a szabályos háromszög oldalával is kifejezhetjük. Ha a háromszög oldalainak hossza a, akkor:

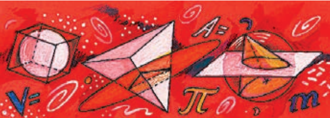
$$PX + PY + PZ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b) Az ábra jelöléseinek megfelelően válasszuk ki az $ABCD$ szabályos tetraéder ABC alaplapjának belsejében a P pontot. Tegyük fel, hogy a P pontban az ABC síkra emelt merőleges egyenes az ACD lap síkját az X pontban metszi. Jelöljük X'-vel az X pontnak az ACD szabályos háromszög AC oldalára eső merőleges vetületét (ld. ábra).



Ha a szabályos tetraéder két szomszédos lapjának hajlásszögét α-val jelöljük, akkor az $XX'P$ derékszögű háromszögben $XX'P\sphericalangle = \alpha$ teljesül. Az $XX'P$ derékszögű háromszögben így:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PX}{PX'}, \qquad \text{amiből} \qquad PX = PX' \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$



Előző gondolatmenetünkben nem volt lényeges szerepe annak, hogy az X pont az ACD lap síkjára illeszkedik. Ezért hasonló megfontolások után azt kapjuk, hogy ha a P pontban az ABC lap síkjára emelt merőleges egyenes a CBD, illetve ABD síkokkal való metszéspontja Y és Z, továbbá Y' és Z' e két pont merőleges vetülete az ABC háromszög megfelelő oldalára, akkor:

$$PY = PY' \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad \text{és} \quad PZ = PZ' \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Ebből következik, hogy:

$$PX + PY + PZ = \operatorname{tg}\alpha \cdot (PX' + PY' + PZ').$$

Mivel a P pont az ABC szabályos háromszög belsejében fekszik, továbbá a PX', PY' és a PZ' szakaszok merőlegesek a háromszög egy-egy oldalára, ezért az *a)* feladat eredményét felhasználva:

$$PX' + PY' + PZ' = m,$$

ahol m az ABC háromszög magassága. Összefoglalva:

$$PX + PY + PZ = m \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

így az összeg valóban független a P pont helyzetétől.

Megjegyzés: A $PX + PY + PZ$ összeget a szabályos tetraéder élével is kifejezhetjük. Ha a tetraéder minden élének hossza a, akkor az ABC háromszög magassága:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

A szabályos tetraéder két szomszédos lapjának α hajlásszögére:

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$$

(ez egyszerűen következik a 4222. feladat eredményeiből).

Ebből következően:

$$PX + PY + PZ = a\sqrt{6}.$$

A terület fogalma, a sokszögek területe – megoldások

4237 *a)* $2200\ \text{cm}^2$; *b)* $2025\ \text{cm}^2$; *c)* $1450\ \text{cm}^2$; *d)* $6800\ \text{cm}^2$.

4238 *a)* $54\ \text{cm}^2$; *b)* $6{,}16\ \text{cm}^2$; *c)* $39{,}92\ \text{cm}^2$; *d)* $630\ \text{cm}^2$.

e) A beírt kör oldalakkal való érintési pontját rendre E, F, illetve G jelöli (ld. ábra). Mivel a kör egy külső pontjából a körhöz ugyanakkora érintőszakaszok húzhatók, ezért:

$$BE = BF = x, \quad CF = CG = 13 - x, \quad AE = AG = 2.$$

Az ABC derékszögű háromszög befogóira teljesül:

$$AB = x + 2, \quad AC = 15 - x,$$

ezért Pitagorasz tétele alapján:

$$(x + 2)^2 + (15 - x)^2 = 13^2.$$

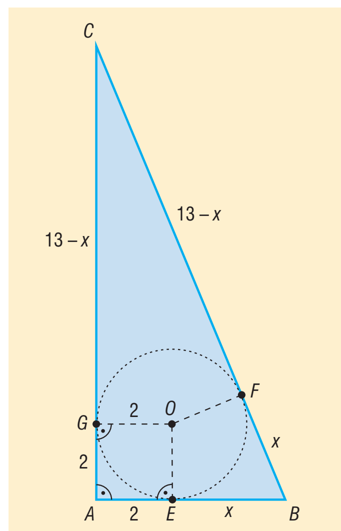
A műveletek elvégzése után:

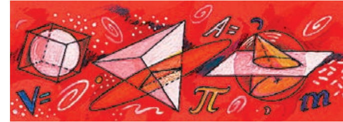
$$2x^2 - 26x + 60 = 0,$$

$$x^2 - 13x + 30 = 0.$$

A kapott egyenlet megoldásai: $x_1 = 3$ és $x_2 = 10$. A háromszög befogói: $AB = 5$ cm és $AC = 12$ cm (vagy fordítva).

A háromszög területe: $30\ \text{cm}^2$.





4239 8 cm.

4240 *a)* 4 cm; *b)* 2,8 cm.

4241 A téglalap területe nagyobb. Ha a paralelogramma két szomszédos oldala a és b, az általuk bezárt szög α, akkor területe $T = a \cdot b \cdot \sin\alpha$. Rögzített oldalak mellett a terület akkor maximális, ha $\alpha = 90°$.

4242 *a)* A terület $21\ \text{cm}^2$. A paralelogramma magasságainak hossza 3 cm, illetve 7 cm.
b) $T = 4{,}44\ \text{cm}^2$. A magasságok: 1,85 cm és 1,2 cm.
c) $T \approx 176{,}67\ \text{cm}^2$. A magasságok hossza: 14,72 cm és 10,39 cm.
d) $T \approx 38{,}07\ \text{cm}^2$. A magasságok hossza: 4,59 cm és 6,80 cm.

4243 *a)* $T = 10{,}5\ \text{cm}^2$. A paralelogramma minden oldala 3,81 cm hosszú. A magasságok hossza: 2,76 cm.
b) $T \approx 3{,}09\ \text{cm}^2$. Az oldalak hossza: 1,24 cm és 2,78 cm. A magasságok hossza: 2,49 cm és 1,11 cm.
c) $T \approx 18{,}13\ \text{cm}^2$. Az oldalak hossza: 3,71 cm és 5,54 cm. A magasságok hossza: 4,89 cm és 3,27 cm.

4244 *a)* 90°; *b)* 30°; *c)* 31,86°; *d)* 60,81°.

4245 $6\sqrt{3} \approx 10{,}39\ \text{cm}^2$.

4246 A trapéz területe: $36\ \text{cm}^2$.

4247 A trapéz területe: $35\ \text{cm}^2$.

4248 *a)* A szabályos hatszög területe: $216\sqrt{3} \approx 374{,}1\ \text{cm}^2$.

b) A szabályos nyolcszög területe: $8 \cdot \dfrac{12 \cdot \dfrac{6}{\operatorname{tg} 22{,}5°}}{2} \approx 695{,}3\ \text{cm}^2$.

c) A szabályos tízszög területe: $10 \cdot \dfrac{12 \cdot \dfrac{6}{\operatorname{tg} 18°}}{2} \approx 1108{,}0\ \text{cm}^2$.

4249 Az ötszög területe körülbelül $65{,}71\ \text{cm}^2$.

4250 *a)* A hétszög területe körülbelül $30{,}34\ \text{cm}^2$.
b) A hétszög területe $24{,}63\ \text{cm}^2$.

4251 A két síkidom területének aránya: $\dfrac{3}{\operatorname{tg} 15°} \approx 11{,}20$.

4252 Ha a nagy adag ára 1400 Ft, akkor a kis adagot legfeljebb $1400 \cdot \dfrac{1}{1{,}2^2} \approx 972{,}22$ Ft-ért érdemes megrendelni. A kis adag túrós csusza megér 950 Ft-ot.

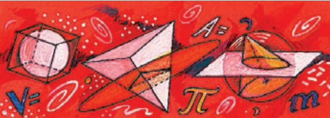
4253 A családi ház kicsinyített képének területe:

$$110 \cdot \left(\frac{1}{40}\right)^2 = 0{,}06875\ \text{m}^2, \quad \text{azaz} \quad 68\,750\ \text{mm}^2.$$

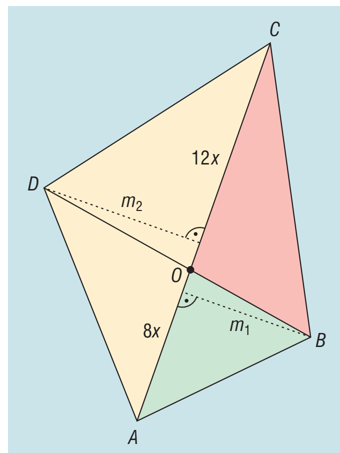
Az A4-es lap területe:

$$210 \cdot 297 = 62\,370\ \text{mm}^2.$$

A tervrajz nem fér el az A4-es lapon.



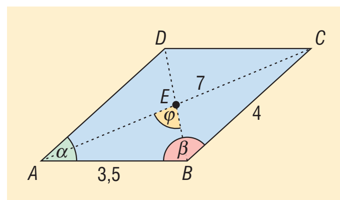
4254 Az ábra jelöléseinek megfelelően: az $ABCD$ négyszög átlói az O pontban metszik egymást, továbbá $T_{AOB} = 8\ \text{cm}^2$ és $T_{COB} = 12\ \text{cm}^2$. Mivel az AOB és COB háromszögekben az AO, illetve a CO alaphoz ugyanakkora magasság tartozik (az ábrán m_1), ezért a két háromszög területének aránya megegyezik az AO és CO oldalak arányával, így $AO = 8x$ és $CO = 12x$ alakban felírható. Vegyük észre, hogy az AOD és COD háromszögekben szintén ugyanakkora magasság tartozik az AO, illetve CO oldalakhoz (az ábrán m_2), ezért a két háromszög területének arányára teljesül, hogy



$$\frac{T_{AOD}}{T_{COD}} = \frac{\frac{8x \cdot m_2}{2}}{\frac{12x \cdot m_2}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Mivel a két háromszög területének összege $30\ \text{cm}^2$, ezért $T_{AOD} = 12\ \text{cm}^2$ és $T_{COD} = 18\ \text{cm}^2$.
Az átlók berajzolása után keletkező másik két háromszög területe $12\ \text{cm}^2$, illetve $18\ \text{cm}^2$.

4255 *a)* Az erdő kicsinyített képe az $ABCD$ paralelogramma, amelyben $AB = 3{,}5$ cm, $BC = 4$ cm és $AC = 7$ cm. Az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\beta,$$
$$7^2 = 3{,}5^2 + 4^2 - 2 \cdot 3{,}5 \cdot 4 \cdot \cos\beta,$$
$$\cos\beta \approx -0{,}7411,$$
$$\beta \approx 137{,}83°.$$

Az $ABCD$ paralelogramma területe:

$$T = AB \cdot BC \cdot \sin\beta \approx 9{,}40\ \text{cm}^2.$$

Mivel az erdő az $ABCD$ paralelogramma 40 000-szeresére nagyított képe, ezért az erdő területe:

$$T \approx 40\,000^2 \cdot 9{,}40 = 1{,}504 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2, \quad \text{ami} \quad 150{,}4\ \text{ha}.$$

Megjegyzés: Az ABC háromszög területe Heron képletével is számolható.

b) Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsánál lévő szögre:

$$\alpha = 180° - \beta \approx 42{,}17°.$$

Az ABD háromszögben koszinusztétel segítségével kapjuk, hogy:

$$BD \approx 2{,}74\ \text{cm}.$$

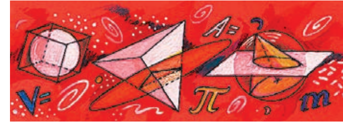
Az erdőt átszelő megfelelő turistaút hossza:

$$40\,000 \cdot 2{,}74 \cdot 10^{-5}\ \text{km} \approx 1{,}1\ \text{km}.$$

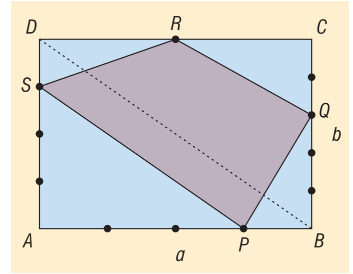
c) Ha az $ABCD$ paralelogramma átlóinak hajlásszögét φ jelöli, akkor a paralelogramma területére:

$$9{,}40 = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\varphi}{2},$$
$$\sin\varphi \approx 0{,}9802,$$
$$\varphi \approx 78{,}58°.$$

Az erdőben kijelölt turistautak 78,58°-os szögben metszik egymást.



4256 *a)* Ha az $ABCD$ téglalap oldalai $AB = a$, $BC = b$, akkor az SRD derékszögű háromszög területe:



$$T_{SRD} = \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(\frac{1}{4}b\right)}{2} = \frac{1}{16}ab.$$

Ehhez hasonlóan:

$$T_{RQC} = \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)\cdot\left(\frac{2}{5}b\right)}{2} = \frac{1}{10}ab,$$

$$T_{PQB} = \frac{\left(\frac{1}{4}a\right)\cdot\left(\frac{3}{5}b\right)}{2} = \frac{3}{40}ab, \qquad T_{PSA} = \frac{\left(\frac{3}{4}a\right)\cdot\left(\frac{3}{4}b\right)}{2} = \frac{9}{32}ab.$$

A derékszögű háromszögek területének összege:

$$\frac{1}{16}ab + \frac{1}{10}ab + \frac{3}{40}ab + \frac{9}{32}ab = \frac{10+16+12+45}{160}ab = \frac{83}{160}ab.$$

A $PQRS$ négyszög területe:

$$T_{PQRS} = T_{ABCD} - (T_{SRD} + T_{RQC} + T_{PQB} + T_{PSA}) =$$
$$= ab - \frac{83}{160}ab = \frac{77}{160}ab = \frac{77}{160}T_{ABCD}.$$

A $PQRS$ négyszög területe az $ABCD$ téglalap területének 48,125%-a.

b) A PS és QR szakaszok nem párhuzamosak egymással. Mivel:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AS}{AD} = \frac{3}{4},$$

ezért a PSA és BDA derékszögű háromszögek befogóinak aránya megegyezik, így a két háromszög hasonló, amiből következik, hogy PS párhuzamos a BD átlóval.

Másrészt:

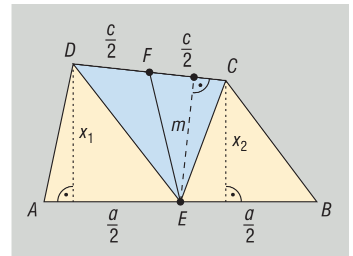
$$\frac{CR}{CD} = \frac{1}{2}, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{CQ}{CB} = \frac{2}{5},$$

ezért:

$$\frac{CR}{CD} \neq \frac{CQ}{CB}.$$

Ebből következik, hogy QR nem párhuzamos BD-vel, így persze PS-sel sem.

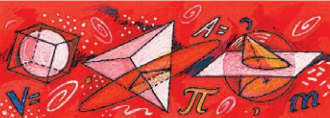
4257 Tekintsünk egy olyan $ABCD$ négyszöget, amelynek területét az EF középvonala megfelezi (ld. ábra), azaz:



$$T_{AEFD} = T_{EBCF}. \quad (1)$$

Mivel az F pont felezi a CD oldalt, ezért a $DFE_\triangle$ és a $CFE_\triangle$ egy-egy oldala ugyanakkora, továbbá megegyezik az ezekhez az oldalakhoz tartozó magasságuk is (az ábrán az m-mel jelölt szakasz). Ebből következik, hogy a két háromszög területe egyenlő, azaz:

$$T_{DFE} = T_{CFE}. \quad (2)$$

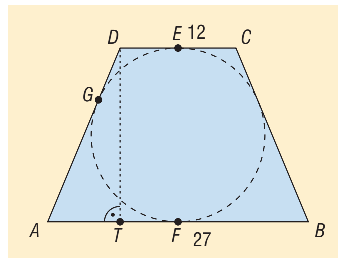


Az (1) és (2) egyenlőségek megfelelő oldalainak különbsége alapján:

$$T_{AEFD} - T_{DFE} = T_{EBCF} - T_{CFE},$$
$$T_{AED} = T_{EBC}.$$

Vegyük észre, hogy az AED és az EBC háromszögekben $AE = EB$, ezért területük csak úgy egyezhet meg, ha az ugyanakkora oldalaikhoz tartozó magasságuk is egyenlő, vagyis $x_1 = x_2$). Ekkor viszont a D és C pontok ugyanakkora távolságra vannak az AB egyenestől, amiből következik, hogy DC és AB párhuzamosak. Ez azt jelenti, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz.

4258 Az $ABCD$ húrtrapézba írható kör a trapéz AB alapját az F, CD alapját az E felezőpontban érinti.



A körhöz egy külső pontjából húzott érintőszakaszai egyenlő hosszúak, ezért:

$$AG = AF = 13{,}5 \text{ cm} \quad \text{és} \quad DG = DE = 6 \text{ cm}.$$

Ebből következik, hogy:

$$AD = AG + DG = 19{,}5 \text{ cm}.$$

Az ATD derékszögű háromszög AT befogójának hossza:

$$AT = \frac{27 - 12}{2} = 7{,}5 \text{ cm}.$$

Pitagorasz tétele alapján:

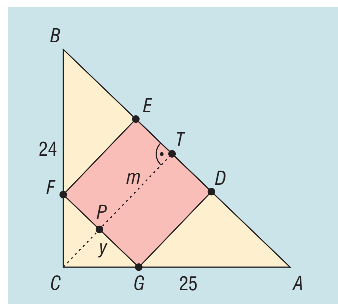
$$DT^2 = AD^2 - AT^2 \quad \Rightarrow \quad DT = \sqrt{19{,}5^2 - 7{,}5^2} \quad \Rightarrow \quad DT = 18 \text{ cm}.$$

A trapéz területe:

$$T = \frac{27 + 12}{2} \cdot 18 = 351 \text{ cm}^2.$$

Mivel DT ugyanakkora, mint EF, azaz a kör átmérője, ezért a trapézba írható kör sugara 9 cm.

4259 Vizsgáljuk meg először Csilla javaslatát. A ház sarkait jelöljük az ábrának megfelelően a D, E, F és G pontokkal, a $DEFG$ négyzet oldalát pedig y-nal. Mivel az $ABC_\triangle$ és a $GFC_\triangle$ szögei páronként megegyeznek (a derékszög közös, további megfelelő szögeik egyállású szögek), ezért a két háromszög hasonló. Ha az $ABC_\triangle$ átfogójához tartozó CT magasságának hosszát m jelöli, továbbá CT a GF szakaszt a P pontban metszi, akkor a háromszögekben az egymásnak megfelelő szakaszok arányára:



$$\frac{AB}{GF} = \frac{CT}{CP}, \quad \text{azaz} \quad \frac{AB}{y} = \frac{m}{m - y}.$$

Az egyenlőségből y értékét kifejezve:

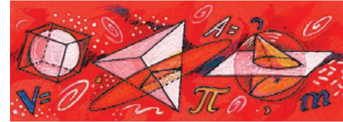
$$y = \frac{m \cdot AB}{m + AB}.$$

Az $ABC_\triangle$ átfogója:

$$AB = \sqrt{24^2 + 25^2} = \sqrt{1201} \;(\approx 34{,}66 \text{ cm}).$$

A háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{AB \cdot m}{2} = \frac{AC \cdot CB}{2} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{24 \cdot 25}{\sqrt{1201}} \approx 17{,}31 \text{ m}.$$

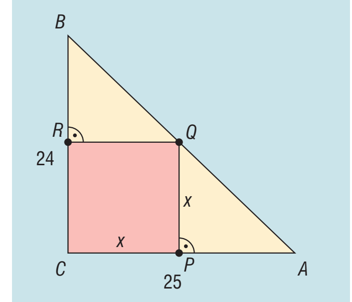


Ebből következően:

$$y = \frac{\frac{600}{\sqrt{1201}} \cdot \sqrt{1201}}{\frac{600}{\sqrt{1201}} + \sqrt{1201}} = \frac{600\sqrt{1201}}{1801},$$

$$y \approx 11,55 \text{ m}.$$

Nézzük most Csaba javaslatát. Ha a ház C-től különböző sarkait az ábrának megfelelően a P, Q, R pontokkal, a $PQRC$ négyzet oldalait pedig x-szel jelöljük, akkor az $ABC_\triangle$ hasonló az $AQP_\triangle$-höz, ezért:



$$\frac{AC}{AP} = \frac{CB}{PQ},$$

$$\frac{25}{25 - x} = \frac{24}{x},$$

$$x = \frac{24 \cdot 25}{49} \approx 12,24 \text{ m}.$$

Látható, hogy Csaba terve alapján építenének nagyobb alapterületű házat.

4260 *a)* A 4257. feladat eredménye alapján, ha az $ABCD$ négyszög területét az AB és CD oldalt összekötő középvonala megfelezi, akkor a négyszög trapéz, amelynek alapjai AB és CD. A feltételek szerint azonban a négyszög területét a BC és DA oldalakat összekötő középvonala is megfelezi, ezért BC és DA szintén párhuzamosak. Ezek alapján az örökölt telek szemközti oldalai párhuzamosak, azaz a telek paralelogramma alakú.

b) A paralelogramma átlója két egybevágó háromszögre bontja a paralelogrammát, ezért András és Béla külön-külön akkora területű részt örökölt, mint amekkora a megadott oldalak által határolt háromszög területe. A háromszög területét pl. Heron képletével számolhatjuk. Mivel:

$$s = \frac{18 + 15 + 22,4}{2} = 27,7 \text{ m},$$

ezért a terület:

$$T = \sqrt{27,7 \cdot (27,7 - 18) \cdot (27,7 - 15) \cdot (27,7 - 22,4)} \approx 134,48 \text{ m}^2.$$

András és Béla külön-külön körülbelül $134,48 \text{ m}^2$ területű telekrészt örököltek.

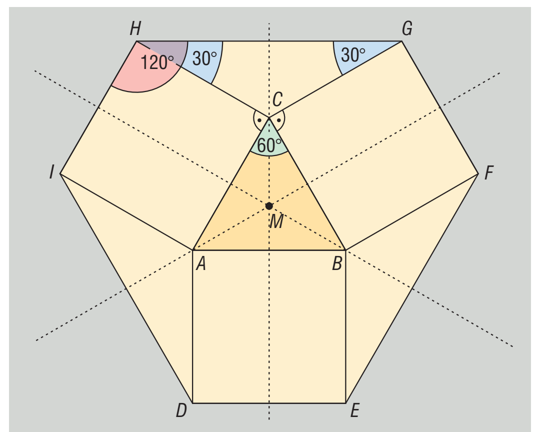
4261 *a)* Az ABC szabályos háromszög C csúcsánál 60°-os, a C csúcshoz illeszkedő négyzeteken „belül” 90°-os szögek vannak (ld. ábra). Ebből következik, hogy:

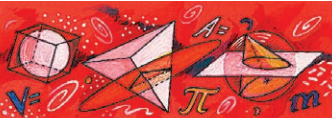
$$HCG\sphericalangle = 360° - (90° + 90° + 60°) = 120°.$$

Mivel a $HCG_\triangle$ egyenlő szárú (mivel CH és CG ugyanakkorák, mint a szabályos háromszög oldalai), ezért a HG alapon 30°-os szögek vannak, amiből következik, hogy:

$$IHG\sphericalangle = 90° + 30° = 120°.$$

Ugyanez a hatszög többi szögére is bizonyítható, tehát a $DEFGHI$ hatszög minden szöge 120°-os.





b) A *DEFGHI* hatszög tengelyesen szimmetrikus az $ABC_\triangle$ magasságvonalaira, továbbá forgásszimmetriát mutat az $ABC_\triangle$ magasságpontja körüli, $k \cdot 120°$-os forgatásokra nézve ($k \in \mathbb{Z}$).

c) A *DEFGHI* hatszög területe a következő síkidomok területének összege: az *ABC* szabályos háromszög, három darab 10 cm oldalú négyzet, valamint három darab egyenlő szárú egybevágó háromszög ($GHC_\triangle$, $IDA_\triangle$ és $EFB_\triangle$). Az *ABC* szabályos háromszög területe:

$$T_1 = \frac{10 \cdot \left(10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = 25\sqrt{3} \approx 43{,}30 \text{ cm}^2.$$

A háromszög oldalaira rajzolt három négyzet területének összege:

$$T_2 = 3 \cdot 10^2 = 300 \text{ cm}^2.$$

A $GHC_\triangle$ területe:

$$T_{GHC} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 120°}{2} = 25\sqrt{3} \approx 43{,}30 \text{ cm}^2.$$

Az $ABC_\triangle$ csúcsaihoz illeszkedő három egybevágó háromszög területének összege:

$$T_3 = 3 \cdot T_{GHC} = 75\sqrt{3} \approx 129{,}90 \text{ cm}^2.$$

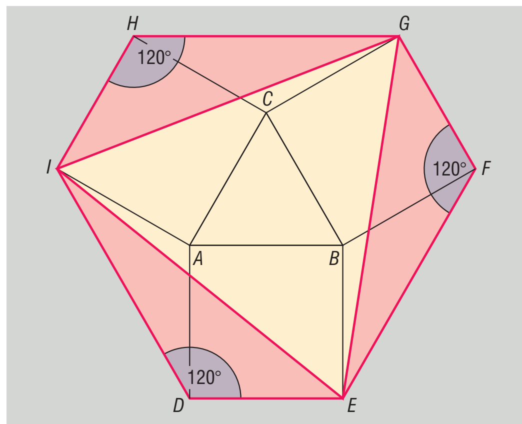
A *DEFGHI* hatszög területe:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 100\sqrt{3} + 300 \approx 473{,}21 \text{ cm}^2.$$

Megjegyzések:

1. Ha az utolsó számításnál a korábbi közelítő értékeket adjuk össze, és nem csak a legvégén végezzük el a kerekítést, akkor $473{,}20 \text{ cm}^2$-t kapunk eredményként.
2. Vegyük észre, hogy az $ABC_\triangle$ és $GHC_\triangle$ területe megegyezik. Ez persze nyilvánvaló, ha figyelembe vesszük, hogy két-két oldaluk megegyezik, továbbá az egyenlő oldalak által bezárt szögek (60° és 120°) szinusza szintén megegyezik.

d) A $GEI_\triangle$ szabályos. Ahhoz, hogy ezt belássuk, vizsgáljuk meg a *GIH*, *IED*, *EGF* háromszögeket.



A háromszögekben két-két oldal, valamint az általuk közrefogott szögek egyenlők. Ebből következik, hogy az ábrán megjelölt háromszögek egybevágók, ami mutatja, hogy a $GEI_\triangle$ oldalai egyenlők, azaz valóban szabályos háromszög.

A $GEI_\triangle$ oldalának hosszát a $GIH_\triangle$-ből számíthatjuk ki. Ehhez szükségünk van a *GH* oldal hosszára is.

A $GHC_\triangle$-ből koszinusztétellel számolva:

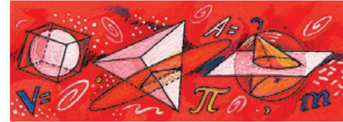
$$GH^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow \quad GH = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32 \text{ cm}.$$

Alkalmazva a koszinusztételt, ezúttal a $GHI_\triangle$-re:

$$GI^2 = 10^2 + \left(10\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot \left(10\sqrt{3}\right) \cdot \cos 120° \quad \Rightarrow \quad GI = 10\sqrt{4 + \sqrt{3}} \approx 23{,}94 \text{ cm}.$$

Végül a *GEI* szabályos háromszög területe:

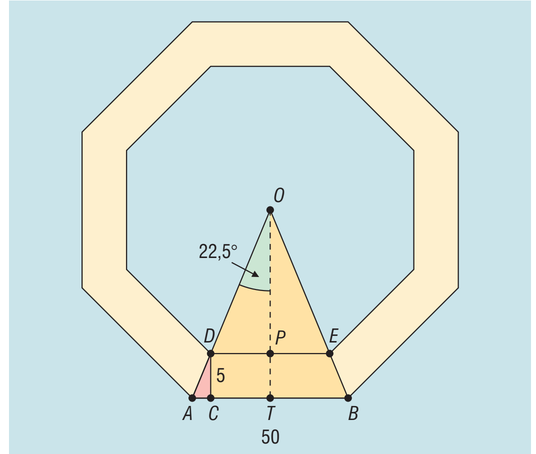
$$T_{GEI} = \frac{\left(10\sqrt{4+\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \left(100 + 25\sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3} \approx 248{,}21 \text{cm}^2.$$



4262 Az ábra jelölései alapján:

$$AOB\sphericalangle = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ,$$

ezért az ABO egyenlő szárú háromszög OT magassága 22,5°-os szöget zár be az OA szárral. Mivel az $ADC_\triangle$ és az $AOT_\triangle$ hasonló, ezért $ADC\sphericalangle = AOT\sphericalangle = 22{,}5^\circ$, így:



$$\text{tg}\,22{,}5^\circ = \frac{AC}{CD},$$

$$AC = 5 \cdot \text{tg}\,22{,}5^\circ \approx 2{,}07 \text{ cm}.$$

A képkeret belső oldala:

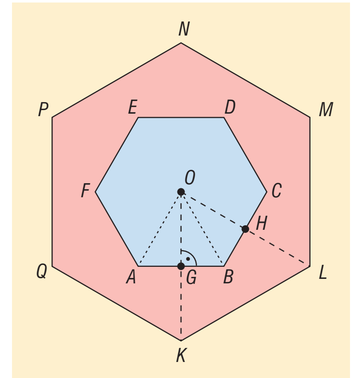
$$DE = AB - 2 \cdot AC \approx 45{,}86 \text{ cm}.$$

A keretbe elhelyezhető vászon területe:

$$T = 8 \cdot T_{DEO} = 8 \cdot \frac{DE \cdot OP}{2} \approx 8 \cdot \frac{45{,}86 \cdot \dfrac{45{,}86}{2 \cdot \text{tg}\,22{,}5^\circ}}{2} \approx 10154{,}86 \text{ cm}^2.$$

A számolások elvégzése után azt kapjuk, hogy a vászon területe körülbelül $1{,}02 \text{ m}^2$.

4263 Az $ABCDEF$ szabályos hatszög O középpontját tükrözzük az oldalfelező pontokra, így az ábra szerinti $KLMNPQ$ szabályos hatszöget kapjuk. Ha az AB oldal felezőpontja G, akkor OG az ABO szabályos háromszög magassága, ezért:



$$OG = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93 \text{ cm}.$$

A tükrözés miatt G az OK szakasz felezőpontja, amiből:

$$OK = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86 \text{ cm}.$$

Az OKL háromszög szintén szabályos, ezért a $KLMNPQ$ hatszög oldalainak hossza:

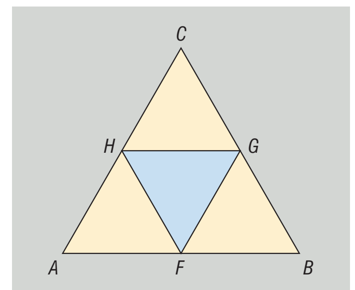
$$8\sqrt{3} \approx 13{,}86 \text{ cm}.$$

Végül a $KLMNPQ$ hatszög területe:

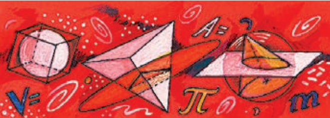
$$T = 6 \cdot \frac{(8\sqrt{3}) \cdot (8\sqrt{3}) \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 288\sqrt{3} \approx 498{,}83 \text{ cm}^2.$$

A keletkező hatszög területe körülbelül $498{,}83 \text{ cm}^2$.

4264 *a)* A háromszög középvonalai a háromszöget négy egybevágó háromszögre bontják (ld. ábra), ezért ha az oldalfelező pontok F, G és H, akkor:

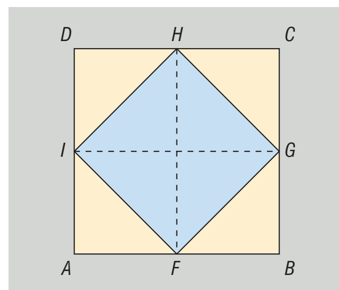


$$\frac{T_{ABC}}{T_{FGH}} = 4.$$



b) Ha az *ABCD* négyzet oldalfelező pontjai *F*, *G*, *H* és *I*, akkor:

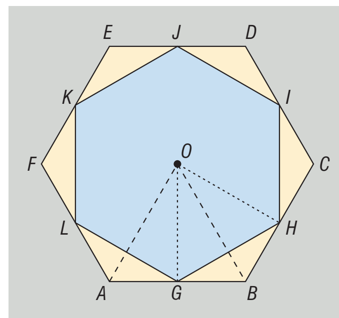
$$\frac{T_{ABCD}}{T_{FGHI}} = 2.$$



c) Ha az *ABCDEFG* szabályos hatszög oldala *a*, akkor a hatszög területe:

$$T_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2.$$

A hatszög oldalfelező pontjai által közrefogott *GHIJKL* hatszög szintén szabályos, és *O* középpontja egybeesik az *ABCDEF* hatszög középpontjával. Mivel az $OGH_\triangle$ is szabályos, ezért a *GHIJKL* hatszög minden oldala ugyanakkora, mint *OG*.



Az *OG* szakasz magasság az *ABO* szabályos háromszögben, ezért:

$$OG = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

A *GHIJKL* hatszög területe:

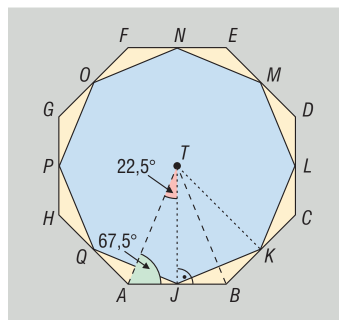
$$T_{GHIJKL} = 6 \cdot \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8} \cdot a^2.$$

A két hatszög területének aránya:

$$\frac{T_{ABCDEF}}{T_{GHIJKL}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2}{\frac{9\sqrt{3}}{8} \cdot a^2} = \frac{4}{3}.$$

d) Az *ABCDEFGH* szabályos nyolcszög oldalfelező pontjai a *JKLMNOPQ* szintén szabályos nyolcszöget fogják közre, ezért ha a nyolcszögek közös középpontja *T*, akkor a *JKT* és az *ABT* háromszögek hasonlók egymáshoz (ld. ábra). Ebből adódóan:

$$\frac{JK}{AB} = \frac{JT}{AT}.$$

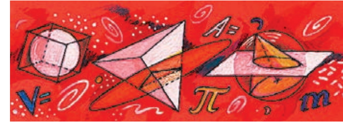


Az *ATJ* derékszögű háromszögből:

$$\sin 67{,}5° = \frac{JT}{AT}.$$

Visszahelyettesítve az első egyenlőségbe:

$$\frac{JK}{AB} = \sin 67{,}5°.$$



Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az *ABCDEFGH* nyolcszöget egy $\lambda = \sin 67{,}5°$ arányú hasonlósági transzformáció viszi át a *JKLMNOPQ* nyolcszögbe. Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért:

$$\frac{T_{JKLMNOPQ}}{T_{ABCDEFGH}} = \sin^2 67{,}5°,$$

azaz

$$\frac{T_{ABCDEFGH}}{T_{JKLMNOPQ}} = \frac{1}{\sin^2 67{,}5°} \approx 1{,}17.$$

e) A sorozat tagjait a_n jelöli. A *d)* feladat levezetéséből láthatjuk, hogy a két sokszög hasonló egymáshoz, a hasonlóság arányát ugyanúgy számolhatjuk ki, mint ahogy a nyolcszög esetében tettük. A sokszögek közös középpontjánál kialakuló szög ebben az esetben nem 22,5°, hanem $\frac{180°}{n}$, a hasonlóság (amelyik az eredeti sokszöget a középpontok által közrefogott sokszögbe viszi át) aránya pedig $\sin\left(90° - \frac{180°}{n}\right)$, ezért:

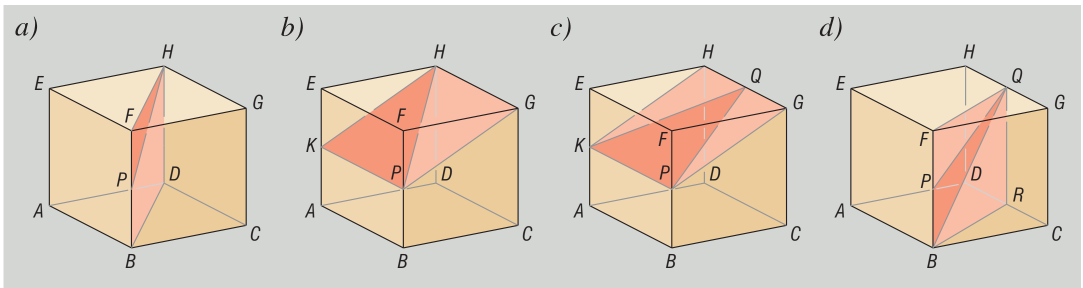
$$a_n = \frac{1}{\sin^2\left(90° - \frac{180°}{n}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{180°}{n}\right)}.$$

Ha n tart végtelenbe, akkor $\frac{180°}{n} \to 0°$, a koszinuszfüggvény folytonossága miatt pedig:

$$\cos\left(\frac{180°}{n}\right) \to 1.$$

Az a_n sorozat határértéke 1.

4265



a) A síkmetszet a *BFHD* téglalap. A téglalap *FH* oldala a kocka egyik lapátlója, ezért:

$$FH = 5\sqrt{2} \approx 7{,}07 \text{ cm},$$

így a síkmetszet területe körülbelül $35{,}35 \text{ cm}^2$.

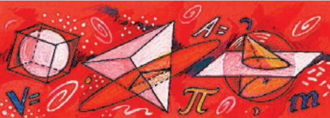
b) A síkmetszet a *PKHG* téglalap. A téglalap *GP* oldala a *GPF* derékszögű háromszögből:

$$GP = \sqrt{5^2 + 2{,}5^2} \approx 5{,}59 \text{ cm},$$

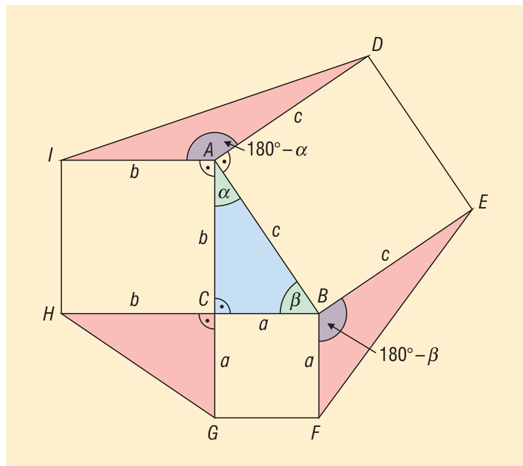
így a síkmetszet területe körülbelül $27{,}95 \text{ cm}^2$.

c) A síkmetszet ezúttal is a *PKHG* téglalap, amelynek területe körülbelül $27{,}95 \text{ cm}^2$.

d) A *BPQ* sík a kocka *CD* élét annak *R* felezőpontjában metszi, ezért a síkmetszet a *BFQR* téglalap. A síkmetszet területe körülbelül $27{,}95 \text{ cm}^2$.



4266 *a)* Az $ABC_\triangle$ oldalait és szögeit a szokásos módon jelöljük. A $HGC_\triangle$ derékszögű, befogói a és b, így a háromszög egybevágó az $ABC_\triangle$-gel, tehát területük is megegyezik. Megmutatjuk, hogy az $ADI_\triangle$ és $FEB_\triangle$ területe is ugyanakkora, mint az $ABC_\triangle$ területe.



Az $ADI_\triangle$-ben $AI = b$ és $AD = c$, továbbá $IAD\sphericalangle = 180° - \alpha$, ezért területe:

$$T_{ADI} = \frac{bc \cdot \sin(180° - \alpha)}{2} = \frac{bc \cdot \sin\alpha}{2}.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon éppen az $ABC_\triangle$ területe szerepel, ezért:

$$T_{ADI} = T_{ABC}.$$

Ugyanígy gondolkodva:

$$T_{FEB} = \frac{ac \cdot \sin(180° - \beta)}{2} = \frac{ac \cdot \sin\beta}{2},$$

azaz:

$$T_{FEB} = T_{ABC}.$$

Ezzel igazoltuk, hogy a $HGC_\triangle$, $ADI_\triangle$ és $FEB_\triangle$ területe megegyezik az $ABC_\triangle$ területével.

b) A $DEFGHI$ hatszög területére:

$$T_{DEFGHI} = 4 \cdot T_{ABC} + T_{AIHC} + T_{BCGF} + T_{ABED} =$$
$$= 4 \cdot \frac{ab}{2} + b^2 + a^2 + c^2 = (a + b)^2 + c^2.$$

A feltételek szerint $a + b = 10$, ezért:

$$T_{DEFGHI} = 100 + c^2.$$

Látható, hogy a hatszög területe akkor a lehető legkisebb, ha az $ABC_\triangle$ átfogójára rajzolt c oldalú négyzet területe minimális. Pitagorasz tétele alapján azonban $c^2 = a^2 + b^2$, majd felhasználva, hogy a befogók összege állandó:

$$c^2 = a^2 + (10 - a)^2 = 2a^2 - 20a + 100 = 2 \cdot (a - 5)^2 + 50.$$

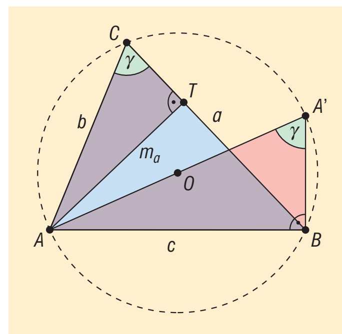
A teljes négyzetté alakított sorról leolvasható, hogy az $ABC_\triangle$ átfogójára rajzolt négyzet területe legalább $50\ \text{cm}^2$, és pontosan akkor a legkisebb, ha $a = 5$ cm, és ebből következően $b = 5$ cm.

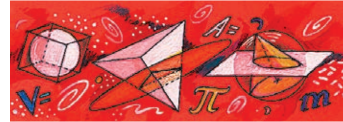
Összefoglalva: a $DEFGHI$ hatszög területe minimális, ha az $ABC_\triangle$ egyenlő szárú, azaz befogói 5 cm hosszúak. Ekkor a hatszög területe $150\ \text{cm}^2$.

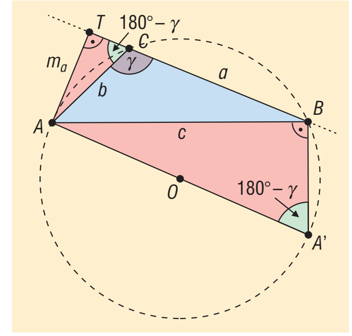
4267 *a)* Előbb az ABC hegyesszögű háromszöget vizsgáljuk. Az $ACB\sphericalangle$ a háromszög köré írható körben a C-t nem tartalmazó AB köríven nyugvó kerületi szög. Ugyanezen a köríven nyugszik az $AA'B\sphericalangle$ is, így a kerületi szögek tétele alapján:

$$ACB\sphericalangle = AA'B\sphericalangle = \gamma.$$

Thalész tétele alapján az ABA' háromszög derékszögű, ezért a $CAT_\triangle$ és az $A'AB_\triangle$ két szöge megegyezik, tehát a két háromszög valóban hasonló egymáshoz.







Tompaszögű háromszög esetén a T pont a BC oldalon kívül fekszik. Ebben az esetben a $CAT_\triangle$-ben:

$$ACT\sphericalangle = 180° - \gamma.$$

Az $AA'BC$ négyszög húrnégyszög, ezért szemközti szögeinek összege 180°, amiből:

$$AA'B\sphericalangle = 180° - \gamma,$$

ami mutatja, hogy a $CAT_\triangle$ és $A'AB_\triangle$ szögei ezúttal is egyenlők, így a két háromszög hasonló egymáshoz.

b) Felhasználva a $CAT_\triangle$ és $A'AB_\triangle$ hasonlóságát, azt kapjuk, hogy:

$$\frac{AT}{AB} = \frac{AC}{AA'} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_a}{c} = \frac{b}{2R} \quad \Rightarrow \quad m_a = \frac{bc}{2R}.$$

Az $ABC_\triangle$ területe:

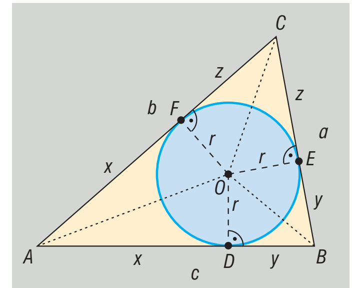
$$T = \frac{a \cdot m_a}{2}, \quad \text{amiből} \quad T = \frac{abc}{4R}.$$

c) Derékszögű háromszögben a T pont egybeesik a C, az A' pont pedig a B csúccsal, ezért a $CAT_\triangle$ és $A'AB_\triangle$ nem jön létre. A derékszögű háromszögben $c = 2R$, ezért:

$$T = \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{c} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

A területképlet derékszögű háromszögre is érvényes.

4268 *a)* A körhöz egy külső pontjából húzott érintőszakaszok hossza megegyezik, ezért:



$$AD = AF = x, \quad BD = BE = y \quad \text{és} \quad CE = CF = z.$$

A háromszög oldalai az érintőszakaszok segítségével:

$$y + z = a, \quad (1)$$
$$x + z = b, \quad (2)$$
$$x + y = c. \quad (3)$$

A kapott egyenlőségek megfelelő oldalainak összegéből:

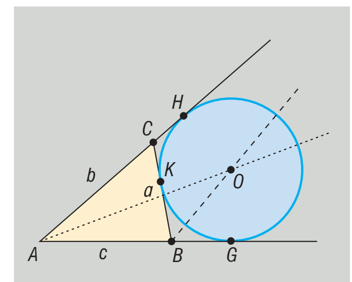
$$2(x + y + z) = 2s, \quad \text{tehát} \quad x + y + z = s.$$

Ha az utolsó egyenlőségből rendre kivonjuk az (1), (2) és (3) egyenlőségek megfelelő oldalát, akkor adódik, hogy:

$$x = s - a, \quad y = s - b \quad \text{és} \quad z = s - c.$$

Éppen ezt kellett igazolnunk.

b) Ezúttal is felhasználjuk, hogy egy külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, ezért:

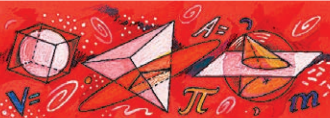


$$AG = AH, \quad BG = BK \quad \text{és} \quad CH = CK.$$

Ezek alapján:

$$2 \cdot AG = AG + AH = (c + BG) + (b + CH) =$$
$$= (c + BK) + (b + CK) = c + (BK + CK) + b =$$
$$= c + a + b = 2s,$$

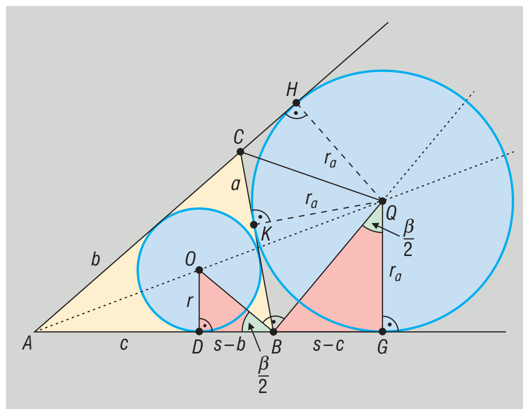
tehát $AG = AH = s$, amit bizonyítani kellett.



c) Az O pont a háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja, ezért:

$$OBD\sphericalangle = \frac{\beta}{2}.$$

A Q pont illeszkedik a B csúcsnál található külső szög szögfelezőjére. Mivel a háromszög egy belső, valamint a mellette fekvő külső szögének szögfelezője merőleges egymásra, ezért $OBQ\sphericalangle = 90°$, amiből következik, hogy a $BQG\sphericalangle$ szárai páronként merőlegesek az $OBD\sphericalangle$ száraira, azaz a két szög merőleges szárú szögpárt alkot, ezért:



$$BQG\sphericalangle = OBD\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$$

(nyilvánvaló, hogy mindkét szög hegyesszög). Látható, hogy a $BOD_{\triangle}$ és a $QBG_{\triangle}$ szögei megegyeznek, ezért a két háromszög valóban hasonló egymáshoz.

d) Az *a)* feladat ábrája alapján:

$$T_{ABC} = T_{BCO} + T_{CAO} + T_{ABO} = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{r \cdot (a+b+c)}{2} = r \cdot s.$$

e) A *c)* feladat ábrája alapján ABQC négyszög területét kétféleképpen is felírhatjuk:

$$T_{ABQC} = T_{ABQ} + T_{ACQ}, \quad \text{illetve} \quad T_{ABQC} = T_{ABC} + T_{BCQ}.$$

Mivel az $ABQ_{\triangle}$-ben és az $ACQ_{\triangle}$-ben az $AB = c$, illetve az $AC = b$ oldalakhoz tartozó magasság egyaránt r_a hosszúságú, ezért:

$$T_{ABQC} = \frac{c \cdot r_a}{2} + \frac{b \cdot r_a}{2} = \frac{(b+c) \cdot r_a}{2}. \qquad (1)$$

Mivel a $BCQ_{\triangle}$-ben a $BC = a$ oldalhoz szintén r_a hosszúságú magasság tartozik, ezért:

$$T_{ABQC} = T_{ABC} + \frac{a \cdot r_a}{2}. \qquad (2)$$

(1) és (2) alapján:

$$\frac{(b+c) \cdot r_a}{2} = T_{ABC} + \frac{a \cdot r_a}{2},$$

majd kifejezve az $ABC_{\triangle}$ területét:

$$T_{ABC} = \frac{(b+c) \cdot r_a - a \cdot r_a}{2} = \frac{b+c-a}{2} \cdot r_a = \frac{a+b+c-2a}{2} \cdot r_a = (s-a) \cdot r_a.$$

f) A $BOD_{\triangle}$ és $QBG_{\triangle}$ hasonlósága alapján (lásd a *c)* feladat ábráját):

$$\frac{r}{s-c} = \frac{s-b}{r_a} \quad \Rightarrow \quad r \cdot r_a = (s-b) \cdot (s-c).$$

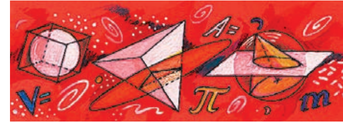
A *d)* feladat alapján $r = \frac{T}{s}$, míg az *e)* feladat alapján $r_a = \frac{T}{s-a}$, így:

$$\frac{T}{s} \cdot \frac{T}{s-a} = (s-b) \cdot (s-c),$$

amiből átrendezés után:

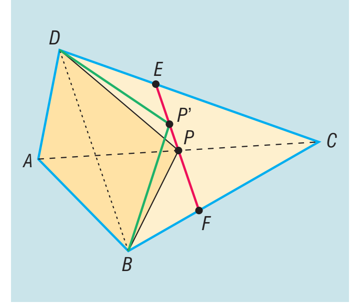
$$T^2 = s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}.$$

Ezzel igazoltuk Heron képletét.



4269 Ha a P pont egybeesik az AC átló felezőpontjával, akkor DP az $ACD_{\triangle}$, míg BP az $ACB_{\triangle}$ egy-egy súlyvonala. A háromszög súlyvonala megfelezi a háromszög területét, ezért:

$$T_{APD} = T_{CPD} \quad \text{és} \quad T_{APB} = T_{CPB}.$$



A két egyenlőség megfelelő oldalainak összeadása után láthatjuk, hogy:

$$T_{ABPD} = T_{BCDP},$$

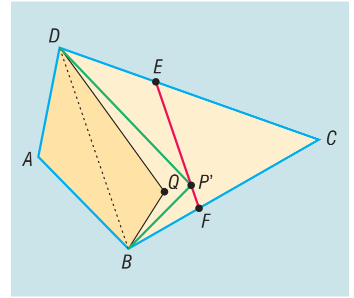
ezért az AC átló P felezőpontja megfelel a feltételeknek.

Húzzunk ezután párhuzamost az AC szakasz felezőpontján át a BD átlóval. A párhuzamos metssze a CD oldalt E-ben, a CB oldalt pedig F-ben. Legyen P' az EF szakasz egy tetszőleges pontja. Ekkor a $DBPP'$ (vagy a $DBP'P$) négyszög trapéz, így a $DBP_{\triangle}$ és $DBP'_{\triangle}$ közös DB oldalához ugyanakkora magasság tartozik, ezért a két háromszög területe is egyenlő. Ebből következik, hogy:

$$T_{ABP'D} = T_{DBA} + T_{DBP'} = T_{DBA} + T_{DBP} = T_{ABPD},$$

azaz ha a P' pont az EF szakaszon változik, akkor az $ABP'D$ négyszög területe állandó, így az EF szakasz minden pontja megfelel a feltételeknek.

Végül megmutatjuk, hogy az $ABCD$ négyszög belsejében nincs további olyan pont, amelyre teljesülne a feladat feltétele. Nyilvánvaló, hogy ilyen pont nem lehet az $ABD_{\triangle}$ belsejében.



Ha a Q pont a $DBFE$ trapéz belsejében van, akkor biztosan találunk az EF szakaszon olyan P' pontot (lásd ábra), amelyre a $DBP'_{\triangle}$ belsejében tartalmazza a Q pontot.

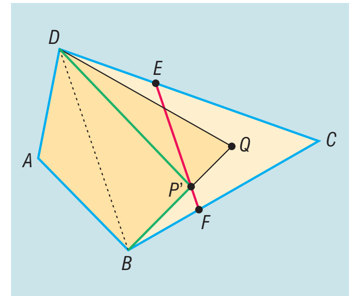
Ekkor a $DBQ_{\triangle}$ területe kisebb, mint a $DBP'_{\triangle}$ területe, így az $ABQD$ négyszög területe is kisebb, mint az $ABP'D$ négyszög területe.

Ha viszont a Q pont az $EFC_{\triangle}$ belső pontja, és a BQ szakasz az EF szakaszt a P' pontban metszi, akkor látható, hogy:

$$T_{DBQ} > T_{DBP'}$$

így az $ABQD$ négyszög területe biztosan nagyobb, mint az $ABCD$ négyszög területének fele.

Ezzel megmutattuk, hogy kizárólag az EF szakasz pontjai felelnek meg a feltételnek.



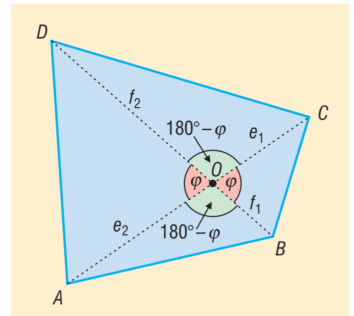
4270 Jelöljük az átlók hajlásszögét φ-vel, továbbá legyen az O pontot a csúcsokkal összekötő szakaszok hossza rendre:

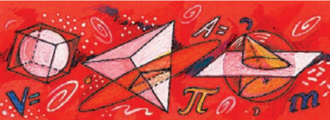
$$OC = e_1, \quad OA = e_2, \quad OB = f_1 \quad \text{és} \quad OD = f_2.$$

Ekkor a megfelelő háromszögek területére igaz, hogy:

$$T_{ABO} = \frac{f_1 \cdot e_2 \cdot \sin(180° - \varphi)}{2},$$

$$T_{CDO} = \frac{e_1 \cdot f_2 \cdot \sin(180° - \varphi)}{2}.$$





Az $ABCD$ négyszögön belül kialakuló másik két háromszög területére igaz, hogy:

$$T_{BCO} = \frac{e_1 \cdot f_1 \cdot \sin\varphi}{2},$$

$$T_{DAO} = \frac{f_2 \cdot e_2 \cdot \sin\varphi}{2}.$$

Mivel $\sin(180° - \varphi) = \sin\varphi$, ezért a két-két „szemközti” négyszög területének szorzata:

$$T_{ABO} \cdot T_{CDO} = \frac{f_1 \cdot e_2 \cdot \sin\varphi}{2} \cdot \frac{e_1 \cdot f_2 \cdot \sin\varphi}{2} = \frac{e_1 \cdot e_2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \sin^2\varphi}{4},$$

$$T_{BCO} \cdot T_{DAO} = \frac{e_1 \cdot f_1 \cdot \sin\varphi}{2} \cdot \frac{f_2 \cdot e_2 \cdot \sin\varphi}{2} = \frac{e_1 \cdot e_2 \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \sin^2\varphi}{4}.$$

A „szemközti” négyszögek területének szorzata valóban egyenlő.

4271 *a)* A 4270. feladat állítása alapján:

$$T_{ABO} \cdot T_{CDO} = T_{BCO} \cdot T_{DAO},$$

azaz

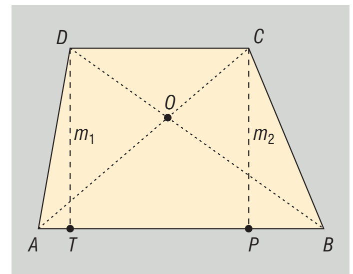
$$8 \cdot 2 = 4 \cdot T_{DAO},$$

amiből

$$T_{DAO} = 4 \text{ cm}^2.$$

Az $ABCD$ négyszög területe:

$$8 + 2 + 4 + 4 = 18 \text{ cm}^2.$$



b) Mivel

$$T_{ABD} = T_{ABO} + T_{DAO} = 8 + 4 = 12 \text{ cm}^2,$$

valamint

$$T_{ABC} = T_{ABO} + T_{BCO} = 8 + 4 = 12 \text{ cm}^2,$$

ezért

$$T_{ABD} = T_{ABC}.$$

Ha a két háromszög közös AB oldalához az $ABD_\triangle$-ben m_1, az $ABC_\triangle$-ben pedig m_2 magasság tartozik, akkor:

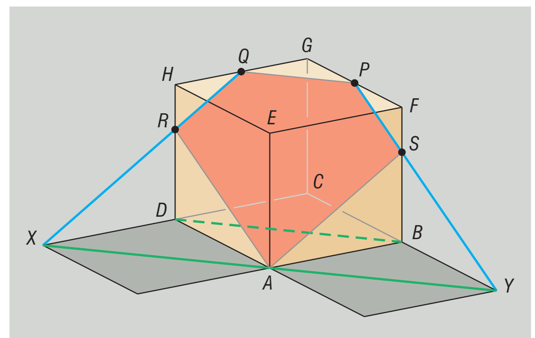
$$\frac{AB \cdot m_1}{2} = \frac{AB \cdot m_2}{2},$$

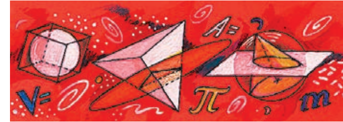
$$m_1 = m_2.$$

Ez azt is jelenti, hogy a C és D pontok ugyanakkora távolságra vannak az AB szakasztól, ezért CD párhuzamos AB-vel. Ebből következik, hogy az $ABCD$ négyszög valóban trapéz.

4272 *a)* A metsző sík az A, P és Q pontokon kívül még a kocka DH és BF éleit metszi. Ha a sík a DH élt az R, a BF élt az S pontban metszi, akkor a síkmetszet az $ASPQR$ ötszög.

b) A QP szakasz középvonala a $HFG_\triangle$-nek, ezért QP párhuzamos a kocka HF lapátlójával. Mivel egy sík párhuzamos síkokból párhuzamos egyeneseket metsz ki, ezért az APQ sík a kocka $ABCD$ alaplapjának síkját is egy HF-fel párhuzamos egyenesben metszi.





Ebből következik, hogy ha a QR egyenes a DC egyenest az X, a PS egyenes a CB egyenest pedig az Y pontban metszi, akkor XY párhuzamos HF-fel és így párhuzamos a BD lapátlóval is. Ekkor azonban az $ABDX$ négyszög paralelogramma, ezért:

$$DX = BA = 18 \text{ cm} \quad \text{és} \quad BY = DA = 18 \text{ cm}.$$

Vizsgáljuk meg az XDR és QHR háromszögeket. Mindkét háromszög derékszögű, valamint az R csúcsnál lévő szögeik csúcsszögek, ezért a két háromszög hasonló egymáshoz. A megfelelő oldalaikra:

$$\frac{DR}{HR} = \frac{DX}{HQ} = 2,$$

ezért az R pont a DH él D-hez közelebbi harmadolópontja, így:

$$DR = 12 \text{ cm} \quad \text{és} \quad HR = 6 \text{ cm}.$$

Ugyanilyen megfontolásból:

$$BS = 12 \text{ cm} \quad \text{és} \quad FS = 6 \text{ cm}.$$

Az $ASPQR$ ötszög minden oldala átfogója egy-egy olyan derékszögű háromszögnek, amelynek befogói illeszkednek a kocka éleire, így már könnyen kiszámíthatjuk az ötszög oldalait:

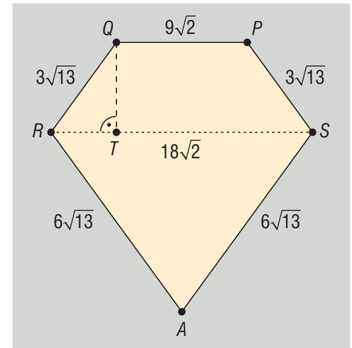
$$QP = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2} \ (\approx 12{,}73 \text{ cm}),$$

$$PS = QR = \sqrt{9^2 + 6^2} = 3\sqrt{13} \ (\approx 10{,}82 \text{ cm}),$$

$$AR = AS = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13} \ (\approx 21{,}63 \text{ cm}).$$

Mivel az $RSBD$ négyszög is paralelogramma (sőt igazából téglalap), ezért:

$$RS = 18\sqrt{2} \ (\approx 25{,}46 \text{ cm}).$$



Az ötszög területe az RSA egyenlő szárú háromszög, valamint az $RSPQ$ húrtrapéz területének összege.

Az $RSA_\triangle$ területét Heron képletével számolhatjuk:

$$T_{RSA} = \sqrt{\left(6\sqrt{13} + 9\sqrt{2}\right) \cdot \left(9\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(6\sqrt{13} - 9\sqrt{2}\right)} =$$

$$= 54\sqrt{17} \quad \left(\approx 222{,}65 \text{ cm}^2\right).$$

Az $RSPQ$ húrtrapéz területéhez szükségünk van a trapéz QT magasságára. Az RQT derékszögű háromszögben:

$$RT = \frac{18\sqrt{2} - 9\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \ (\approx 6{,}36 \text{ cm}).$$

Pitagorasz tétele alapján:

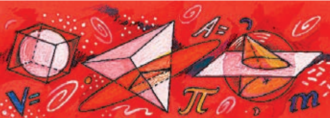
$$QT = \sqrt{\left(3\sqrt{13}\right)^2 - \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{17}{2}} \ (\approx 8{,}75 \text{ cm}).$$

Az $RSPQ$ trapéz területe:

$$T_{RSPQ} = \frac{18\sqrt{2} + 9\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{81\sqrt{17}}{2} \quad \left(\approx 166{,}99 \text{ cm}^2\right).$$

Az $ASPQR$ ötszög területe:

$$T_{ASPQR} = 54\sqrt{17} + \frac{81\sqrt{17}}{2} = \sqrt{17} \cdot \frac{189}{2} \quad \left(\approx 389{,}63 \text{ cm}^2\right).$$



A kör és részeinek területe – megoldások

4273 Az ábrák alapján egy paralelogramma területével közelíthetjük a kör területét. A paralelogramma egyik oldala r, a másik oldala a kör kerületének nyolcadrésze. Ha a körcikkek középponti szögét csökkentjük, akkor a paralelogramma szögei egyre jobban „megközelítik” a 90º-os szöget, így a paralelogramma határhelyzete egy téglalap. A fentiek alapján a kör T területére a következő becslést adhatjuk:

$$\frac{T}{4} \approx r \cdot K_{\text{nyolcadkör}}, \quad \text{amiből} \quad T \approx r \cdot K_{\text{félkör}}, \quad \text{azaz} \quad T \approx r \cdot r \cdot \pi = r^2 \cdot \pi.$$

4274 *a)* $t \approx 14{,}18$ cm^2, $i \approx 5{,}67$ cm;
b) $t \approx 169{,}65$ cm^2, $i \approx 28{,}27$ cm;
c) $t \approx 405{,}57$ cm^2, $i \approx 62{,}40$ cm;
d) $t \approx 33{,}51$ cm^2, $i \approx 8{,}38$ cm;
e) $t \approx 203{,}58$ cm^2, $i \approx 22{,}62$ cm.

4275 *a)* $\alpha \approx 85{,}94°$; *b)* $\alpha \approx 299{,}95°$; *c)* $\alpha \approx 120{,}03°$.

4276 $11{,}18$ cm^2, illetve $67{,}36$ cm^2.

4277 A húr hossza $12{,}90$ cm. A nagyobb körszelet területe $435{,}96$ cm^2.

4278 *a)* $T \approx 74{,}99$ cm^2; *b)* $T \approx 254{,}47$ cm^2.

4279 $111{,}33$ cm^2.

4280 $351{,}86$ cm^2.

4281 A kisebb körgyűrű területe $16\pi \approx 50{,}27$ cm^2, a nagyobbé $24\pi \approx 75{,}40$ cm^2.

4282 A motívumokat egy $115\pi \approx 361{,}28$ cm^2 területű részen helyezték el.

4283 *a)* 125 Ft-ba; *b)* 540 Ft-ba; *c)* 160 Ft-ba; *d)* 955 Ft-ba.
Látható, hogy a gyakorlatban a pizza ára nem egyenesen arányos a területével.

4284 A háromszög köré írt kör sugara kétszer akkora, mint a beírt kör sugara, ezért területük aránya 4.

4285 Az aszfaltozásra váró terület a következő részekből tevődik össze: 8 darab téglalap alakú rész a pavilon oldalai mentén, illetve 8 darab körcikk alakú rész a pavilon sarkainál. Egy-egy téglalap alakú rész szélessége 0,5 m, hosszúsága 2 m, így a téglalap alakú részek területének összege:

$$T_1 = 8 \cdot 0{,}5 \cdot 2 = 8 \text{ m}^2.$$

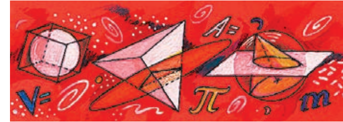
A körcikkek sugara 0,5 m. A szabályos nyolcszög egy belső szöge 135º-os, ezért egy körcikk középponti szöge:

$$360° - (135° + 90° + 90°) = 45°.$$

Mivel $8 \cdot 45° = 360°$, ezért a pavilon nyolc sarkánál lévő körcikkekből éppen egy 0,5 m sugarú kört lehet „összeállítani”. A körcikkek területösszege ennek megfelelően:

$$T_2 = 0{,}5^2 \cdot \pi \approx 0{,}8 \text{ m}^2.$$

Összesen $8{,}8$ m^2 területű részt kell leaszfaltozni.



4286 A kisebb területű körgyűrű területe:

$$t = \left(\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 - r^2\right) \cdot \pi,$$

a nagyobb területűé:

$$T = \left(R^2 - \left(\frac{R+r}{2}\right)^2\right) \cdot \pi.$$

Felhasználva az $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$ azonosságot, a két terület aránya:

$$\frac{t}{T} = \frac{\frac{R+r-2r}{2} \cdot \frac{R+r+2r}{2}}{\frac{2R+R+r}{2} \cdot \frac{2R-R-r}{2}} = \frac{R+3r}{3R+r}.$$

4287 *a)* Ez a kör a két koncentrikus kör középköre, amelynek sugara:

$$r_1 = \frac{r+R}{2}.$$

A körgyűrű szélességét felező kör sugara a két határoló kör sugarának számtani közepe.

b) Ha a keresett kör sugara r_2, akkor:

$$\frac{r_2^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi}{R^2 \cdot \pi - r_2^2 \cdot \pi} = \frac{r}{R},$$

amiből a törtek eltüntetése és egyszerűsítés után:

$$r_2^2 \cdot R - r^2 \cdot R = r \cdot R^2 - r \cdot r_2^2.$$

Az r_2-t tartalmazó tagokat egy oldalra csoportosítva:

$$r_2^2 \cdot R + r \cdot r_2^2 = r \cdot R^2 + r^2 \cdot R,$$
$$r_2^2 \cdot (R+r) = r \cdot R \cdot (R+r),$$
$$r_2^2 = r \cdot R,$$
$$r_2 = \sqrt{r \cdot R}.$$

A körgyűrűt $r:R$ területarányú részekre osztó kör sugara a két határoló kör sugarának mértani közepe.

c) A körgyűrű területét felező kör sugarát r_3-mal jelölve:

$$R^2 \cdot \pi - r_3^2 \cdot \pi = r_3^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi,$$

amiből egyszerűsítés és rendezés után:

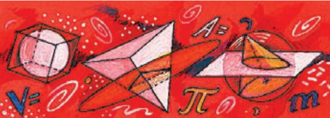
$$r_3^2 = \frac{R^2 + r^2}{2} \quad \Rightarrow \quad r_3 = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}.$$

A körgyűrű területét felező kör sugara a két határoló kör sugarának négyzetes közepe.

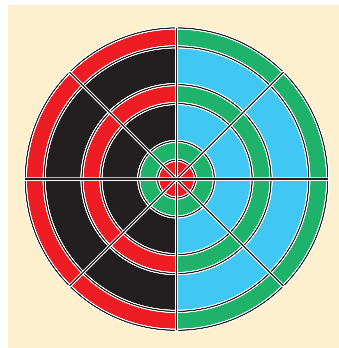
d) Mivel a kapott közepek közül a mértani a legkisebb, annál nagyobb a számtani, végül a négyzetes a legnagyobb, ezért:

$$r_2 < r_1 < r_3.$$

Megjegyzés: A közepek között ezúttal egyenlőség nem fordulhat elő a $R > r$ feltétel miatt. A körök közül a legkisebb a „belső” körhöz van közelebb, az *a)* feladatban kapott kör a határoló köröktől egyenlő távolságra van, míg a *c)* feladat köre a „külső” határoló körhöz van közelebb.



4288 *a)* Az azonos színnel jelölt részek területösszegét könnyebb kiszámolni, ha az azonos színeket egymás mellé forgatjuk (ld. ábra). A tábla fekete része két körgyűrűcikket alkot. Mindkét rész a megfelelő körgyűrű területének fele, ezért a feketével jelölt terület:



$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(31^2 - 23^2\right) \cdot \pi + \left(18^2 - 10^2\right) \cdot \pi \right] =$$
$$= 328\pi \approx 1030{,}44 \text{ cm}^2.$$

b) A zölddel megjelölt részek területösszege:

$$T_2 = \left(10^2 - 5^2\right) \cdot \pi + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(36^2 - 31^2\right) \cdot \pi + \left(23^2 - 18^2\right) \cdot \pi \right] =$$
$$= 345\pi \approx 1083{,}85 \text{ cm}^2.$$

c) A pirossal megjelölt részek területe közvetlenül is számolható, de akár úgy is, hogy a „legkülső" kör területéből kivonjuk a többi színnel megjelölt részek területét. A legnagyobb kör területe:

$$T = 36^2 \cdot \pi = 1296\pi \approx 4071{,}50 \text{ cm}^2.$$

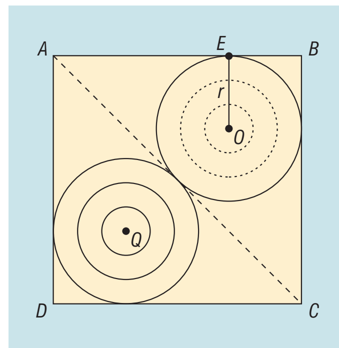
Mivel a kék és fekete részek területe megegyezik, ezért a piros területrészek összege:

$$T_3 = T - 2 \cdot T_1 - T_2 = 1296\pi - 656\pi - 345\pi = 295\pi \approx 926{,}77 \text{ cm}^2.$$

Bence a piros részt az alábbi valószínűséggel találja el:

$$\frac{T_3}{T} = \frac{295}{1296} \approx 0{,}2276.$$

4289 *a)* Jelöljük az eredeti hungarocelltábla sarkait az A, B, C és D pontokkal, a két kivágott kör középpontját O-val és Q-val. Az O középpontú kör az ACB egyenlő szárú derékszögű háromszög beírt köre. A kör r sugarát az ACB háromszög területéből számolhatjuk ki. Mivel a háromszög befogói 2 m hosszúak, ezért:



$$T_{ACB} = 2 \text{ m}^2.$$

Ha a háromszög kerületének felét s jelöli, akkor:

$$s = \frac{2 + 2 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}41 \text{ m}.$$

Az ismert területképlet alapján:

$$r = \frac{T_{ACB}}{s} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59 \text{ m}.$$

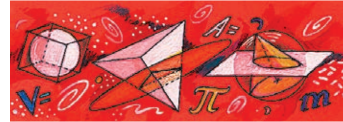
Az egyik céltábla területe:

$$T = \left(2 - \sqrt{2}\right)^2 \cdot \pi \approx 1{,}08 \text{ m}^2,$$

tehát a táblának körülbelül

$$\frac{2 - 1{,}08}{2} \cdot 100 = 46\%\text{-a}$$

veszett kárba.



b) Egy céltáblán a pirosra festett rész területe:

$$\left(\frac{r}{3}\right)^2 \cdot \pi \approx 0{,}12 \text{ m}^2.$$

c) Marci a sárga részt

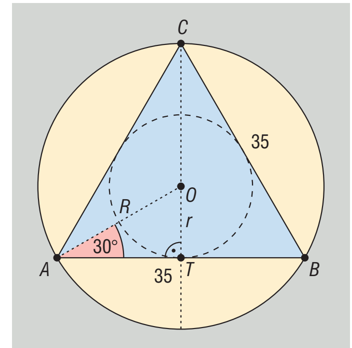
$$\frac{r^2 \cdot \pi - \left(\frac{2}{3} \cdot r\right)^2 \cdot \pi}{r^2 \cdot \pi} = \frac{5}{9}$$

valószínűséggel találja el. A legértékesebb (piros) rész találatának valószínűsége:

$$\frac{\left(\frac{r}{3}\right)^2 \cdot \pi}{r^2 \cdot \pi} = \frac{1}{9}.$$

Látható, hogy Marci a sárga részt 5-ször akkora valószínűséggel találja el, mint a pirosat.

4290 *a)* A virágtartó tetejét teljes egészében lefedő terítők közül a háromszög köré írható kör sugara a legkisebb. Az *ABC* szabályos háromszög köré írható kör *O* középpontja egybeesik a háromszög magasságpontjával, valamint beírható körének középpontjával is. Ha a *C* csúcsból induló magasságvonal talppontja *T*, akkor az *AOT* derékszögű háromszög *A* csúcsánál 30º-os szög van, ezért ha a körülírt kör sugara *R*, akkor:



$$\cos 30^\circ = \frac{AT}{R},$$

$$R = \frac{35\sqrt{3}}{3} \approx 20{,}21 \text{ cm}.$$

A virágtartót lefedő legkisebb kör alakú terítő területe körülbelül $1282{,}82 \text{ cm}^2$.

b) A virágtartón elférő legnagyobb kör alapú cserép *r* sugara megegyezik az $ABC_\triangle$-be írt kör sugarával. Az *AOT* derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{AT},$$

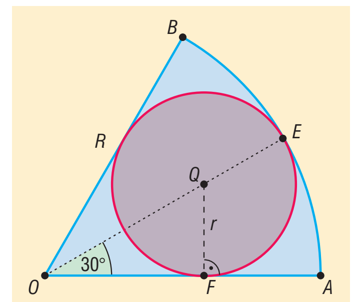
$$r = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{35}{2} \approx 10{,}10 \text{ cm}.$$

A legnagyobb virágcserép alapterülete körülbelül $320{,}70 \text{ cm}^2$.

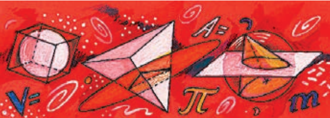
c) A terítő és a virágcserép alapköre sugarának aránya 2.

d) A terítő területe a virágcserép alapterületének 4-szerese.

4291 A körcikkből kivágható legnagyobb kör érinti a határoló körívet, valamint a körcikk két sugarát. Ebből következik, hogy a kivágandó kör *Q* középpontja illeszkedik a körcikk középponti szögének szögfelezőjére. Ha a körcikk sugarát *R*, a körét *r* jelöli, továbbá a körcikk határoló körívével való érintési pont *E*, az *OA* sugárral pedig *F* (ld. ábra), akkor az *OQF* derékszögű háromszögben:



$$\sin 30^\circ = \frac{r}{OQ} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{OQ}{2}.$$



Mivel az O, Q és E pontok egy egyenesre illeszkednek, ezért:

$$OQ = OE - QE = R - r,$$

így:

$$r = \frac{R-r}{2} = \frac{R}{3}.$$

A körcikk területe:

$$T = \frac{R^2 \cdot \pi}{6},$$

a beírt kör területe:

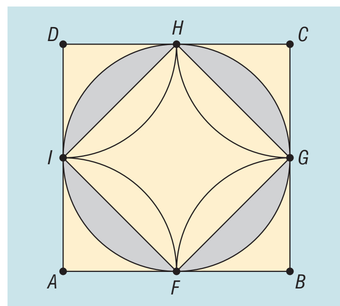
$$t = \frac{R^2 \cdot \pi}{9},$$

a hulladéké pedig:

$$T_{\text{hulladék}} = T - t = \frac{R^2 \cdot \pi}{18},$$

így a hulladék a körcikknek 33,33%-a.

4292 *a)* Az alábbi ábrán berajzoltuk az $ABCD$ négyzet oldalfelező pontjait, valamint az így kialakult $FGHI$ négyzetet. A satírozással megjelölt rész területe jól láthatóan feleakkora, mint az eredeti ábrán megjelölt részek területösszege. Ha az $ABCD$ négyzet oldala a, akkor az ábrán szürkével jelölt körszeletek területösszege az $ABCD$ négyzetbe írt kör, valamint az $FGHI$ négyzet területének különbsége, azaz:



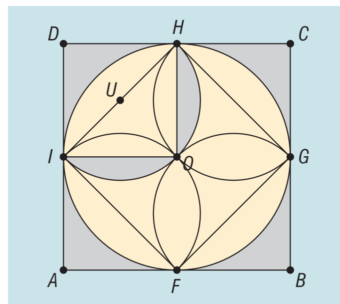
$$T = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi - \frac{a^2}{2} = a^2 \cdot \frac{\pi - 2}{4}.$$

Az eredeti ábra szürkével jelölt síkidomainak területösszege:

$$2 \cdot T = a^2 \cdot \frac{\pi - 2}{2},$$

ami a négyzet területének 57%-a.

b) Az $ABCD$ négyzetbe írt körön kívül eső részek területösszege:



$$T_1 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi = a^2 \cdot \frac{4 - \pi}{4}.$$

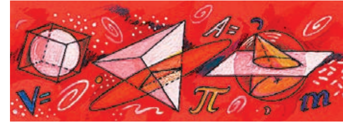
A körön belüli részt összesen 8 körszeletre bonthatjuk, melyek közül az ábrán szürkével jelölt 2 körszelet területösszege az IH átmérőjű, U középpontú félkör és az IHO derékszögű háromszög területének különbsége, azaz:

$$T_2 = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot \pi}{2} - \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = a^2 \cdot \frac{\pi - 2}{16}.$$

Az eredetileg szürkével jelölt részek területösszege:

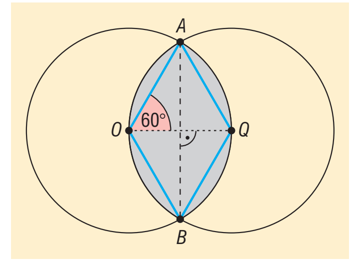
$$T = T_1 + 4 \cdot T_2 = a^2 \cdot \left(\frac{4 - \pi}{4} + 4 \cdot \frac{\pi - 2}{16}\right) = \frac{a^2}{2}.$$

A négyzetnek tehát pont a fele, azaz 50%-a van beszínezve.



4293 *a)* Az $OAQB$ négyszög minden oldala 12 cm, ezért a négyszög rombusz. A rombusz OQ átlója szintén 12 cm, AB átlója pedig az AOQ és BOQ szabályos háromszögek magasságainak összege, azaz:

$$AB = 2 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \quad (\approx 20,78 \text{ cm}).$$



Az $OAQB$ rombusz területe:

$$T_{OAQB} = \frac{12 \cdot 12\sqrt{3}}{2} = 72\sqrt{3} \quad (\approx 124,71 \text{ cm}^2).$$

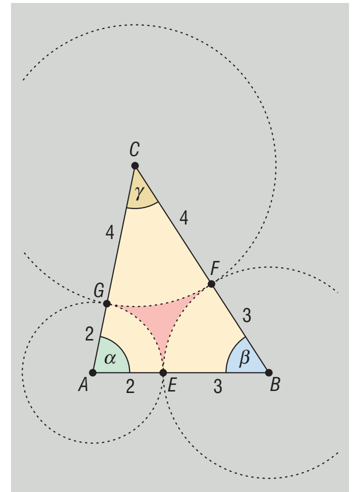
b) A szürkével megjelölt rész az $OAQB$ rombuszra, valamint 4 darab egybevágó körszeletre bontható. Egy ilyen körszelet területe kiszámolható a 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikk, valamint a 12 cm oldalú szabályos háromszög területének különbségeként, azaz:

$$t = \frac{12^2 \cdot \pi}{6} - \frac{12^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 24\pi - 36\sqrt{3} \quad (\approx 13,04 \text{ cm}^2).$$

A szürke rész területe:

$$T = T_{OAQB} + 4 \cdot t = 72\sqrt{3} + 96\pi - 144\sqrt{3} = 96\pi - 72\sqrt{3} \approx 176,89 \text{ cm}^2.$$

4294 A három kör középpontja által közrefogott $ABC_\triangle$ oldalai a sugarakból adódnak: $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 6$ cm (ld. ábra). Ha az érintési pontokat E, F és G jelöli, akkor a feladat a körívek által határolt EFG síkidom területét kérdezi. E síkidom területét megkapjuk, ha az $ABC_\triangle$ területéből kivonjuk az $ABC_\triangle$ csúcsai mint középpontok köré írt körcikkek területét (az egyik ilyen körcikk például az A középpontú α középponti szögű, 2 cm sugarú körcikk).



Az $ABC_\triangle$ területét Heron képletével számolhatjuk:

$$T_{ABC} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3} = 6\sqrt{6} \quad (\approx 14,70 \text{ cm}^2).$$

A háromszög szögeit koszinusztétellel számíthatjuk ki:

$$\cos\alpha = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5}, \qquad \text{amiből} \qquad \alpha \approx 78,46°.$$

A háromszög további szögei: $\beta \approx 57,12°$, $\gamma \approx 44,42°$.

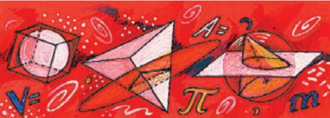
A háromszög csúcsai köré írt körcikkek területe:

$$t_\alpha = \frac{2^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°} \approx 2,74 \text{ cm}^2,$$

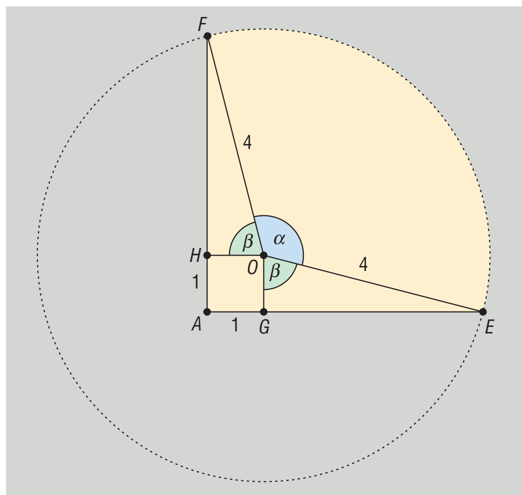
$$t_\beta = \frac{3^2 \cdot \pi \cdot \beta}{360°} \approx 4,49 \text{ cm}^2,$$

$$t_\gamma = \frac{4^2 \cdot \pi \cdot \gamma}{360°} \approx 6,20 \text{ cm}^2.$$

Ha az $ABC_\triangle$ területéből kivonjuk a körcikkek területét, a körök által határolt síkidom területére $1,27 \text{ cm}^2$ adódik.



4295 A telek területe 225 m^2. Az ábra jelöléseit követve tegyük fel, hogy Béla bácsi az öntözőberendezést az O pontba, a telek A csúcsához rakta legközelebb. A meglocsolt terület a következő részekre bontható: az 1 m oldalú $AGOH$ négyzet, a 4 m hosszú átfogóval rendelkező EOG és FHO egybevágó derékszögű háromszögek, valamint az O középpontú, az ábrán α-val jelölt középponti szögű, 4 m sugarú körcikk.



Az $AGOH$ négyzet területe 1 m^2.

Az EOG háromszögben:

$$\cos\beta = \frac{1}{4}, \qquad \text{amiből} \qquad \beta \approx 75{,}52°.$$

Az EOG (és a vele egybevágó FHO) háromszög területe:

$$T_{EOG} = \frac{1 \cdot 4 \cdot \sin\beta}{2} \approx 1{,}94 \text{ m}^2.$$

A körcikk alakú rész középponti szögére:

$$\alpha = 360° - 90° - 2\beta \approx 118{,}96°,$$

területe pedig:

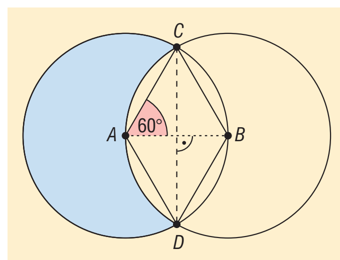
$$T_{\text{körcikk}} = \frac{4^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°} \approx 16{,}61 \text{ m}^2.$$

Béla bácsi az öntözőberendezéssel körülbelül

$$1 + 2 \cdot 1{,}94 + 16{,}61 = 21{,}49 \text{ m}^2$$

területű részt tud meglocsolni a kertjéből, ami a kertnek körülbelül 9,6%-a.

4296 *a)* Egy hold alakú tészta területét úgy számolhatjuk ki, hogy a 4 cm sugarú kör területéből kivonjuk a két metsző helyzetű kör közös részének területét. A két kör közös része tovább bontható az $ADBC$ rombuszra (ld. ábra), valamint négy egybevágó körszeletre; az egyik ilyen körszeletet a BC húr vágja le az A középpontú, 60°-os középponti szöggel rendelkező körcikkből. A körcikk területe:



$$T_{\text{körcikk}} = \frac{4^2 \cdot \pi}{6} \approx 8{,}38 \text{ cm}^2.$$

Az ABC szabályos háromszög területe:

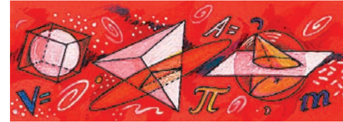
$$T_{ABC} = \frac{4^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93 \text{ cm}^2,$$

ezért a megfelelő körszelet területe:

$$T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_{ABC} \approx 1{,}45 \text{ cm}^2.$$

Az $ADBC$ rombusz területe kétszerese az ABC háromszög területének, azaz:

$$T_{ADBC} = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86 \text{ cm}^2.$$



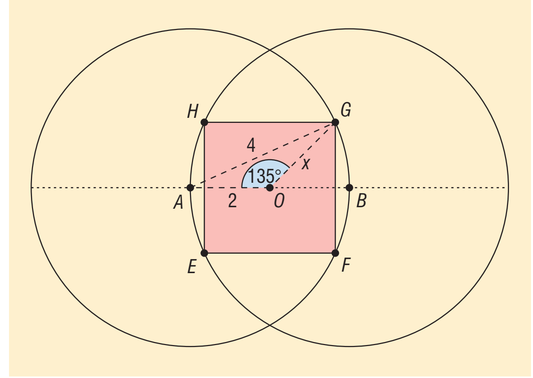
A két szomszédos kör közös részének területe:

$$T_{\text{metszet}} = T_{ADBC} + 4 \cdot T_{\text{körszelet}} \approx 19{,}66 \text{ cm}^2.$$

Egy hold alakú tészta területe:

$$4^2 \cdot \pi - 19{,}66 \approx 30{,}61 \text{ cm}^2.$$

b) A két kör közös részébe írt $EFGH$ négyzet területét kérdezi a feladat. Az ábra szimmetrikus az AB egyenesre, valamint az AB szakasz O felezőpontjára. Mindezekből következik, hogy az O pont egyben a négyzet középpontja is, ezért $AOG\sphericalangle = 135°$. Ha a GO szakasz hosszát x jelöli, akkor az AOG háromszögben a koszinusztétel alapján:



$$AG^2 = AO^2 + GO^2 - 2 \cdot AO \cdot GO \cdot \cos 135°,$$

$$4^2 = 2^2 + x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből rendezés után:

$$x^2 + 2\sqrt{2} \cdot x - 12 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \sqrt{14} - \sqrt{2} \quad \text{és} \quad x_2 = -\sqrt{14} - \sqrt{2}.$$

Mivel x_2 negatív, ezért:

$$x = \sqrt{14} - \sqrt{2} \approx 2{,}33 \text{ cm}.$$

Az $EFGH$ négyzet átlója $2x$, ezért a négyzet oldala:

$$a = x\sqrt{2} = \left(\sqrt{14} - \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{7} - 2 \approx 3{,}29 \text{ cm}.$$

A négyzet alakú tészták területe:

$$a^2 = 32 - 8\sqrt{7} \approx 10{,}83 \text{ cm}^2.$$

A térfogat fogalma, a hasáb és a henger térfogata – megoldások

4297 *a)* A kocka lapátlója: $7{,}5\sqrt{2} \approx 10{,}61$ cm.

b) A kocka testátlója: $7{,}5\sqrt{3} \approx 12{,}99$ cm.

4298 *a)* A kocka felszíne: 1200 cm^2.

b) A kocka térfogata: $2000\sqrt{2} \approx 2828{,}43 \text{ cm}^3$.

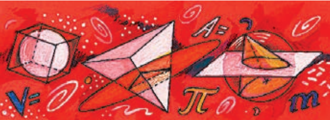
4299 *a)* A kocka felszíne: $100{,}77 \text{ cm}^2$.

b) A kocka térfogata: $68{,}82 \text{ cm}^3$.

4300 A két kocka éle 7 cm és 12 cm.

4301 A négyzetes oszlop térfogata: 250 cm^3.

4302 A téglatest felszíne: 286 cm^2.



4303 A tekercs 162 g alumíniumból készült.

4304 Egy raklapnyi tégla tömege: 1,085 tonna.

4305 *a)* A téglatest térfogata: $1080\ \text{cm}^3$.
b) A téglatest felszíne: $636\ \text{cm}^2$.

4306 *a)* A hasáb felszíne: $72\sqrt{3} + 720 \approx 844{,}71\ \text{cm}^2$.
b) A hasáb térfogata: $720\sqrt{3} \approx 1247{,}08\ \text{cm}^3$.

4307 *a)* A hasáb felszíne: $1728\sqrt{3} + 6048 \approx 9040{,}98\ \text{cm}^2$.
b) A hasáb térfogata: $36\,288\sqrt{3} \approx 62\,852{,}66\ \text{cm}^3$.

4308 *a)* A hasáb felszíne: $18\sqrt{91} + 760 \approx 931{,}71\ \text{cm}^2$.
b) A hasáb térfogata: $180\sqrt{91} \approx 1717{,}09\ \text{cm}^3$.

4309 A hasáb egy éle: 5 cm.

4310 A hasáb térfogata: $3888\ \text{cm}^3$.

4311 A ferde hasáb térfogata: $5508{,}32\ \text{cm}^3$.

4312 A forgástest térfogata: $125\pi \approx 392{,}70\ \text{cm}^3$, a felszíne: $100\pi \approx 314{,}16\ \text{cm}^2$.

4313 *a)* A forgástest térfogata: $360\pi \approx 1130{,}97\ \text{cm}^3$, a felszíne: $192\pi \approx 603{,}19\ \text{cm}^2$.
b) A forgástest térfogata: $300\pi \approx 942{,}48\ \text{cm}^3$, a felszíne: $170\pi \approx 534{,}07\ \text{cm}^2$.

4314 A pohárba megközelítőleg 1,70 dl víz fér.

4315 A körhenger térfogata: $288\pi \approx 904{,}78\ \text{cm}^3$, a felszíne: $176\pi \approx 552{,}92\ \text{cm}^2$.

4316 A körhenger térfogata lehet $1080\pi \approx 3392{,}92\ \text{cm}^3$ vagy $2700\pi \approx 8482{,}30\ \text{cm}^3$.

4317 A bögre térfogata megközelítőleg 3,85 dl, így elfér benne a kakaó.

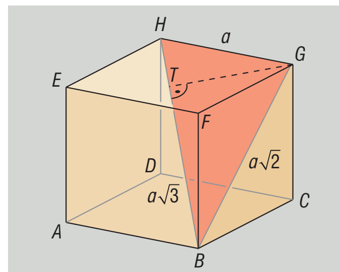
4318 A körhenger felszíne: $231{,}83\ \text{cm}^2$, térfogata: $225{,}08\ \text{cm}^3$.

4319 A henger térfogata: $425\pi \approx 1335{,}18\ \text{cm}^3$.

4320 A henger térfogata: $1536\pi \approx 4825{,}49\ \text{cm}^3$.

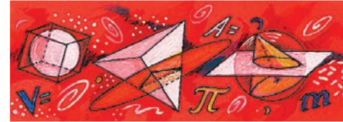
4321 *a)* A test $8 \cdot 1 + 12 \cdot 3 = 44$ egységkockából áll, tehát térfogata 44 térfogategység.
b) Az eredeti kocka 6 oldallapjából $6 \cdot \left(5^2 - 3^2\right) = 96$ területegység maradt meg, ehhez még a 12 él mentén belül $12 \cdot 6 = 72$ területegység adódik, tehát a test felszíne 168 területegység.

4322 Az ábrán látható a élű kocka HB testátlójának a G csúcstól mért távolsága GT. A BGH derékszögű háromszög területét kétféleképpen felírva:



$$\frac{a\sqrt{3} \cdot GT}{2} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2},$$
$$\frac{a\sqrt{3} \cdot 16{,}33}{2} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2},$$
$$a \approx 20.$$

A kocka térfogata $8000\ \text{cm}^3$.



4323 Befektető Béla mobiltelefonjának térfogata:

$$V = abc = 108{,}8 \cdot 46{,}2 \cdot 11{,}7 \approx 58\,810{,}75\ \text{mm}^3 = 58{,}81075\ \text{cm}^3.$$

a) Az aranyrúd tömege:

$$m = V \cdot \rho = 1135{,}05\ \text{gramm}.$$

b) Az aranyrúd $\frac{1135{,}05}{31{,}103} = 36{,}49$ uncia tömegű, amelynek ára:

$$36{,}49 \cdot 1161 \cdot 182 \approx 7\,710\,410\ \text{forint}.$$

c) A 7000 tonna arany térfogata $362{,}69\ \text{m}^3$. Ha ennyi aranyat hézagmentesen elhelyeznének a 10×20 méteres medencébe, akkor „csak” $1{,}81\ \text{m}$ magasan állna benne az arany, tehát a teljes mennyiség elférne az úszómedencében.

4324 A csomag hosszúsága legyen $3x$, szélessége $2x$, magassága x:

$$2 \cdot 3x + 4 \cdot 2x + 6 \cdot x + 20 = 260 \quad \Rightarrow \quad x = 12.$$

a) A csomag oldalélei: 36 cm, 24 cm és 12 cm.

b) A becsomagoláshoz szükséges papír területe:

$$\frac{A}{0{,}96} = \frac{2 \cdot (ab + ac + bc)}{0{,}96} =$$

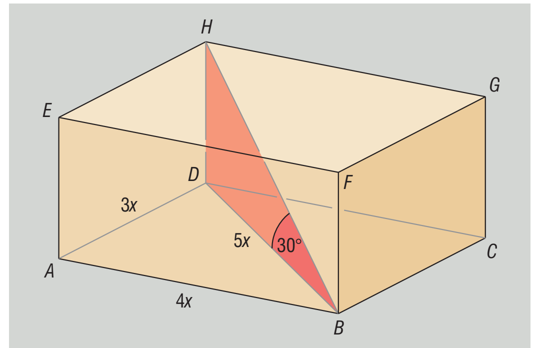
$$= \frac{2 \cdot (36 \cdot 24 + 36 \cdot 12 + 12 \cdot 24)}{0{,}96} = 3300\ \text{cm}^2 = 33\ \text{dm}^2.$$

c) A téglatest testátlója:

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{36^2 + 24^2 + 12^2} \approx 44{,}90\ \text{cm},$$

tehát nem fér el a csomagban egy 50 cm hosszú rúd.

4325 Legyen a téglatest $ABCD$ lapjának két éle $3x$ és $4x$ hosszúságú. Az ábra jelöléseit használva láthatjuk, hogy a $BDH_\triangle$ egy szabályos háromszög fele. A háromszög hosszabbik befogója az $5x$ hosszúságú lapátló, a rövidebbik befogó a téglatest harmadik éle, az átfogó pedig a téglatest testátlója.



A háromszögben ismert összefüggések alapján a téglatest harmadik élének hossza:

$$HD = \frac{HB}{2} = \frac{50}{2} = 25\ \text{cm},$$

illetve a téglatest 50 cm-es HB testátlójára fennáll:

$$50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5x \quad \Rightarrow \quad x = 5\sqrt{3}.$$

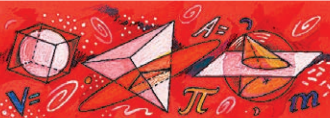
A téglatest éleinek hossza: $15\sqrt{3}$ cm, $20\sqrt{3}$ cm és 25 cm.

a) A téglatest felszíne:

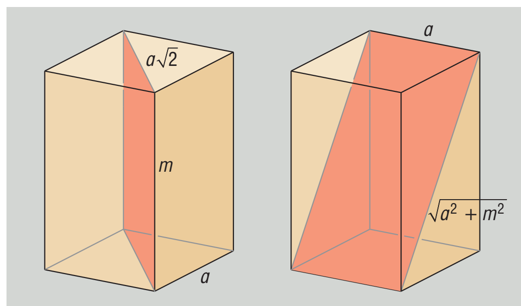
$$A = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 2 \cdot \left(15\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{3} + 15\sqrt{3} \cdot 25 + 20\sqrt{3} \cdot 25\right) =$$
$$= 1800 + 1750\sqrt{3} \approx 4831{,}09\ \text{cm}^2.$$

b) A téglatest térfogata:

$$V = a \cdot b \cdot c = 15\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{3} \cdot 25 = 22\,500\ \text{cm}^3.$$



4326 Legyen a négyzet alapú egyenes hasáb alapéle a, oldaléle m hosszúságú.



A síkmetszetek területéből:

$$\left.\begin{aligned} a\sqrt{2}\cdot m &= 60\sqrt{2} \\ a\sqrt{a^2+m^2} &= 65 \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszert megoldva: $a = 5,\ m = 12$.

a) A hasáb felszíne: $A = 2a^2 + 4am = 290\ \text{cm}^2$.

b) A hasáb térfogata: $V = a^2 \cdot m = 300\ \text{cm}^3$.

4327 Az ötszög területe: $T = 5 \cdot \dfrac{8^2 \cdot \sin^2 54^\circ}{2 \cdot \sin 72^\circ}$.

a) A hasáb felszíne:

$$A = 2T + k \cdot m = 2 \cdot 5 \cdot \frac{8^2 \cdot \sin^2 54^\circ}{2 \cdot \sin 72^\circ} + 40 \cdot 22 \approx 1100{,}22\ \text{cm}^2.$$

b) A hasáb térfogata:

$$V = T \cdot m = 5 \cdot \frac{8^2 \cdot \sin^2 54^\circ}{2 \cdot \sin 72^\circ} \cdot 22 \approx 2422{,}43\ \text{cm}^3.$$

4328 *a)* A szabályos nyolcszög alapú hasáb

alapéle: $a = 2 \cdot 15 \cdot \sin 22{,}5^\circ$;

fedőlapjának területe: $T = 8 \cdot \dfrac{15^2 \cdot \sin 45^\circ}{2}$.

A bevonandó felület:

$$T + 8 \cdot am = 8 \cdot \frac{15^2 \cdot \sin 45^\circ}{2} + 8 \cdot 2 \cdot 15 \cdot \sin 22{,}5^\circ \cdot 8 \approx 1371{,}15\ \text{cm}^2.$$

b) A szabályos tízszög alapú hasáb

alapéle: $b = 2 \cdot 15 \cdot \sin 18^\circ$;

fedőlapjának területe: $T' = 10 \cdot \dfrac{15^2 \cdot \sin 36^\circ}{2}$.

A bevonandó felület:

$$T' + 10 \cdot bm' = 10 \cdot \frac{15^2 \cdot \sin 36^\circ}{2} + 10 \cdot 2 \cdot 15 \cdot \sin 18^\circ \cdot 10 \approx 1588{,}31\ \text{cm}^2.$$

A Vera 10. születésnapjára készült tortán a bevonandó felület $\dfrac{1588{,}31}{1371{,}15} \cdot 100 - 100 \approx 15{,}84$ százalékkal lesz nagyobb, mint a 8. születésnapjára készített tortán.

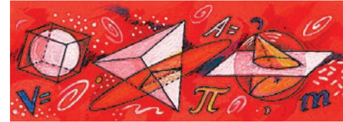
4329 Ha a hasáb alapéle a, akkor a befestendő terület:

$$t + A_{\text{palást}} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 2{,}5 \cdot 3 \cdot a = 6{,}28\ \text{m}^2.$$

Rendezés után a megoldandó másodfokú egyenlet:

$$\sqrt{3} \cdot a^2 + 30a - 25{,}12 = 0.$$

Az egyenlet pozitív megoldása 0,80. A hirdetőoszlop alapéle 80 cm.



4330 Mivel a hasáb két oldallapja $70°31'$-os szöget zár be, és a területük aránya $2:3$, az alaplap olyan háromszög, amelyben két oldal hosszát felírhatjuk $2x$ és $3x$ alakban, a két oldal által bezárt szög pedig $70°31'$.

Mivel a hasáb harmadik oldallapjának területe $120\ \text{cm}^2$, és a hasáb magassága $20\ \text{cm}$, a háromszög harmadik oldala $6\ \text{cm}$ hosszú.

A koszinusztételt felírva a háromszögben:

$$6^2 = (2x)^2 + (3x)^2 - 2\cdot(2x)\cdot(3x)\cdot\cos 70°31' \quad\Rightarrow\quad x \approx 2.$$

Az alaplap oldalélei $4\ \text{cm}$, $6\ \text{cm}$ és $6\ \text{cm}$ hosszúak.

A hasáb térfogata:

$$V = T\cdot m = \frac{4\cdot 6\cdot\sin 70°31'}{2}\cdot 20 \approx 226{,}26\ \text{cm}^3.$$

4331 A csatorna keresztmetszetének területe:

$$T = \frac{a+c}{2}\cdot m_{\text{trapéz}} = \frac{6+8}{2}\cdot 3 = 21\ \text{m}^2.$$

a) A csatorna egy óra alatt legfeljebb annyi vizet tud elvezetni, amennyi egy $21\ \text{m}^2$ alapterületű és $1{,}4\cdot 3600 = 5040\ \text{m}$ magasságú hasáb térfogata:

$$V = T\cdot m = 21\cdot 5040 = 105\,840\ \text{m}^3.$$

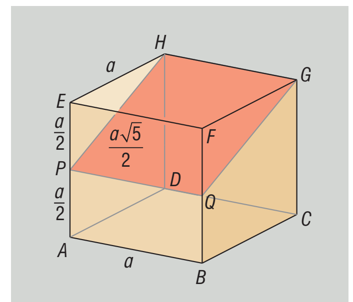
b) Ha a csatorna félig van vízzel, akkor a víz egy olyan trapéz alakú keresztmetszeten folyik le, amelynek alapjai $6\ \text{m}$ és $\frac{6+8}{2} = 7\ \text{m}$, magassága $1{,}5\ \text{m}$. A keresztmetszet területe:

$$T' = \frac{7+6}{2}\cdot 1{,}5 = 9{,}75\ \text{m}^2.$$

Így a csatorna által egy óra alatt elvezetett vízmennyiség annyi, mint egy $9{,}75\ \text{m}^2$ alapterületű és $0{,}9\cdot 3600 = 3240\ \text{m}$ magasságú hasáb térfogata:

$$V = T'\cdot m = 9{,}75\cdot 3240 = 31\,590\ \text{m}^3.$$

4332 A kocka éle $a = 10\ \text{cm}$. A feladatban megadott sík az ábrán látható kockát két a magasságú hasábra vágja ketté.



A $PEHQFG$ hasáb alaplapja a PEH derékszögű háromszög, amelynek befogói a és $\frac{a}{2}$ hosszúságúak, átfogója pedig $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ hosszúságú.

A PEH háromszög területe és kerülete:

$$T_{PEH} = \frac{a^2}{4} \qquad \text{és} \qquad k_{PEH} = \frac{3a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

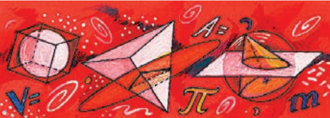
A $PEHQFG$ hasáb térfogata és felszíne:

$$V_{PEHQFG} = T_{PEH}\cdot a = \frac{a^3}{4} = 250\ \text{cm}^3,$$

$$A_{PEHQFG} = 2\cdot T_{PEH} + k_{PEH}\cdot a = 2\cdot\frac{a^2}{4} + \left(\frac{3a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}\right)\cdot a = \frac{4+\sqrt{5}}{2}\cdot a^2 \approx 311{,}80\ \text{cm}^3.$$

Az $ABCDPQGH$ hasáb térfogatát megkapjuk úgy, hogy a kocka térfogatából kivonjuk a $PEHQFG$ hasáb térfogatát:

$$V_{ABCDPQGH} = 1000 - 250 = 750\ \text{cm}^3.$$



Az *ABCDPQGH* hasáb alaplapja a *PADH* derékszögű trapéz, melynek területe és kerülete:

$$T_{PADH} = \frac{3a^2}{4} \quad \text{és} \quad k_{PADH} = \frac{5a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Az *ABCDPQGH* hasáb felszíne:

$$A_{ABCDPQGH} = 2 \cdot T_{PADH} + k_{PADH} \cdot a = 2 \cdot \frac{3a^2}{4} + \left(\frac{5a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2}\right) \cdot a =$$
$$= \frac{8+\sqrt{5}}{2} \cdot a^2 \approx 511{,}80 \text{ cm}^2.$$

4333 A paralelepipedon alaplapjának területe:

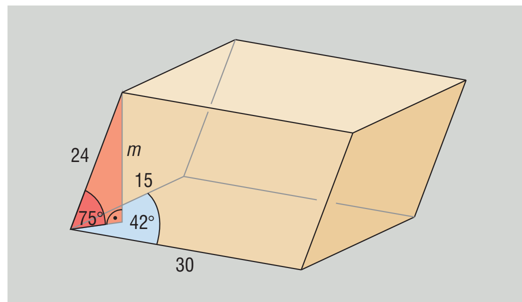
$$T = 15 \cdot 30 \cdot \sin 42°.$$

A paralelepipedon magassága:

$$m = 24 \cdot \sin 75°.$$

A paralelepipedon térfogata:

$$V = T \cdot m = 15 \cdot 30 \cdot \sin 42° \cdot 24 \cdot \sin 75° \approx$$
$$\approx 6980{,}37 \text{ cm}^3.$$



4334 Ha az úszómedencében 90 cm magasan áll a víz, akkor a benne lévő víz térfogata:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = 1{,}8^2 \cdot \pi \cdot 0{,}9 \text{ m}^3.$$

a) Mivel a csapból óránként $30 \cdot 60 = 1800$ liter $= 1{,}8 \text{ m}^3$ víz folyik, a medence ennyi vízzel

$$\frac{1{,}8^2 \cdot \pi \cdot 0{,}9}{1{,}8} \approx 5{,}09$$

óra alatt tölthető fel.

b) A vízdíjunk éves emelkedése:

$$6 \cdot V \cdot 542 = 6 \cdot 1{,}8^2 \cdot \pi \cdot 0{,}9 \cdot 542 = 29\,791 \text{ forint}.$$

4335 Az *a* élű építőkocka térfogata egyenlő egy olyan henger térfogatával, amely alapkörének sugara 11 cm, magassága 1 cm:

$$a^3 = r^2 \cdot \pi \cdot m = 11^2 \cdot \pi \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad a \approx 7{,}24.$$

Bendegúz építőkockája 7,24 cm élű.

4336 A maximálisan felfogható csapadék mennyisége:

$$V_f = T \cdot m_1 = 120 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 0{,}96 \text{ m}^3.$$

A hordó térfogata:

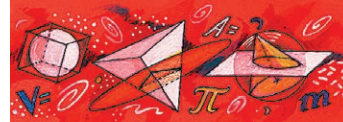
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m_2 = 0{,}4^2 \cdot \pi \cdot 1{,}2 = 0{,}60 \text{ m}^3,$$

tehát a hordó megtelt esővízzel.

4337 A kád egyszeri festéséhez a kád palástját és alaplapját kétszer kell lefesteni. Háromszori festéshez a lefestendő terület:

$$A = 3 \cdot 2 \cdot (r^2 \cdot \pi + 2r \cdot \pi \cdot m) = 3 \cdot 2 \cdot (0{,}75^2 \cdot \pi + 1{,}5\pi \cdot 1{,}5) \approx 53{,}01 \text{ m}^2,$$

ennek lefestéséhez 2,39 kg festék szükséges.



4338 A cső külső átmérője $5{,}4 + 0{,}6 = 6$ cm, tehát az elkészítéséhez szükséges fém térfogata:

$$V = \pi \cdot \left(r_1^2 - r_2^2\right) \cdot m_{test} = \pi \cdot \left(3^2 - 2{,}7^2\right) \cdot 200 \approx 1074{,}42 \text{ cm}^3.$$

A cső tömege:

$$m = V \cdot \rho = 1074{,}42 \cdot 7{,}2 \approx 7736 \text{ g} \approx 7{,}74 \text{ kg}.$$

4339 A henger magassága:

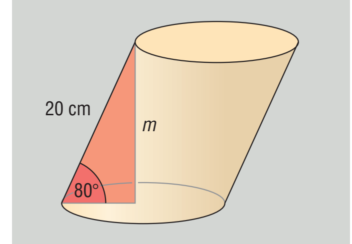
$$m = 20 \cdot \sin 80°,$$

az alapkörének sugara:

$$r = 10 \cdot \sin 80°.$$

A henger térfogata:

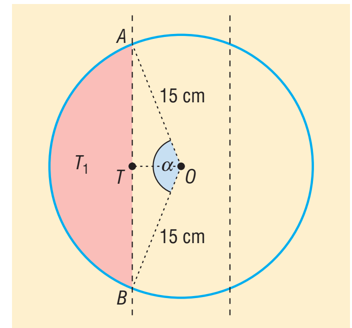
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m \approx 6001 \text{ cm}^3.$$



4340 A fahasáb alaplapját a párhuzamos síkok három részre osztják. A mellékelt ábrán látható színezett körszelet T_1 területének meghatározásához először ki kell számítanunk az $\alpha = AOB\sphericalangle$ középponti szöget.

Mivel az átmérőt az AB húr harmadolja, az AOB egyenlő szárú háromszög AB oldalához tartozó OT magassága 5 cm, így:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{15} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 141{,}06°.$$



A körszelet területe:

$$T_1 = 15^2 \cdot \pi \cdot \frac{141{,}06°}{360°} - \frac{15^2 \cdot \sin 141{,}06°}{2} \approx 206{,}26 \text{ cm}^2.$$

Az egyik levágott rész térfogata:

$$V_1 = T_1 \cdot m_{test} \approx 9281{,}7 \text{ cm}^3,$$

tömege:

$$m_1 = V_1 \cdot \rho = 9281{,}7 \cdot 0{,}71 \approx 6590 \text{ g} = 6{,}59 \text{ kg}.$$

A másik levágott rész ezzel egybevágó, tehát ugyanekkora a tömege.

Az egész hasáb térfogata:

$$V = 15^2 \cdot \pi \cdot 45 \approx 31\,808 \text{ cm}^3,$$

tömege:

$$m = V \cdot \rho = 31\,808 \cdot 0{,}71 \approx 22\,580 \text{ g} = 22{,}58 \text{ kg}.$$

A harmadik rész tömegét megkapjuk úgy, hogy az egész fahasáb tömegéből kivonjuk az m_1 tömeg kétszeresét:

$$m_2 = m - 2 \cdot m_1 \approx 9{,}40 \text{ kg}.$$

A keletkezett részek tömege: 6,59 kg, 6,59 kg és 9,40 kg.

4341 A téglatest élei legyenek a, b és c hosszúságúak. A feladat feltétele szerint:

$$a + b + c = 18, \quad \text{valamint} \quad e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{110}.$$

Mivel

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc),$$

az előzőeket felhasználva:

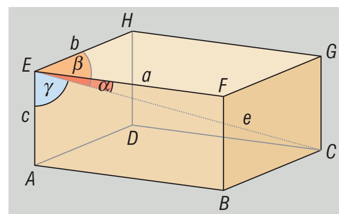
$$18^2 = 110 + 2 \cdot (ab + ac + bc).$$

A téglatest felszíne:

$$A = 2 \cdot (ab + ac + bc) = 214 \text{ cm}^2.$$



4342 A téglatest éleinek hossza legyen a, b és c. Az e hosszúságú testátlónak az élekkel bezárt szöge legyen α, β és γ.



A szögek koszinuszai:

$$\cos\alpha = \frac{a}{e}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{e}, \qquad \cos\gamma = \frac{c}{e}.$$

Mivel $e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, a koszinuszok négyzetösszege:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{e^2} + \frac{b^2}{e^2} + \frac{c^2}{e^2} = 1.$$

a) Az előzőek alapján:

$$\cos^2 23° + \cos^2 72° + \cos^2\gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma \approx 76{,}17°.$$

A testátlónak a harmadik éllel bezárt szöge $76{,}17°$.

b) A téglatest éleinek hossza:

$$a = 80 \cdot \cos 23°, \quad b = 80 \cdot \cos 72° \quad \text{és} \quad c = 80 \cdot \cos 76{,}17°.$$

A téglatest térfogata:

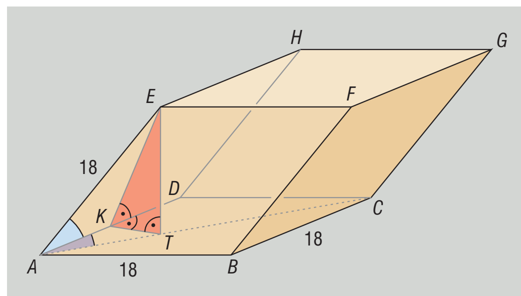
$$V = 80^3 \cdot \cos 23° \cdot \cos 72° \cdot \cos 76{,}17° \approx 34\,813{,}88 \text{ cm}^3.$$

4343 *a)* A romboédert hat egybevágó rombusz határolja. Egy rombusz területe:

$$T_{\text{rombusz}} = 18^2 \cdot \sin 60° = 162\sqrt{3},$$

tehát a romboéder felszíne:

$$A = 6 \cdot T_{\text{rombusz}} = 6 \cdot 162\sqrt{3} = 972\sqrt{3} = $$
$$= 1683{,}55 \text{ cm}^2.$$



b) Az ábrán látható $ABCDEFGH$ romboéder tengelyesen szimmetrikus az $ACGE$ testátló síkjára, ezért az E csúcsból az $ABCD$ alaplapra bocsátott merőleges T talppontja rajta van az AC lapátlón. Az E csúcsból az AD oldalélre bocsátott merőleges talppontja legyen K. A három merőleges egyenes tétele alapján KT egyenese is merőleges az AD oldal egyenesére.

Az AKE derékszögű háromszögben:

$$AK = 18 \cdot \cos 60°,$$
$$EK = 18 \cdot \sin 60° = 9\sqrt{3}.$$

Mivel $ABCD$ rombusz, és T pont rajta van az AC lapátlón, ezért a $KAT\sphericalangle = 30°$. Az ATK derékszögű háromszögben:

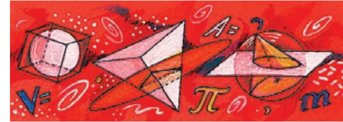
$$KT = AK \cdot \text{tg}\,30° = 18 \cdot \cos 60° \cdot \text{tg}\,30° = 3\sqrt{3}.$$

A romboéder ET magasságának hosszát a KTE derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével számolhatjuk:

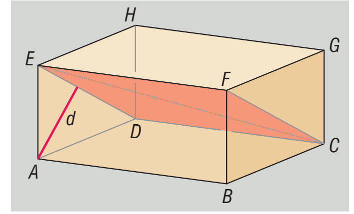
$$m = ET = \sqrt{EK^2 - KT^2} = \sqrt{\left(9\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{216} = 6\sqrt{6}.$$

A romboéder térfogata:

$$V = T_{\text{rombusz}} \cdot m = 162\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{6} = 2916\sqrt{2} \approx 4123{,}85 \text{ cm}^3.$$



4344 A téglatest EC testátlóját tartalmazza az AB éllel párhuzamos $EFCD$ sík. Az EC és AB kitérő egyenesek távolságának meghatározásához elég kiszámítani az $EFCD$ sík és az AB egyenesének d távolságát.



Az $ADHE$ sík merőleges az $EFCD$ síkra, így a d távolság a téglatest A csúcsának ED lapátlótól mért távolsága.

Legyen $AE = 3x$, $AD = 4x$ és $AB = 5x$ hosszúságú. Az ED lapátló a Pitagorasz-tétel alapján $5x$ hosszúságú. Az ADE derékszögű háromszög területét kétféleképpen számolva:

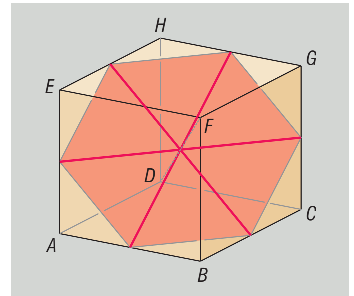
$$\frac{3x \cdot 4x}{2} = \frac{5x \cdot d}{2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{12}{5}x.$$

A feladat feltétele szerint $d = 2{,}4$ m, így $x = 1$.

A téglatest élei 3 m, 4 m és 5 m hosszúak, így a téglatest térfogata:

$$V = abc = 60\ \text{m}^3.$$

4345 Az ábrán látható kocka éle legyen a hosszúságú. Pitagorasz tétele alapján az F és D csúcsoktól a feladatban szereplő élek felezőpontjának mindegyike $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ távolságra van, tehát az FD szakasz felezőmerőleges síkja mind a hat pontot tartalmazza. A felezőpontok síkbeli hatszöget határoznak meg.

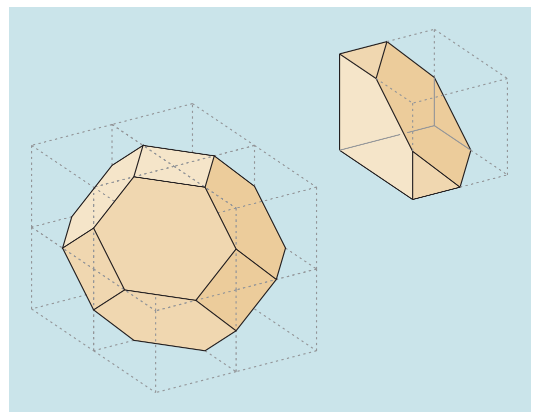


A hat felezőpontot rendre összekötő szakaszok mindegyikének hossza feleakkora, mint a kocka egy lapátlója, tehát a hatszög mindegyik oldala egyenlő hosszú.

Ezen hatszög köré kör írható, mivel a kocka éleinek felezőpontjai a kocka középpontjától feleolyan távol vannak, mint a kocka egy lapátlójának hossza.

Az a síkbeli hatszög, amely köré kör írható és oldalai egyenlő hosszúak, szabályos hatszög. Ezzel az állításunkat bebizonyítottuk.

4346 Képzeletben vágjuk a nagy a élű kockát 8 egybevágó kis kockára. A 4345. feladat alapján tudjuk, hogy az új test lapjai minden ilyen kis kockát szabályos hatszögben metszenek.



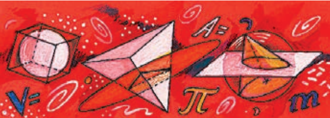
a) A kis kockát metsző sík a kis kockát két egybevágó testre vágja szét, mivel a létrejött egyik test a másiknak a kis kocka középpontjára vonatkozó tükörképe. Ebből következik, hogy a két rész térfogata is egyenlő.

Minden kis kocka térfogatának fele tartozik az új testhez, tehát a test térfogata:

$$V = \frac{a^3}{2} = \frac{12^3}{2} = 864\ \text{cm}^3.$$

b) Az új testet határoló négyzetek átlói feleolyan hosszúak, mint a nagy kocka éle, tehát területe:

$$T_{\text{négyzet}} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{a^2}{8} = 18\ \text{cm}^2.$$



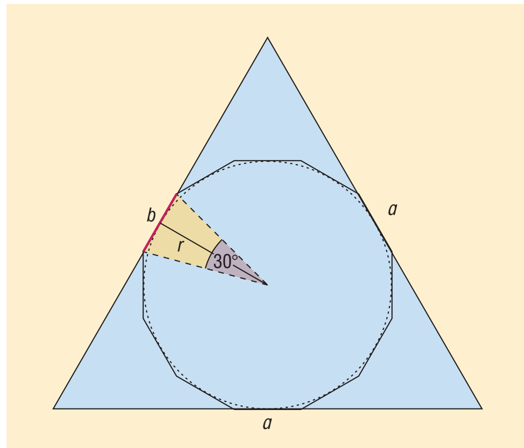
Az új testet határoló nyolc szabályos hatszög oldaléle a nagy kocka lapátlójának negyede, tehát területe:

$$T_{\text{hatszög}} = 6 \cdot \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{16}.$$

A test felszíne:

$$A = 6 \cdot T_{\text{négyzet}} + 8 \cdot T_{\text{hatszög}} = 6 \cdot 18 + 8 \cdot 27\sqrt{3} =$$
$$= 108 + 216\sqrt{3} \approx 482{,}12 \text{ cm}^2.$$

4347 Legyen a hasáb alaplapja a oldalú szabályos háromszög.



Ha a háromszögből szabályos tizenkétszöget akarunk készíteni, beírható körének sugara legfeljebb akkora lehet, mint a szabályos háromszögbe írható kör sugara.

Mivel a szabályos háromszög 120°-ra nézve, a szabályos tizenkétszög pedig 30°-ra nézve forgásszimmetrikus, ezért a háromszögből ki lehet vágni egy olyan szabályos tizenkétszöget, amelynek beírható köre egyben a háromszög beírható köre is.

Ennek a körnek a sugara a szabályos háromszög magasságának harmada:

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

a) A szabályos tizenkétszög b oldaléle egy olyan egyenlő szárú háromszög alapja, amelynek szárszöge 30°, az alaphoz tartozó magassága pedig r.

Ebből következően:

$$b = 2r \cdot \text{tg}\,15° = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \text{tg}\,15° \approx 0{,}15 \text{ m}.$$

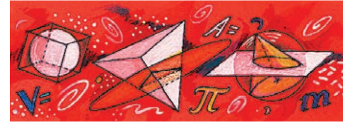
A hasáb alapéle 0,15 m.

b) Az elszállítandó hulladék térfogata a háromszög alapú és tizenkétszög alapú hasáb térfogatának a különbsége:

$$V = T_{\text{háromszög}} \cdot m - T_{\text{tizenkétszög}} \cdot m = m \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 12 \cdot \frac{b \cdot r}{2}\right) =$$
$$= m \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - 12 \cdot \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \text{tg}\,15° \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{2}\right) =$$
$$= \frac{1{,}5 \cdot 1^2}{4} \cdot \left(\sqrt{3} - 4 \cdot \text{tg}\,15°\right) \approx 0{,}2476 \text{ m}^3 = 247{,}6 \text{ dm}^3.$$

A hulladék tömege:

$$m_{\text{hulladék}} = V \cdot \rho = 247{,}6 \cdot 2{,}85 \approx 705{,}66 \text{ kg}.$$



4348 A téglatest élei legyenek a, b és c hosszúságúak.

Írjuk fel a számtani és mértani közép közti összefüggést az ab, ac és bc pozitív kifejezésekre:

$$\frac{ab+ac+bc}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc},$$
$$2 \cdot (ab+ac+bc) \geq 6 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2},$$
$$A \geq 6 \cdot \sqrt[3]{V^2}.$$

Egy téglatest felszíne mindig nagyobb vagy egyenlő, mint a térfogata négyzetéből vont köbgyök hatszorosa.

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az ab, ac és bc kifejezések számtani és mértani középe egyenlő.

Ismert, hogy ez csak akkor teljesül, ha:

$$ab = ac = bc \quad \Leftrightarrow \quad a = b = c.$$

A $125\ \text{cm}^3$ térfogatú téglatestek közül az $5\ \text{cm}$ élű kocka felszíne a legkisebb.

4349 A henger alapkörének sugara legyen r, magassága m.

A henger felszíne:

$$A = 2r \cdot \pi \cdot (r+m),$$
$$m = \frac{A}{2r \cdot \pi} - r.$$

A henger térfogata:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m.$$

A térfogat kifejezésébe helyettesítsük be m-et, így a térfogatot r függvényeként írjuk fel:

$$V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{A}{2r \cdot \pi} - r\right) = r \cdot \frac{A}{2} - r^3 \cdot \pi, \qquad r \in \mathbb{R}^+.$$

Ennek a függvénynek ott lehet maximuma, ahol az első deriváltja 0:

$$V'(r) = \frac{A}{2} - 3r^2 \cdot \pi.$$

Pozitív r-eket tekintve, ennek a függvénynek $r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ helyen van zérushelye.

Az első derivált előjele, ha $0 < r < \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$, akkor pozitív, ha $\sqrt{\frac{A}{6\pi}} < r$, akkor negatív, tehát $r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}$ esetén $V(r)$ függvénynek maximuma van.

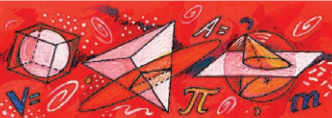
Az egyenlő felszínű egyenes körhengerek közül annak a térfogata maximális, amely alapkörének sugara:

$$r = \sqrt{\frac{A}{6\pi}},$$

magassága:

$$m = \frac{A}{2r \cdot \pi} - r = \frac{A}{2 \cdot \sqrt{\frac{A}{6\pi}} \cdot \pi} - \sqrt{\frac{A}{6\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{6\pi}}.$$

A henger térfogata tehát akkor a legnagyobb, ha alapkörének átmérője és magassága egyenlő hosszú.



A gúla és a kúp térfogata

4350 A táblázat hiányzó adatai:

Alaplap	Alapél	Oldalél	Testmagasság	Felszín	Térfogat
négyzet	10 cm	$\sqrt{534}$ cm	22 cm	$100+20\sqrt{509}\approx 551{,}22$ cm^2	$\frac{2200}{3}\approx 733{,}33$ cm^3
négyzet	2 dm	26 cm	$2\sqrt{119}$ cm	1360 cm^2	$\frac{800\sqrt{119}}{3}\approx 2908{,}99$ cm^3
négyzet	$10\sqrt{10}\approx 31{,}62$ cm	30 cm	20 cm	$1000+200\sqrt{65}\approx 2612{,}45$ cm^2	$\frac{20000}{3}\approx 6666{,}67$ cm^3
négyzet	20 cm	$2\sqrt{491}\approx 44{,}32$ cm	42 cm	$400+80\sqrt{466}\approx 2126{,}96$ cm^2	5600 cm^3
szabályos háromszög	12 dm	$8\sqrt{7}\approx 21{,}17$ cm	20 cm	$36\sqrt{3}+36\sqrt{103}\approx 427{,}71$ cm^2	$240\sqrt{3}\approx 415{,}69$ cm^3
szabályos háromszög	18 cm	15 cm	$3\sqrt{13}\approx 10{,}82$ cm	$324+81\sqrt{3}\approx 464{,}30$ cm^2	$81\sqrt{39}\approx 505{,}84$ cm^3
szabályos hatszög	12 cm	$4\sqrt{34}\approx 23{,}32$ cm	20 cm	$216\sqrt{3}+72\sqrt{127}\approx 1185{,}52$ cm^2	$1440\sqrt{3}\approx 2494{,}15$ cm^3
szabályos hatszög	24 cm	30 cm	18 cm	$864\sqrt{3}+432\sqrt{21}\approx 3476{,}16$ cm^2	$5184\sqrt{3}\approx 8978{,}95$ cm^3

4351 *a)* A Kheopsz-piramis térfogata:

$$V=\frac{T\cdot m}{3}\approx 2655317\text{ m}^3\approx 2{,}66\text{ km}^3.$$

b) A Kheopsz-piramis alaplapjának és az oldallapjának a hajlásszöge megközelítőleg 52°.

4352 *a)* A gúla felszíne:

$$A=T_{alap}+A_{palást}=100\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)\approx 241{,}42\text{ cm}^2.$$

b) A gúla térfogata:

$$V=\frac{T\cdot m}{3}=\frac{500}{3}\approx 166{,}67\text{ cm}^3.$$

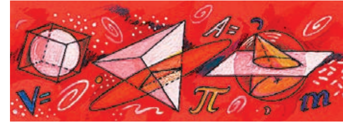
4353 *a)* A gúla alapéle: 18 cm.

b) A gúla felszíne:

$$A=T_{alap}+A_{palást}=324+108\sqrt{13}\approx 713{,}40\text{ cm}^2.$$

4354 A táblázat hiányzó adatai:

Alapkör sugara	Kúp magassága	Alkotó hossza	Felszín	Térfogat
6 cm	10 cm	$2\sqrt{34}\approx 11{,}66$ cm	$12\pi\cdot(3+\sqrt{34})\approx 332{,}92$ cm^2	$120\pi\approx 377{,}00$ cm^3
$10\sqrt{5}\approx 22{,}36$ cm	20 cm	30 cm	$100\pi\cdot(5+3\sqrt{5})\approx 3678{,}24$ cm^2	$\frac{10000}{3}\pi\approx 10471{,}98$ cm^3
7 cm	$5\sqrt{11}\approx 16{,}58$ cm	18 cm	$175\pi\approx 549{,}78$ cm^2	$\frac{245\pi\cdot\sqrt{11}}{3}\approx 850{,}92$ cm^3
10 cm	2 dm	$10\sqrt{5}\approx 22{,}36$ cm	$100\pi\cdot(1+\sqrt{5})\approx 1016{,}64$ cm^2	$\frac{2000}{3}\pi\approx 2094{,}40$ cm^3
8 cm	6 cm	10 cm	$144\pi\approx 452{,}39$ cm^2	$128\pi\approx 402{,}12$ cm^3



4355 *a)* Az egyenes körkúp felszíne: $A \approx 163{,}30\ \text{cm}^2$.
b) Az egyenes körkúp térfogata: $V \approx 138{,}73\ \text{cm}^3$.

4356 A koktélospohárba megközelítőleg 6 dl ital tölthető.

4357 *a)* A forgástest felszíne: $A = 300\pi \approx 942{,}48\ \text{cm}^2$, térfogata: $V = 240\pi \approx 753{,}98\ \text{cm}^3$.
b) A forgástest felszíne: $A = 90\pi \approx 282{,}74\ \text{cm}^2$, térfogata: $V = 100\pi \approx 314{,}16\ \text{cm}^3$.

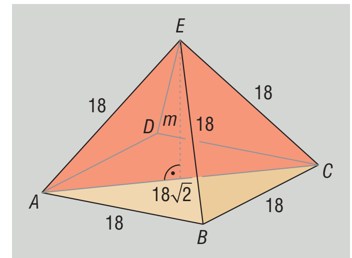
4358 *a)* A forgáskúp alapkörének sugara: $r = \dfrac{10}{3} \approx 3{,}33\ \text{cm}$.
b) A forgáskúp nyílásszöge: $\varphi \approx 49{,}25°$.
c) A forgáskúp térfogata: $V = \dfrac{200\sqrt{119}}{81}\pi \approx 84{,}62\ \text{cm}^3$.
d) A forgáskúp felszíne: $A = \dfrac{340}{9}\pi \approx 118{,}68\ \text{cm}^2$.

4359 A forgáskúp térfogata: $V = \dfrac{125\sqrt{15}}{3\sqrt{\pi}} \approx 91{,}05\ \text{cm}^3$.

4360 A forgáskúp kiterített palástjának középponti szöge 216°.

4361 *a)* Az egyenes körkúp felszíne: $A \approx 802{,}46\ \text{cm}^2$.
b) Az egyenes körkúp térfogata: $V \approx 1487{,}44\ \text{cm}^3$.

4362 Tekintsük a mellékelt ábrát. A Pitagorasz-tétel megfordítása alapján az $ACE_\triangle$ egy olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelynek befogói 18 cm hosszúak. A gúla testmagassága az alaplap AC átlójának a fele:



$$m = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{18\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}.$$

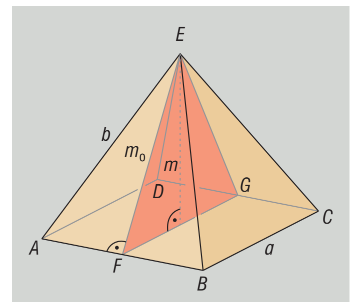
a) A gúla felszíne az alaplap és négy 18 cm oldalú szabályos háromszög területének az összege:

$$A = T + A_{\text{palást}} = 18^2 + 4 \cdot \frac{18^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 18^2 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \approx 885{,}18\ \text{cm}^2.$$

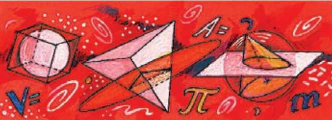
b) A gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{18^2 \cdot 9 \cdot \sqrt{2}}{3} = 972\sqrt{2} \approx 1374{,}62\ \text{cm}^3.$$

4363 Tekintsük a mellékelt ábrát. Legyen a gúla alapéle a hosszúságú. Az $EFG_\triangle$ a feladat szövege szerint szabályos háromszög, így a gúla testmagassága a szabályos háromszög magassága: $m = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, illetve az oldallapok magassága a szabályos háromszög a oldala: $m_o = a$.
A gúla térfogatából adódóan:



$$V = \frac{T \cdot m}{3} \quad \Rightarrow \quad 147{,}8 = \frac{a^2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad a \approx 8.$$



a) A gúla magassága:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93 \text{ cm}.$$

b) A gúla b oldaléle az AFE derékszögű háromszögből számítható:

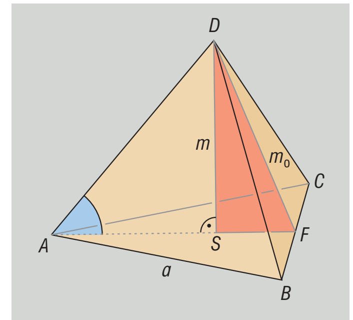
$$b = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8{,}94 \text{ cm}.$$

c) A gúla felszíne:

$$A = T + A_{\text{palást}} = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2} = 8^2 + 4 \cdot \frac{8^2}{2} = 192 \text{ cm}^2.$$

4364 Ha a gúla alaplapjának területe T, akkor egy oldallap területe $\frac{3}{4}T$. Így a gúla felszíne:

$$A = T + 3 \cdot \frac{3}{4}T \quad \Rightarrow \quad 202{,}65 = \frac{13}{4}T \quad \Rightarrow \quad T \approx 62{,}35 \text{ cm}^2.$$



A gúla alaplapja a oldalú szabályos háromszög, ezért:

$$T = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad 62{,}35 = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad a \approx 12 \text{ cm}.$$

A gúla m testmagasságának meghatározásához számítsuk ki az oldallap m_o magasságát az oldallap területéből:

$$T_{\text{oldallap}} = \frac{3}{4}T, \quad \text{azaz} \quad \frac{a \cdot m_o}{2} = \frac{3}{4}T \quad \Rightarrow \quad m_o \approx 7{,}79.$$

Az ábra jelöléseit használva a gúla testmagasságának S talppontja az ABC szabályos háromszög súlypontja.

A súlypont a háromszög AF súlyvonalának a csúcstól távolabbi harmadolópontja. Az SFD derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján a gúla m testmagassága számítható:

$$m = \sqrt{DF^2 - SF^2} = \sqrt{7{,}79^2 - \left(\frac{12\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^2} \approx 6{,}98 \text{ cm}.$$

Így a gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{62{,}35 \cdot 6{,}98}{3} = 145{,}07 \text{ cm}^3.$$

4365 Az ABC alaplap egyenlő szárú derékszögű háromszög, átfogója: $AB = 10\sqrt{2}$, az átfogóhoz tartozó magassága pedig az átfogó fele: $CF = 5\sqrt{2}$.

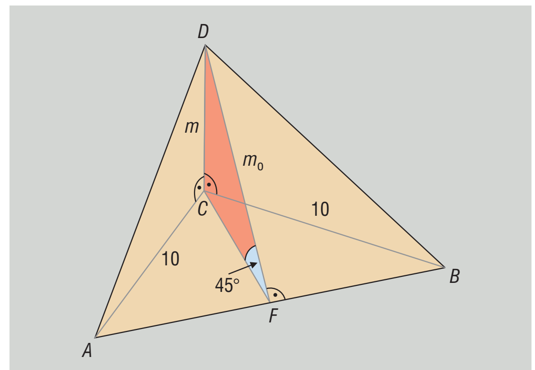
Mivel az ABC alaplap és az ABD oldallap bezárt szöge 45°, az FCD háromszög is egyenlő szárú derékszögű háromszög.

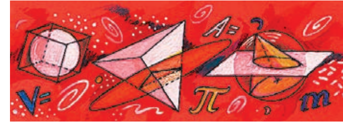
A gúla testmagassága:

$$m = CF = 5\sqrt{2}.$$

Az ABD oldallap magassága:

$$m_o = DF = CF \cdot \sqrt{2} = 10.$$





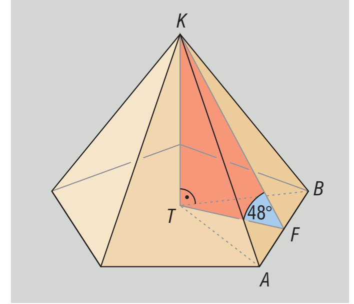
A gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{10^2}{2} \cdot 5\sqrt{2}}{3} \approx 117{,}85 \text{ cm}^3.$$

A gúla felszíne:

$$A = T_{ABC} + 2 \cdot T_{ACD} + T_{ABD} = 50 + 2 \cdot \frac{10 \cdot 5\sqrt{2}}{2} + \frac{10\sqrt{2} \cdot 10}{2} =$$
$$= 50 \cdot \left(1 + 2\sqrt{2}\right) \approx 191{,}42 \text{ cm}^2.$$

4366 A befedendő felület egy olyan szabályos ötoldalú gúla palástjának a területe, amelynek az alapéle 2 m.



Használjuk az ábra jelöléseit. A gúla magasságának talppontja a szabályos ötszög körülírható körének T középpontja. Az ABT egyenlő szárú háromszög alapja $AB = 2$, a T-nél lévő szárszöge $\frac{360°}{5} = 72°$. A háromszög TF magassága: $TF = \frac{1}{\text{tg}\, 36°}$.

A TFK derékszögű háromszögben ismert TF befogó, illetve az F csúcsnál lévő szög:

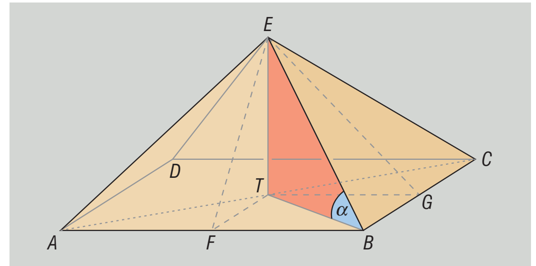
$$KF = \frac{TF}{\cos 48°} = \frac{1}{\text{tg}\, 36° \cdot \cos 48°}.$$

A palást területe:

$$T_{\text{palást}} = 5 \cdot T_{ABK} = 5 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{\text{tg}\, 36° \cdot \cos 48°}}{2} = \frac{5}{\text{tg}\, 36° \cdot \cos 48°} \approx 10{,}28 \text{ m}^2.$$

A tető befedéséhez (a veszteséget is figyelembe véve) $\frac{10{,}28 \cdot 10}{0{,}9} \approx 115$ cserepet kell vásárolnunk.

4367 Tekintsük az ábra jelöléseit. Legyen $AB = 20$ cm és $BC = 12$ cm, felezőpontjaik rendre F és G, valamint a testmagasság talppontja T.



A gúla magassága a térfogatból számítható:

$$m = \frac{3 \cdot V}{T} = \frac{3 \cdot 1200}{12 \cdot 20} = 15 \text{ cm}.$$

Mivel a gúla csúcsából az alaplapra bocsátott merőleges talppontja a téglalap átlóinak metszéspontja, a gúla minden oldaléle egyenlő hosszú, vagyis az oldallap háromszögek egyenlő szárúak.

a) A felszín kiszámításához meg kell határoznunk az ABE illetve a BCE oldallapok magasságait.

Az EFT derékszögű háromszögből:

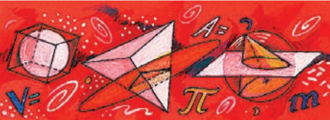
$$EF = \sqrt{ET^2 + FT^2} = \sqrt{15^2 + 6^2} = 3\sqrt{29}.$$

Az EGT derékszögű háromszögből:

$$EG = \sqrt{ET^2 + GT^2} = \sqrt{15^2 + 10^2} = 5\sqrt{13}.$$

A gúla felszíne:

$$A = T_{ABCD} + 2 \cdot T_{ABE} + 2 \cdot T_{BCE} = 240 + 2 \cdot \frac{20 \cdot 3\sqrt{29}}{2} + 2 \cdot \frac{12 \cdot 5\sqrt{13}}{2} \approx 779{,}44 \text{ cm}^2.$$



b) Az oldalélnek az alaplappal bezárt α szögét a TBE derékszögű háromszögből számítjuk. A TB szakasz az $ABCD$ téglalap átlójának a fele:

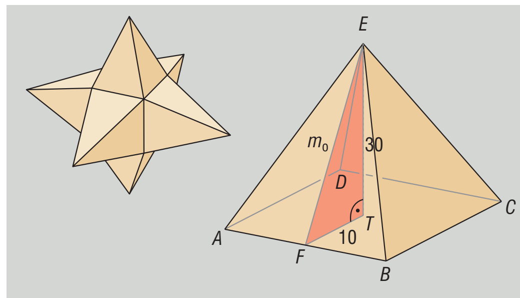
$$TB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20^2 + 12^2} = 2\sqrt{34}.$$

Az α szög meghatározása:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{TB} = \frac{15}{2\sqrt{34}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 52{,}14°.$$

A gúla oldaléleinek az alaplappal bezárt szöge $52{,}14°$.

4368 *a)* A feladatban leírt „csillagtest” felszíne hat 20 cm alapélű, 30 cm magas szabályos négyoldalú gúla palástjának felszíne.



Az ábra alapján a fent leírt gúla egy egyenlő szárú oldallapjának alapja 20 cm. A gúla magassága Pitagorasz-tétellel az FTE derékszögű háromszögből számítható:

$$m_o = \sqrt{(ET)^2 + (FT)^2} = 10\sqrt{10}.$$

A gúla egy oldallapjának területe:

$$T_{\text{háromszög}} = \frac{20 \cdot 10\sqrt{10}}{2} = 100\sqrt{10}.$$

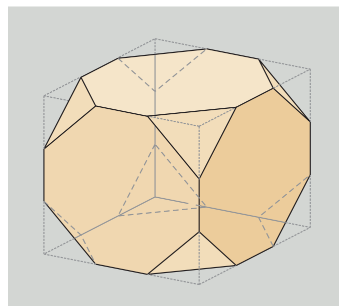
A „csillagtest” felszíne:

$$A = 24 \cdot T_{\text{háromszög}} = 24 \cdot 100\sqrt{10} \approx 7589{,}47\ \text{cm}^2.$$

b) A „csillagtest” térfogata:

$$V = V_{\text{kocka}} + 6 \cdot V_{\text{gúla}} = 20^3 + 6 \cdot \frac{20^2 \cdot 30}{3} = 32\,000\ \text{cm}^3.$$

4369 Legyen a kocka éle a, $a = 30$ cm.



a) A keletkezett test felszíne 6 nyolcszögből és 8 háromszögből áll.

A nyolcszög területét megkapjuk úgy, hogy az a oldalú négyzet területéből kivonjuk négy $\frac{a}{3}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területét:

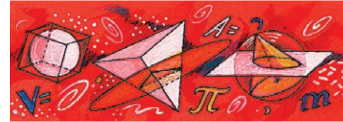
$$T_{\text{nyolcszög}} = a^2 - 4 \cdot \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{2} = \frac{7a^2}{9} = \frac{7 \cdot 900}{9} = 700\ \text{cm}^2.$$

A határoló háromszögek mindegyike $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ oldalú szabályos háromszög:

$$T_{\text{háromszög}} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{18} = \frac{900\sqrt{3}}{18} = 50\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

A test felszíne:

$$A = 6 \cdot T_{\text{nyolcszög}} + 8 \cdot T_{\text{háromszög}} = 6 \cdot 700 + 8 \cdot 50\sqrt{3} \approx 4892{,}82\ \text{cm}^2.$$



b) A test térfogatának meghatározásához az a élű kocka térfogatából ki kell vonni a csúcsoknál lévő nyolc tetraéder térfogatát.

A tetraéderek térfogatának meghatározásához tekintsük alapnak az $\frac{a}{3}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszöget. A tetraéder magassága $\frac{a}{3}$, térfogata:

$$V_{\text{tetraéder}} = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2}{2} \cdot \frac{a}{3}}{3} = \frac{a^3}{162} \quad \left(\approx 166{,}67\ \text{cm}^3\right).$$

A test térfogata:

$$V = V_{\text{kocka}} - 8 \cdot V_{\text{tetraéder}} = a^3 - 8 \cdot \frac{a^3}{162} = \frac{77a^3}{81} \approx 25\,666{,}67\ \text{cm}^3.$$

4370 A gúla alaplapjával párhuzamos sík a gúlából az alaplaphoz hasonló síkidomot metsz ki. A hasonlóság aránya $\frac{15-8}{15} = \frac{7}{15}$.

Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő, az alaplap T területére fennáll:

$$\frac{100}{T} = \left(\frac{7}{15}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{22\,500}{49}.$$

A gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{22\,500}{49} \cdot 15}{3} = \frac{112\,500}{49} \approx 2295{,}92\ \text{cm}^3.$$

4371 A kúp alakú tölcsér alkotója $30\ \text{cm}$, az alapkörének r sugarára fennáll:

$$2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 30 \cdot \pi \cdot \frac{120°}{360°}, \qquad \text{innen} \qquad r = \frac{30}{3} = 10\ \text{cm}.$$

a) A kúp magassága:

$$m = \sqrt{30^2 - 10^2} = 20\sqrt{2} \approx 28{,}28\ \text{cm}.$$

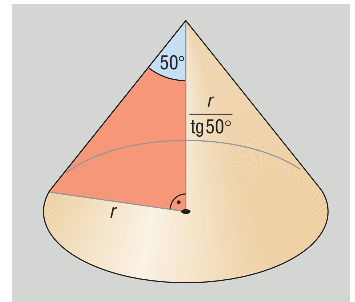
b) A kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{(10)^2 \cdot \pi \cdot 20\sqrt{2}}{3} = \frac{2000\sqrt{2}}{3}\pi \approx 2961{,}92\ \text{cm}^3.$$

A tölcsérbe megközelítőleg $2{,}96$ liter pattogatott kukorica fér.

4372 Ha a sóderkúp alapkörének sugara r, akkor a magasságát a fél nyílásszög segítségével felírhatjuk r függvényében:

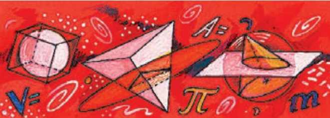
$$m = \frac{r}{\operatorname{tg} 50°}.$$



A kúp térfogatára felírhatjuk:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{r^3 \cdot \pi}{3 \cdot \operatorname{tg} 50°} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot \operatorname{tg} 50°}{\pi}} \approx 1{,}32.$$

Ebből az alapkör átmérője: $d \approx 2{,}64$ m.

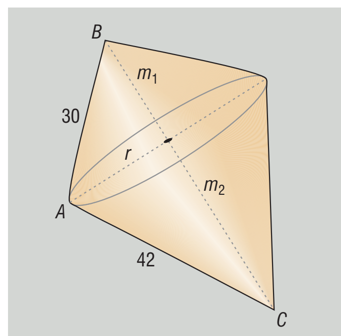


a) Mivel az alapkör átmérője több mint 2 méter, a sóder nem fér el a kikészített fólián.

b) A sóderkúp magassága:

$$m = \frac{r}{\mathrm{tg}\,50^\circ} = \frac{\sqrt[3]{\dfrac{6\cdot \mathrm{tg}\,50^\circ}{\pi}}}{\mathrm{tg}\,50^\circ} \approx 1{,}11\ \text{m}.$$

4373 Az ábra szerint az $ABC_\triangle$-ben legyen $AB = 30$ cm, $AC = 42$ cm, és a két oldal által bezárt szög 100°.



Mivel a háromszög tompaszögű és a leghosszabb oldala körül forgatjuk meg, a keletkezett forgástest két kúpból áll. A kúpok alaplapja közös, valamint az alaplapok sugara a háromszög leghosszabb oldalához tartozó magassága.

A háromszög harmadik $a = m_1 + m_2$ oldalának hosszát koszinusztétellel számíthatjuk:

$$a^2 = 30^2 + 42^2 - 2\cdot 30\cdot 42\cdot \cos 100^\circ \quad\Rightarrow\quad a \approx 55{,}69.$$

A háromszög területét írjuk fel kétféleképpen:

$$\frac{a\cdot m_a}{2} = \frac{b\cdot c\cdot \sin\gamma}{2}.$$

Ebből kapjuk, hogy:

$$m_a = r = \frac{b\cdot c\cdot \sin\gamma}{a} = \frac{42\cdot 30\cdot \sin 100^\circ}{55{,}69} \approx 22{,}28.$$

A kúp alaplapjának sugara 22,28 cm.

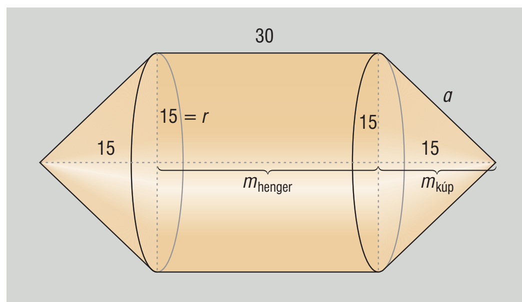
a) A forgástest felszíne a keletkezett két forgáskúp palástjából áll:

$$A = r\cdot\pi\cdot a_1 + r\cdot\pi\cdot a_2 = r\cdot\pi\cdot(a_1 + a_2) =$$
$$= 22{,}28\pi\cdot(30 + 42) \approx 5039{,}62\ \text{cm}^2.$$

b) A forgástest térfogata a keletkezett két forgáskúp térfogatának az összege. Vegyük figyelembe, hogy a magasságok összege a megforgatott háromszög a oldalának hossza:

$$V = \frac{r^2\cdot\pi\cdot m_1}{3} + \frac{r^2\cdot\pi\cdot m_2}{3} = \frac{r^2\cdot\pi}{3}\cdot(m_1 + m_2) = \frac{r^2\cdot\pi}{3}\cdot a \approx 28\,949{,}18\ \text{cm}^3.$$

4374 *a)* Ha a húrtrapézt a hosszabbik alapja körül forgatjuk meg, a forgástest egy hengerből és két egybevágó kúpból áll.



A kúp alkotójának hossza:

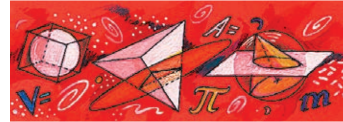
$$a = \sqrt{15^2 + 15^2} = 15\sqrt{2}\ \text{cm}.$$

A forgástest térfogata:

$$V = V_{henger} + 2\cdot V_{kúp} =$$
$$= r^2\cdot\pi\cdot m_{henger} + 2\cdot\frac{r^2\cdot\pi\cdot m_{kúp}}{3} =$$
$$= 15^2\cdot\pi\cdot 40 \approx 28\,274{,}33\ \text{cm}^3.$$

A forgástest felszíne:

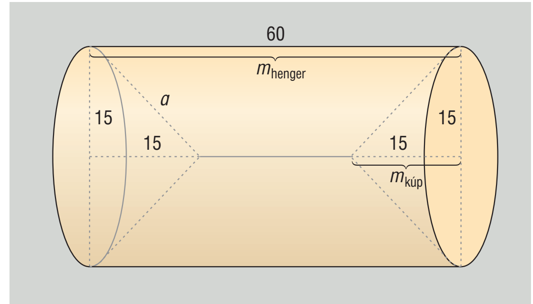
$$A = A_{hengerpalást} + 2\cdot A_{kúppalást} = 2r\cdot\pi\cdot m_{henger} + 2r\cdot\pi\cdot a =$$
$$= 2r\cdot\pi\cdot(m_{henger} + a) = 2\cdot 15\cdot\pi\cdot\left(30 + 15\sqrt{2}\right) \approx 4826{,}73\ \text{cm}^2.$$



b) Ha a húrtrapézt a rövidebbik alapja körül forgatjuk meg, a forgástest egy olyan henger lesz, amelyből „kivágtuk" a két kúpot.

A forgástest térfogata:

$$V = V_{henger} - 2 \cdot V_{kúp} =$$
$$= r^2 \cdot \pi \cdot m_{henger} - 2 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m_{kúp}}{3} =$$
$$= 15^2 \cdot \pi \cdot 50 \approx 35342{,}92 \text{ cm}^3.$$



A forgástest felszíne:

$$A = A_{hengerpalást} + 2 \cdot A_{kúppalást} = 2r \cdot \pi \cdot m_{henger} + 2r \cdot \pi \cdot a =$$
$$= 2r \cdot \pi \cdot (m_{henger} + a) = 2 \cdot 15 \cdot \pi \cdot \left(60 + 15\sqrt{2}\right) \approx 7654{,}16 \text{ cm}^2.$$

4375 Ha a körkúp nyílásszöge φ, akkor a tengelymetszet területe:

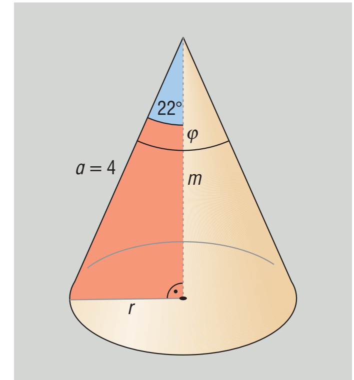
$$T_{tengelymetszet} = \frac{a^2 \cdot \sin\varphi}{2},$$
$$5{,}56 = \frac{4^2 \cdot \sin\varphi}{2}, \quad \text{amiből} \quad \varphi \approx 44°.$$

Az alkotó, a testmagasság és a sugár alkotta derékszögű háromszögben:

$$r = 4 \cdot \sin 22° \approx 1{,}50 \quad \text{és} \quad m = 4 \cdot \cos 22° \approx 3{,}71.$$

A kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} \approx 8{,}74 \text{ dm}^3.$$



4376 A feladatban szereplő két kúp hasonló egymáshoz, mivel nyílásszögeik egyenlők. A hasonlóság aránya a sugaraik aránya: $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$. Térfogataik aránya a hasonlóság arányának a köbe.

A megmaradt rész térfogata a két kúp térfogatának a különbsége:

$$V = V_1 - V_2 = V_1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot V_1 = V_1 \cdot \left(1 - \frac{27}{125}\right) = \frac{20^2 \cdot \pi \cdot 40}{3} \cdot \frac{98}{125} = \frac{12544\pi}{3} \approx 13136{,}05 \text{ cm}^3.$$

4377 *a)* Tekintsük a kúp leghosszabb és legrövidebb alkotóját tartalmazó síkmetszetét. Ez a síkmetszet egy háromszög, melynek oldalai 40 cm, 32 cm és 20 cm hosszúak. A 20 cm hosszúságú oldalhoz tartozó magasság a kúp testmagassága. Ennek meghatározásához írjuk fel a háromszögben a koszinusztételt:

$$40^2 = 32^2 + 20^2 - 2 \cdot 32 \cdot 20 \cdot \cos\alpha, \quad \text{ebből} \quad \cos\alpha = 0{,}1375 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 82{,}1°.$$

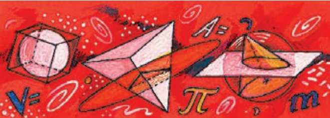
Felhasználva, hogy $m = 32 \cdot \sin\alpha$, kapjuk, hogy $m \approx 31{,}70$.

A kúp magassága megközelítőleg 31,70 cm.

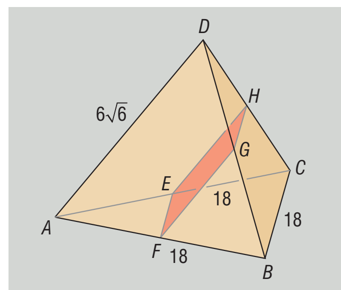
Megjegyzés: m értékét közvetlenül meghatározhattuk volna a Heron-képlet alkalmazásával.

b) A kúp térfogata:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{10^2 \cdot \pi \cdot 31{,}70}{3} \approx 3319{,}62 \text{ cm}^3.$$



4378 *a)* Tekintsük a mellékelt ábrát. A gúla AC és AB élének felezőpontja legyen E és F.



Az E és F pontokon áthaladó, az AD éllel párhuzamos sík az ACD és ABD síkokat az AD éllel párhuzamos egyenesben metszi, így az EH és FG szakaszok az ACD és ABD oldallapok középvonalai.

A középvonal tulajdonsága miatt $EH = FG = 3\sqrt{6}$, valamint a H és G pontok a DC és DB élek felezőpontjai. Hasonlóan HG és EF a $BCD_\triangle$ és $BCA_\triangle$ középvonalai, ezért $HG = EF = 9$.

Tehát az $EFGH$ négyszög szemben lévő oldalai egyenlő hosszúak, vagyis a négyszög paralelogramma.

Vizsgáljuk meg a paralelogramma EG és HF átlójának hosszát.

Az FCH és EBG háromszöget vizsgálva:

1. $EB = FC$, mivel a szabályos háromszög súlyvonalai;
2. $HC = GB$, mivel mindkettő egy-egy (egyenlő hosszúságú) oldalél fele;
3. $HCF\measuredangle = EBG\measuredangle$, mivel ezek a teraéder egyenlő hosszúságú oldaléleinek az alaplappal bezárt szögei.

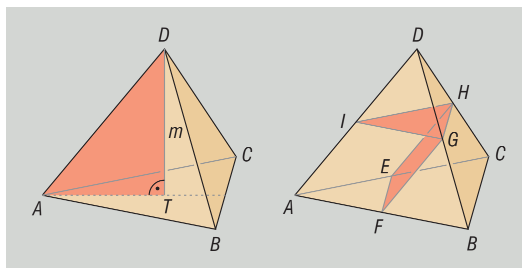
Ez alapján $FCH_\triangle$ és $EBG_\triangle$ egybevágó, tehát $HF = EG$, vagyis az $EFGH$ paralelogramma téglalap.

A téglalap alakú síkmetszet területe:

$$T = a \cdot b = 3\sqrt{6} \cdot 9 = 27\sqrt{6} \approx 66{,}14\ \text{cm}^2.$$

b) Az $ABCD$ tetraéder ABC alaplapjának területe:

$$T = \frac{18^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 81\sqrt{3}.$$



Az alaplaphoz tartozó DT magassága az ábrán látható ATD derékszögű háromszögből határozható meg. A háromszög átfogója a tetraéder éle: $AD = 6\sqrt{6}$, az AT befogója az ABC szabályos háromszög magasságának a kétharmada:

$$AT = \frac{18\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = 6\sqrt{3}.$$

A Pitagorasz-tétel alapján:

$$m = \sqrt{\left(6\sqrt{6}\right)^2 - \left(6\sqrt{3}\right)^2} = 6\sqrt{3}.$$

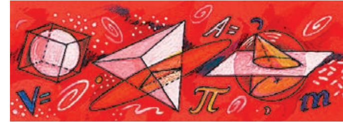
Az $ABCD$ tetraéder térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{81\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3}}{3} = 486\ \text{cm}^3.$$

Tekintsük az $EFGH$ sík által a tetraéderből lemetszett $AFEDGH$ testet. Ezt a gúla ABC alaplapjának síkjával párhuzamos HGI sík egy ferde hasábra és egy gúlára osztja.

Az $IGHD$ gúla hasonló az eredeti $ABCD$ gúlához, a hasonlóság aránya $1:2$. Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbe:

$$V_{IGHD} = \frac{1}{8}V.$$



Az *AFEIGH* test egy ferde hasáb, amelynek az *AFE* alaplapja az eredeti gúla *ABC* alaplapjához hasonló, a hasonlóság aránya $1:2$. Hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának a négyzete:

$$T_{AFE} = \frac{1}{4}T.$$

A hasáb magassága a gúla magasságának fele, így a hasáb térfogata:

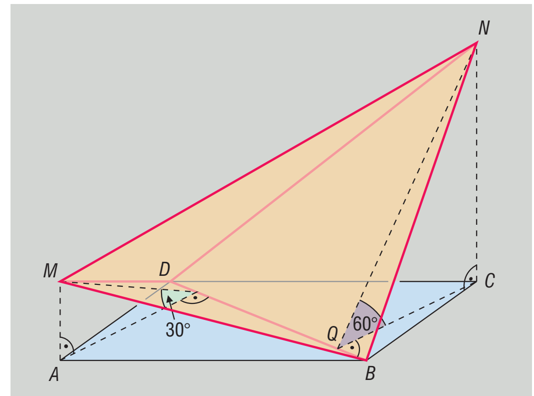
$$V_{AFEIGH} = \frac{1}{4}T \cdot \frac{m}{2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{T \cdot m}{3} = \frac{3}{8}V.$$

Az *EFGH* sík által a tetraéderből lemetszett *AFEHGD* test térfogata:

$$\frac{1}{8}V + \frac{3}{8}V = \frac{1}{2}V = \frac{1}{2} \cdot 486 = 243\ \text{cm}^3.$$

Az *EFGH* sík az *ABCD* tetraédert két egyenlő, $243\ \text{cm}^3$ térfogatú részre osztja.

4379 Az *MBD* és az *NBD* síkok merőlegesek egymásra, mert a téglalap síkjával bezárt szögük 30°, illetve 60°.



A tetraéder térfogatának kiszámításához elég meghatározni az $MBD_\triangle$ területét és kiszámítani a tetraéder ezen lapjához tartozó magasság hosszát.

Az $MBD_\triangle$ merőleges vetülete az $ABD_\triangle$, és a két háromszög síkja által bezárt szög 30°, ezért:

$$t_{MBD} = \frac{t_{ABD}}{\cos 30°} = \frac{\frac{12 \cdot 16}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 64\sqrt{3}.$$

Az *MNBD* tetraéder *N* csúcsából induló magassága az *MBD* és az *NBD* síkok merőlegessége alapján a mellékelt ábra szerint az *NQ* szakasz. Mivel az *NBD* sík a téglalap síkjával 60° szöget zár be, $NQC\sphericalangle = 60°$.

Az *NQ* szakasz hosszát az *NCQ* fél szabályos háromszög alapján számolhatjuk:

$$NQ = 2 \cdot QC.$$

Az *ABCD* téglalap *BD* átlójának hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$BD = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20.$$

A *QC* szakasz a *BDC* derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága, amelyet kiszámíthatunk úgy, hogy felírjuk a háromszög területét kétféleképpen:

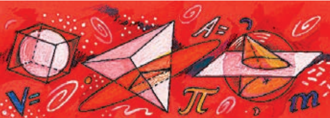
$$\frac{12 \cdot 16}{2} = \frac{20 \cdot QC}{2} \quad \Rightarrow \quad QC = \frac{48}{5}.$$

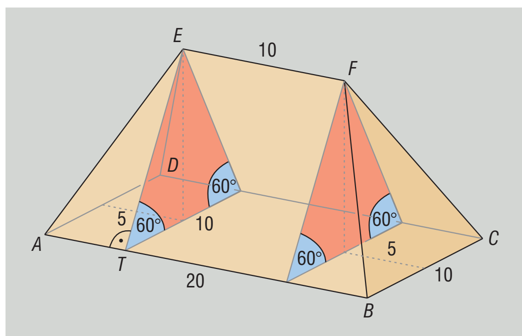
Tehát:

$$NQ = 2 \cdot QC = \frac{96}{5}.$$

A tetraéder térfogata:

$$V_{MNBD} = \frac{t_{MBD} \cdot NQ}{3} = \frac{64\sqrt{3} \cdot \frac{96}{5}}{3} = \frac{2048\sqrt{3}}{5} \approx 709{,}45\ \text{cm}^3.$$





4380 *a)* Ahhoz, hogy a padlás térfogatát meghatározzuk, vegyük az E és F pontokon áthaladó, az alaplapra merőleges síkokat. Ezek a síkok a padlás térfogatát egy háromszög alapú hasábra, valamint két téglalap alakú gúlára bontják.

Mivel a tető minden oldalról 60°-os szöget zár be a vízszintessel, a hasáb háromszög alaplapja egy 10 m oldalú szabályos háromszög, magassága pedig:

$$m_1 = 20 - 2 \cdot 5 = 10 \text{ m}.$$

A hasáb térfogata:

$$V_{\text{hasáb}} = T \cdot m_1 = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 10 = 250\sqrt{3} \text{ m}^3.$$

A két téglalap alakú gúlát összetolva egy 10 m alapélű szabályos négyoldalú gúlát kapunk. A gúla oldallapjai az alaplappal 60°-os szöget zárnak be, tehát a gúla magassága a 10 m oldalú szabályos háromszög magassága:

$$m_2 = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ m}.$$

A gúla térfogata tehát:

$$V_{\text{gúla}} = \frac{T \cdot m_2}{3} = \frac{10^2 \cdot 5\sqrt{3}}{3} = \frac{500\sqrt{3}}{3} \text{ m}^3.$$

A padlás térfogata légköbméterben:

$$V = V_{\text{hasáb}} + V_{\text{gúla}} = 250\sqrt{3} + \frac{500\sqrt{3}}{3} = \frac{1250\sqrt{3}}{3} \approx 721{,}69 \text{ m}^3.$$

b) A tető felszínét alkotó lapok síkjai 60°-os szöget zárnak be a vízszintessel, és ezeknek a vízszintesre eső merőleges vetületei a 10 m és 20 m oldalú téglalapot adják.

Így a síkidomok merőleges vetületének területére vonatkozó összefüggés alapján a tető felszíne:

$$A = \frac{T_{ABCD}}{\cos 60°} = \frac{200}{\frac{1}{2}} = 400 \text{ m}^2.$$

A tető befedéséhez a 18% hulladék miatt $\frac{400}{0{,}82} \approx 488 \text{ m}^2$ cserepet kell vásárolnunk.

c) A kúpcseréppel $4 \cdot AE + EF$ hosszúságot kell lefednünk. Az AE él hossza az ATE derékszögű háromszögből számítható:

$$AE = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}.$$

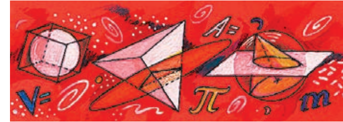
A lefedendő hosszúság:

$$4 \cdot AE + EF = 10 + 4 \cdot 5\sqrt{5} = 10 + 20\sqrt{5} \text{ m}.$$

Mivel a szükséges kúpcserepek száma:

$$\left(10 + 20\sqrt{5}\right) \cdot 5 \cdot 1{,}2 \approx 328{,}33,$$

ezért 329 darab cserepet kell megvásárolni.



4381 Legyen a gúla alakú ajándéktárgy térfogata V. Ha az alaplapjára állított gúlában fele magasságban áll a folyadék, akkor ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a gúlát elmetszettük egy, az alaplapjával párhuzamos síkkal a magasságának felénél. Mivel a lemetszett rész az eredetihez hasonló gúlát ad, és a hasonlóság aránya $1:2$, a lemetszett gúla térfogata úgy aránylik az eredeti gúla térfogatához, mint a hasonlóság arányának a köbe. A lemetszett rész térfogata tehát $\frac{1}{8}V$, a folyadék térfogata pedig $\frac{7}{8}V$.

Ha megfordítjuk a gúlát, akkor tekinthetjük úgy, hogy ismét elmetszettük az alaplap síkjával párhuzamosan, de most a lemetszett rész térfogata a $\frac{7}{8}V$. Innen a hasonlóság aránya: $\sqrt[3]{\frac{7}{8}}$. A gúlában ekkor $\sqrt[3]{\frac{7}{8}} \cdot 10 \approx 9{,}56 \text{ cm}$ magasan áll a folyadék.

4382 Ismert, hogy a tetraéder súlyvonalai negyedelve metszik egymást. Ez azt jelenti, hogy bármely csúcsot a szemben lévő lap súlypontjával összekötve, ennek a szakasznak a lap súlypontjához közelebbi negyedelőpontja a tetraéder S súlypontja.

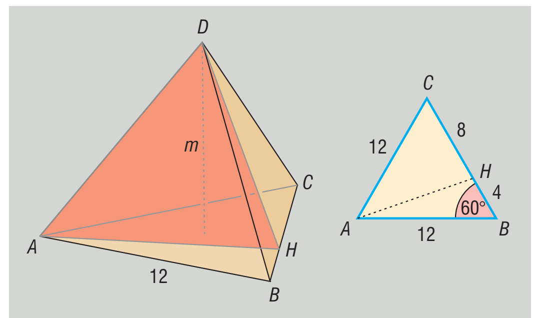
A tetraéder csúcsai és a lapok súlypontjai a tetraéder S súlypontjára vonatkozó $\lambda = -\frac{1}{3}$ arányú térbeli kicsinyítéssel feleltethetők meg egymásnak. Tehát az eredeti tetraéder és a lapjainak súlypontjai által meghatározott tetraéder hasonló egymáshoz, és a hasonlóság aránya $\frac{1}{3}$.

Ismert, hogy hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának a négyzete, a hasonló testek térfogatának aránya pedig a hasonlóság arányának köbe.

Így a tetraéder lapjainak súlypontjai által meghatározott tetraéder felszíne az eredeti tetraéder felszínének $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$-szerese, térfogata pedig az eredeti tetraéder térfogatának $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$-szerese.

4383 Az ábrán látható $ABCD$ szabályos tetraéder BC élén lévő H pontra igaz, hogy

$$BH : HC = 1 : 2.$$



a) Az ADH sík a tetraédert két újabb tetraéderre bontja, amelyek magassága megegyezik az $ABCD$ tetraéder m magasságával.

Ha az $ABC_\triangle$ területe T, akkor az $ABH_\triangle$ területe $\frac{1}{3}T$, az $AHC_\triangle$ területe pedig $\frac{2}{3}T$.

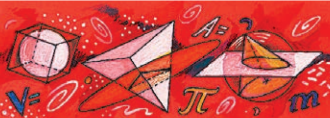
Tehát:

$$V_{ABHD} = \frac{\frac{1}{3}T \cdot m}{3} = \frac{1}{3}V_{ABCD}, \quad \text{valamint} \quad V_{AHCD} = \frac{\frac{2}{3}T \cdot m}{3} = \frac{2}{3}V_{ABCD}.$$

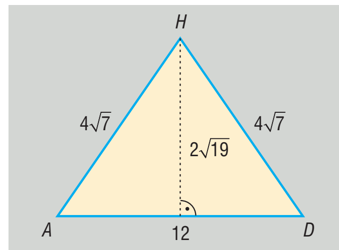
Ismert, hogy a szabályos tetraéder térfogata $V = \frac{\sqrt{2} \cdot a^3}{12}$, így a két rész térfogata:

$$V_{ABHD} = \frac{1}{3}V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 12^3}{12} = 48\sqrt{2} \approx 67{,}88 \text{ cm}^3,$$

$$V_{AHCD} = \frac{2}{3}V_{ABCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 12^3}{12} = 96\sqrt{2} \approx 135{,}76 \text{ cm}^3.$$



b) A két tetraéder felszínének kiszámításához meg kell adnunk az $AHD_\triangle$ területét.



Ennek a háromszögnek két oldala egyenlő hosszú, mivel AH és DH egyaránt a 12 cm oldalú szabályos háromszög egyik csúcsát köti össze a szemben lévő oldal harmadolópontjával.

Az $AHB_\triangle$-ből koszinusztétellel számítható AH:

$$AH^2 = 12^2 + 4^2 - 2\cdot 12\cdot 4\cdot\cos 60^\circ \quad\Rightarrow\quad AH = 4\sqrt{7}.$$

Az $ADH_\triangle$ két szára $4\sqrt{7}$ cm, alapja 12 cm hosszú. A Pitagorasz-tétellel számíthatjuk a háromszög alaphoz tartozó magasságát:

$$\sqrt{\left(4\sqrt{7}\right)^2 - 6^2} = 2\sqrt{19}.$$

Az $ADH_\triangle$ területe:

$$T_{ADH} = \frac{12\cdot 2\sqrt{19}}{2} = 12\sqrt{19}.$$

Használjuk ki, hogy:

$$T_{ABH} = T_{DBH} = \frac{1}{3}T_{ABC}, \quad \text{illetve} \quad T_{ACH} = T_{DCH} = \frac{2}{3}T_{ABC},$$

és írjuk fel a két tetraéder felszínét:

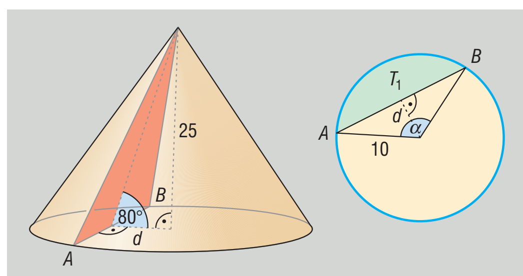
$$A_{ABHD} = T_{AHD} + T_{ABD} + 2\cdot T_{AHB} = T_{AHD} + T_{ABC} + 2\cdot\frac{1}{3}T_{ABC} = T_{AHD} + \frac{5}{3}T_{ABC} =$$

$$= 12\sqrt{19} + \frac{5}{3}\cdot\frac{12^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{19} + 60\sqrt{3} \approx 156{,}23\ \text{cm}^2,$$

$$A_{AHCD} = T_{AHD} + T_{ACD} + 2\cdot T_{AHC} = T_{AHD} + T_{ABC} + 2\cdot\frac{2}{3}T_{ABC} = T_{AHD} + \frac{7}{3}T_{ABC} =$$

$$= 12\sqrt{19} + \frac{7}{3}\cdot\frac{12^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{19} + 84\sqrt{3} \approx 198{,}80\ \text{cm}^2.$$

4384 Tekintsük a mellékelt ábrát. A keletkezett részek olyan kúpszerű testek, amelyek magasságai az eredeti forgáskúp m magasságával egyenlők. A két kúpszerű test alaplapja az a két körszelet, amelyet az ábrán látható AB húr hoz létre az alapkörön. Ezek területének meghatározásához számoljuk ki az AB húr és az alapkör középpontjának d távolságát:



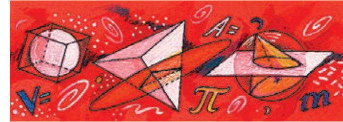
$$d = \frac{25}{\operatorname{tg} 80^\circ}.$$

Ez alapján számolható az ábrán látható kisebbik körszelet α középponti szöge:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{10} = \frac{\frac{25}{\operatorname{tg} 80^\circ}}{10} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 127{,}69^\circ.$$

A kisebbik körszelet területe:

$$T_1 = 10^2\cdot\pi\cdot\frac{127{,}69^\circ}{360^\circ} - \frac{10^2\cdot\sin 127{,}69^\circ}{2} \approx 71{,}86\ \text{cm}^2.$$



A kisebbik rész térfogata:
$$V_1 = \frac{T_1 \cdot m}{3} = \frac{71{,}86 \cdot 25}{3} \approx 598{,}83 \text{ cm}^3.$$

A nagyobbik rész térfogatát megkaphatjuk úgy, hogy a teljes gúla térfogatából kivonjuk a kisebbik rész térfogatát:
$$V_2 = \frac{10^2 \cdot \pi \cdot 25}{3} - 598{,}83 \approx 2019{,}16 \text{ cm}^3.$$

4385 Legyen a forgáskúp és a henger alapkörének sugara r, magassága m. Ha a forgáskúp alkotója a, akkor:
$$a = \sqrt{r^2 + m^2}.$$

A forgáshenger és a forgáskúp felszínének aránya:
$$\frac{A_{\text{henger}}}{A_{\text{kúp}}} = \frac{2r \cdot \pi \cdot (r + m)}{r \cdot \pi \cdot (r + a)} = \frac{2(r + m)}{r + \sqrt{r^2 + m^2}}.$$

A feladat feltétele alapján:
$$\frac{2(r + m)}{r + \sqrt{r^2 + m^2}} = \frac{8}{5}.$$

Ekvivalens átalakítások után a következő egyenletet kapjuk:
$$15r^2 - 10r \cdot m - 9m^2 = 0.$$

Mivel a forgáskúp nyílásszögére van szükségünk, elég az egyenletből $\frac{r}{m}$-et, a fél nyílásszög tangensét kifejeznünk:
$$15 \cdot \left(\frac{r}{m}\right)^2 - 10 \cdot \frac{r}{m} - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{r}{m}\right)_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{640}}{30}.$$

Mivel a hegyesszög tangense nem lehet negatív:
$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{m} = \frac{10 + 8\sqrt{10}}{30} = \frac{5 + 4\sqrt{10}}{15} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 99{,}28°.$$

A kúp nyílásszöge 99,28°.

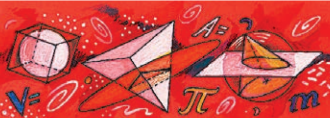
4386 Legyen a forgáskúp alapkörének sugara r, magassága m, alkotója a. A feladat feltétele alapján:
$$r \cdot \pi \cdot (r + a) = 634{,}86 \quad \text{és} \quad \frac{2r \cdot m}{2} = 90.$$

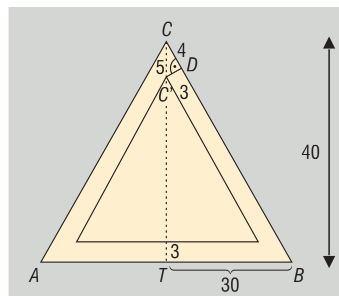
Ismert, hogy $a = \sqrt{r^2 + m^2}$, tehát az első egyenlet így is írható:
$$r \cdot \pi \cdot \left(r + \sqrt{r^2 + m^2}\right) = 634{,}86 \quad \Rightarrow \quad r^2 + r \cdot \sqrt{r^2 + m^2} = \frac{634{,}86}{\pi}.$$

A második egyenletből $m = \frac{90}{r}$, amit az elsőbe behelyettesítve:
$$r^2 + r \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{90}{r}\right)^2} = \frac{634{,}86}{\pi},$$
$$r \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{90}{r}\right)^2} = \frac{634{,}86}{\pi} - r^2.$$

Négyzetre emelés és rendezés után $r^2 = 81$. Mivel r pozitív, $r = 9$. A kúp magassága $m = \frac{90}{r} = 10$.

A kúp térfogata:
$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{9^2 \cdot \pi \cdot 10}{3} = 270\pi \approx 848{,}23 \text{ cm}^3.$$





4387 A külső kúp és a belső kúp hasonló, mivel nyílásszögük egyenlő. Tekintsük a test tengelymetszetét.

Az ábra jelöléseit használva a TBC háromszög hasonló a $DC'C$ háromszöghöz, mivel szögeik páronként egyenlők. A két háromszög megfelelő oldalai hosszának aránya egyenlő:

$$\frac{CD}{C'D}=\frac{TC}{TB} \quad \Rightarrow \quad CD=C'D\cdot\frac{TC}{TB}=3\cdot\frac{40}{30}=4.$$

A CC' szakasz hossza a Pitagorasz-tétel alapján 5 cm.

Ez alapján a belső kúp magassága: $40-3-5=32$.

A két kúp hasonlóságának aránya, a magasságaik aránya: $\frac{32}{40}=\frac{4}{5}$, tehát a térfogataik aránya: $\left(\frac{4}{5}\right)^3$.

A bakelit térfogatát a külső és belső kúpok térfogatának különbsége adja:

$$V=V_{\text{külső}}-V_{\text{belső}}=V_{\text{külső}}-\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot V_{\text{külső}}=$$

$$=\frac{61}{125}\cdot V_{\text{külső}}=\frac{61}{125}\cdot\frac{30^2\cdot\pi\cdot 40}{3}=5856\pi\approx 18397{,}17\text{ cm}^3\approx 18{,}40\text{ dm}^3.$$

a) A test tömege:

$$m=\rho\cdot V=1{,}3\cdot 18{,}40=23{,}92\text{ kg}.$$

b) Arkhimédész törvénye alapján ha egy test átlagos sűrűsége kisebb, mint a vízé, akkor úgy úszik a vízen, hogy a test tömegével megegyező tömegű vizet szorít ki.

Mivel az átlagsűrűség

$$\rho_{\text{átlag}}=\frac{m}{V_{\text{külső}}}=\frac{23{,}92\text{ kg}}{37{,}68\text{ dm}^3}<1\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}=\rho_{\text{víz}},$$

ezért a test úszik.

A csúcsával lefelé fordított test olyan mélyen merül a vízbe, hogy a víz alatti forgáskúp térfogata $23{,}92\text{ dm}^3=23\,920\text{ cm}^3$. A víz alatti forgáskúp hasonló a külső forgáskúphoz. Hasonlóságuk aránya a magasságaik aránya, amelynek köbe a térfogataik aránya.

Ha a test h cm mélyen merül a vízbe, akkor:

$$\left(\frac{h}{40}\right)^3=\frac{23920}{37680} \quad \Rightarrow \quad h\approx 34{,}37.$$

A csúcsával lefelé fordított test 34,37 cm mélyre merül a vízben.

4388 Legyen a körlapból készült kúp alapkörének sugara r, alkotója $a=20$ cm.

A kivágandó körcikk ívhossza éppen a kúp alapkörének kerülete:

$$i=2r\cdot\pi.$$

A Pitagorasz-tétel alapján a kúp magassága:

$$m=\sqrt{a^2-r^2}=\sqrt{20^2-r^2},$$

tehát a kúp térfogata:

$$V=\frac{r^2\cdot\pi\cdot\sqrt{20^2-r^2}}{3}=\frac{\pi}{3}\cdot\sqrt{400r^4-r^6}.$$



Ez utóbbi pozitív kifejezés maximuma helyett elég keresni az alábbi függvény maximumát:

$$f(r) = 400r^4 - r^6 \quad (r > 0).$$

Ennek a függvénynek ott lehet maximuma, ahol az első deriváltja 0:

$$f'(r) = 1600r^3 - 6r^5 = r^3 \cdot \left(1600 - 6r^2\right).$$

Pozitív r-eket tekintve, ennek a függvénynek $r = \sqrt{\frac{1600}{6}} = \sqrt{\frac{800}{3}}$ helyen van zérushelye.

Az első derivált előjele pozitív, ha $0 < r < \sqrt{\frac{800}{3}}$, és negatív, ha $\sqrt{\frac{800}{3}} < r$, tehát $r = \sqrt{\frac{800}{3}}$ esetén $f(r)$ függvénynek maximuma van.

A kúp térfogata akkor maximális, ha $r = \sqrt{\frac{800}{3}}$, vagyis a kivágandó körcikk ívhossza:

$$i = 2r \cdot \pi = 2 \cdot \sqrt{\frac{800}{3}} \cdot \pi.$$

Ebből kiszámolható a 20 cm sugarú körcikk α középponti szöge:

$$2 \cdot 20 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot \sqrt{\frac{800}{3}} \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = 293{,}94^\circ.$$

Egy $293{,}94^\circ$ középponti szögű körcikket kell kivágnunk ahhoz, hogy a kúp térfogata a legnagyobb legyen.

A csonka gúla és a csonka kúp – megoldások

4389 A négyzet alapú csonka gúla térfogata: 9250 cm^3.

4390 A szabályos háromszög alapú csonka gúla térfogata: $570\sqrt{3} \approx 987{,}27 \text{ cm}^3$.

4391 A csonka gúla magassága: 30 cm.

4392 A tartályba 2100 liter folyadék fér.

4393 A bura elkészítéséhez $2083{,}53 \text{ cm}^2$ vászon szükséges.

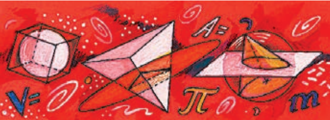
4394 *a)* A csonka gúla egy oldallapjának a magassága: 26 cm.
b) A csonka gúla oldalélének a hossza: $26{,}12$ cm.

4395 A csonka gúla fedőlapjának éle: 7 cm.

4396 A fez $24{,}71$ cm magas.

4397 Az egyenes csonka kúp
a) alkotója: $12{,}37$ cm;
b) felszíne: $1128{,}74 \text{ cm}^2$;
c) térfogata: $2752{,}04 \text{ cm}^3$.

4398 Az egyenes csonka kúp
a) fedőlapjának sugara: 9 cm;
b) felszíne: $546\pi \approx 1715{,}31 \text{ cm}^2$;
c) térfogata: $1176\pi \approx 3694{,}51 \text{ cm}^3$.



4399 Az egyenes csonka kúp

a) magassága: 10 cm; *b)* alkotója: 16,40 cm; *c)* felszíne: $2801{,}67\ \text{cm}^2$.

4400 *a)* Az egyenes csonka körkúp felszíne: $2300\pi \approx 7225{,}66\ \text{cm}^2$.

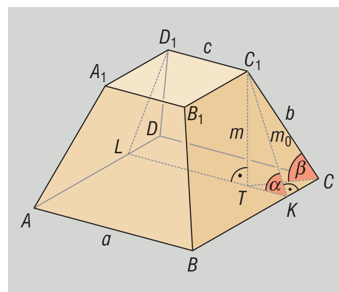
b) Az egyenes csonka körkúp térfogata: $\dfrac{19000\sqrt{3}}{3}\cdot\pi \approx 34\,462{,}19\ \text{cm}^3$.

4401 A keletkezett forgástest egyenes csonka körkúp, amelynek felszíne: $98\pi \approx 307{,}88\ \text{cm}^2$, térfogata pedig: $\dfrac{98\sqrt{15}\cdot\pi}{3} \approx 397{,}47\ \text{cm}^3$.

4402 Az egyenes csonka kúp

a) alkotója: 15 cm; *b)* magassága: 13,75 cm; *c)* térfogata: $17\,408{,}35\ \text{cm}^3$.

4403 Tekintsük az ábrán látható $ABCDA_1B_1C_1D_1$ négyzet alapú egyenes csonka gúlát.



Vegyük a csonka gúla C_1 és D_1 csúcsain áthaladó, az alaplapra merőleges LKC_1D_1 húrtrapéz síkmetszetét.

A trapéz alapjainak hossza $a = 12$ cm és $c = 6$ cm, valamint magassága $m = 8$ cm.

a) A csonka gúla oldallapjának magassága az LKC_1D_1 trapéz szára, amelynek hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$m_o = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{8^2 + \left(\frac{12-6}{2}\right)^2} = \sqrt{73} \approx 8{,}54.$$

A csonka gúla oldallapjának a magassága: $\sqrt{73} \approx 8{,}54$ cm.

b) A csonka gúla b oldalélének hosszát a csonka gúla BCC_1B_1 oldallapjának segítségével Pitagorasz tételével számíthatjuk:

$$b = \sqrt{{m_o}^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{73}\right)^2 + \left(\frac{12-6}{2}\right)^2} = \sqrt{82} \approx 9{,}06.$$

A csonka gúla oldaléle: $\sqrt{82} \approx 9{,}06$ cm.

c) A csonka gúla oldallapjának és alaplapjának α hajlásszöge az LKC_1D_1 trapéz K csúcsánál levő szöge, amelynek nagysága a TKC_1 derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{\frac{a-c}{2}} = \frac{8}{3} \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 69{,}44^\circ.$$

A csonka gúla oldallapjának és alaplapjának hajlásszöge: $69{,}44^\circ$.

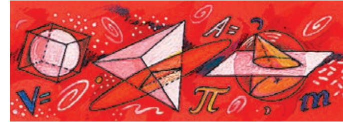
d) A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3}\cdot\left(T + \sqrt{T\cdot t} + t\right) = \frac{m}{3}\cdot\left(a^2 + a\cdot c + c^2\right) = \frac{8}{3}\cdot\left(12^2 + 12\cdot 6 + 6^2\right) = 672\ \text{cm}^3.$$

e) A csonka gúla felszíne:

$$A = T + t + A_{\text{palást}} = a^2 + c^2 + 4\cdot\frac{m_o\cdot(a+c)}{2} = 12^2 + 6^2 + 4\cdot\frac{\sqrt{73}\cdot(12+6)}{2} =$$

$$= 180 + 36\sqrt{73} \approx 487{,}58\ \text{cm}^2.$$



4404 Használjuk a 4403. feladat jelöléseit: $a = 12$ cm, $c = 4$ cm és $b = 15$ cm.

a) A csonka gúla oldallapjának m_o magassága a BCC_1B_1 trapézból a Pitagorasz-tétel alapján számolható:

$$m_o = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 - \left(\frac{12-4}{2}\right)^2} = \sqrt{209} \approx 14,46.$$

A csonka gúla oldallapjának a magassága: 14,46 cm.

b) A csonka gúla testmagassága az LKC_1D_1 trapéz magassága. Hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$m = \sqrt{m_o^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{193} \approx 13,89.$$

A testmagassága: 13,89 cm.

c) A csonka gúla oldaléle és az alaplapja által bezárt β szög a TCC_1 szög, amely a TCC_1 derékszögű háromszögből szinusz szögfüggvénnyel meghatározható:

$$\sin\beta = \frac{m}{b} = \frac{\sqrt{193}}{15} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 67,84°.$$

A csonka gúla oldalélének az alaplappal bezárt szöge: 67,84°.

d) A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot c + c^2\right) = \frac{208\sqrt{193}}{3} \approx 963,21\ \text{cm}^3.$$

e) A csonka gúla felszíne:

$$A = T + t + A_{\text{palást}} = a^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{m_o \cdot (a+c)}{2} = 160 + 32\sqrt{209} \approx 622,62\ \text{cm}^2.$$

4405 Legyen $a = 18$ cm, $c = 10$ cm.

A négyzet alapú egyenes csonka gúla felszíne:

$$A = T + t + A_{\text{palást}} = a^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{m_o \cdot (a+c)}{2},$$

amiből a csonka gúla oldallapjának m_o magasságára $m_o = 15$ adódik.

A 4403. feladat ábráját használva a csonka gúla testmagassága az LKC_1D_1 trapéz magassága. Hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$m = \sqrt{209} \approx 14,46.$$

A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot c + c^2\right) = \frac{604\sqrt{209}}{3} \approx 2910,64\ \text{cm}^3.$$

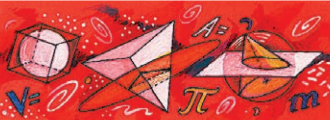
4406 Mivel a szabályos négyzet alapú csonka gúla alapterülete $36\ \text{cm}^2$, az alapéle $a = 6$ cm. A fedőlap területe $18\ \text{cm}^2$, tehát a fedőlap c éle $c = 3\sqrt{2}$ cm.

Mivel ismerjük a csonka gúla térfogatát, a

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot c + c^2\right)$$

képlet alkalmazásával a magassága kiszámítható:

$$m = \frac{30 \cdot \left(3 - \sqrt{2}\right)}{7} \approx 6,80\ \text{cm}.$$



A 4403. feladat ábráját használva, a csonka gúla oldallapjának magassága az LKC_1D_1 trapéz szára, amelynek hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$m_o = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{6{,}80^2 + \left(\frac{6-3\sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx 6{,}86.$$

A szabályos négyzet alapú csonka gúla egy oldallapjának területe:

$$T_{oldallap} = \frac{m_o \cdot (a+c)}{2} \approx 35{,}13\ \text{cm}^2.$$

4407 Ha a szabályos négyzet alapú csonka gúla alapéle $a = 20$ cm, akkor az alaplap területe $T = 400\ \text{cm}^2$, a fedőlapé $t = 100\ \text{cm}^2$, ahonnan a fedőlap éle $c = 10$ cm.

A palást területe:

$$A_{palást} = 5 \cdot 100 = 500\ \text{cm}^2,$$

és mivel négy egybevágó szimmetrikus trapézból áll, ezért egy trapéz területe $125\ \text{cm}^2$.

Az oldallap m_o magassága számítható a területből:

$$T_{trapéz} = \frac{m_o \cdot (a+c)}{2} \quad \Rightarrow \quad m_o = \frac{2 \cdot T_{trapéz}}{(a+c)} = \frac{2 \cdot 125}{20+10} = \frac{25}{3}.$$

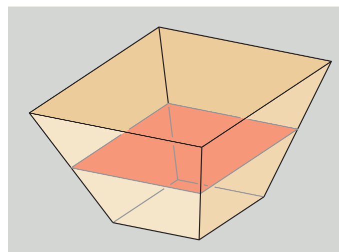
A 4403. feladat ábráját használva a csonka gúla testmagassága az LKC_1D_1 trapéz magassága. Hossza Pitagorasz-tétel alapján:

$$m = \sqrt{m_o^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 - \left(\frac{20-10}{2}\right)^2} = \frac{20}{3}.$$

A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot c + c^2\right) = \frac{14\,000}{9} \approx 1555{,}56\ \text{cm}^3.$$

4408 A félig megtöltött virágládában lévő virágföld térfogata egy olyan szabályos négyoldalú csonka gúla térfogatával egyezik meg, amelynek magassága a csonka gúla magasságának fele, $m = \frac{20}{2} = 10$ cm, az alapéle 14 cm, a fedőlap éle pedig a láda trapéz oldallapjának a középvonala $c = \frac{20+14}{2} = 17$ cm.

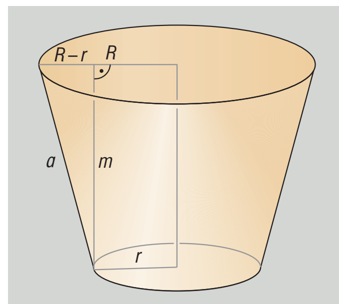


A virágföld térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + ac + c^2\right) = \frac{10}{3} \cdot \left(14^2 + 14 \cdot 17 + 17^2\right) = 2410\ \text{cm}^3.$$

A virágládában $2410\ \text{cm}^3 = 2{,}41$ liter virágföld van.

4409 Az egyenes csonka kúp alakú bádogvödör alapkörének sugara $r = 10$ cm, fedőkörének sugara $R = 13$ cm, a magassága pedig $m = 36$ cm.

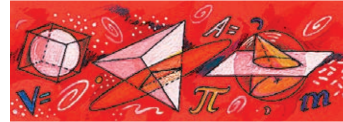


a) A vödör térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) =$$

$$= \frac{36\pi}{3} \cdot \left(10^2 + 10 \cdot 13 + 13^2\right) = 4788\pi \approx 15\,041{,}95\ \text{cm}^3.$$

A vödörbe 15 liter víz fér.



b) A vödör a alkotójának hosszát a Pitagorasz-tétellel számíthatjuk:

$$a=\sqrt{m^2+(R-r)^2}=\sqrt{1305}=3\sqrt{145}.$$

Az egy vödör elkészítéséhez szükséges bádog mennyisége:

$$A=\left(R^2+a\cdot(R+r)\right)\cdot\pi=\left(100+69\sqrt{145}\right)\cdot\pi\ \text{cm}^2.$$

A többletértéket is figyelembe véve 1000 vödörhöz

$$1000\cdot\left(100+69\sqrt{145}\right)\cdot\pi\cdot1{,}18\approx3\,450\,809\ \text{cm}^2,$$

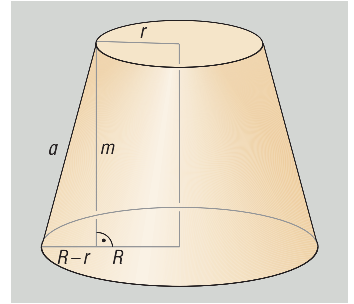
azaz $345{,}08\ \text{m}^2$ bádog szükséges.

4410 Az egyenes csonka kúp felszínét az

$$A=\left(r^2+R^2+a\cdot(R+r)\right)\cdot\pi$$

képlet alapján számolva a $0=r^2+10r-96$ másodfokú egyenletet kapjuk, melynek megoldásai:

$$r_1=\frac{-10+22}{2}=6\qquad\text{és}\qquad r_2=\frac{-10-22}{2}=-16.$$



a) Az fedőlap sugara csak pozitív szám lehet, így $r=6$ cm.

b) Az egyenes csonka kúp m magasságát a Pitagorasz-tétellel meghatározhatjuk:

$$m=\sqrt{a^2-(R-r)^2}=\sqrt{10^2-(12-6)^2}=8\ \text{cm}.$$

A csonka gúla térfogata:

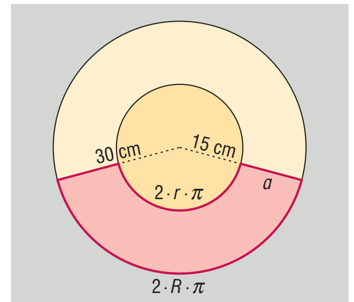
$$V=\frac{m\cdot\pi}{3}\cdot\left(R^2+R\cdot r+r^2\right)=\frac{8\pi}{3}\cdot\left(12^2+12\cdot6+6^2\right)=672\pi\approx2111{,}15\ \text{cm}^3.$$

4411 A csonka kúp alkotója a két kör sugarának a különbsége:

$$a=30-15=15\ \text{cm}.$$

Az alapkör kerülete a 30 cm sugarú kör 150°-os középponti szögéhez tartozó ív hossza:

$$2\cdot R\cdot\pi=2\cdot30\cdot\pi\cdot\frac{150^\circ}{360^\circ}\quad\Rightarrow\quad R=\frac{25}{2}\ \text{cm}.$$



Az fedőkör kerülete a 15 cm sugarú kör 150°-os középponti szögéhez tartozó ív hossza:

$$2\cdot r\cdot\pi=2\cdot15\cdot\pi\cdot\frac{150^\circ}{360^\circ}\quad\Rightarrow\quad r=\frac{25}{4}\ \text{cm}.$$

a) A csonka kúp felszíne:

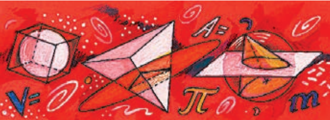
$$A=\left(R^2+r^2+a\cdot(R+r)\right)\cdot\pi=\frac{7625}{16}\pi\approx1497{,}17\ \text{cm}^2.$$

b) A térfogat meghatározásához szükségünk van a csonka gúla m magasságára. A Pitagorasz-tétel alapján:

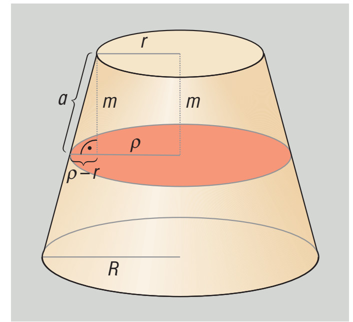
$$m=\sqrt{a^2-(r-R)^2}=\sqrt{15^2-\left(\frac{25}{2}-\frac{25}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{119}}{4}\ \text{cm}.$$

A csonka kúp térfogata:

$$V=\frac{m\cdot\pi}{3}\cdot\left(R^2+R\cdot r+r^2\right)=\frac{21875\cdot\sqrt{119}\cdot\pi}{192}\approx3904{,}54\ \text{cm}^3.$$



4412 Ha az egyenes csonka kúpot az alaplappal párhuzamos síkkal magasságának felénél két részre vágjuk, akkor a síkmetszet egy olyan kör, amelynek sugara az alapkör és fedőkör sugarának számtani közepe. Az alapkör sugara $R = 30$ cm, a fedőlap sugara $r = 20$ cm, a síkmetszet sugara $\rho = \frac{R+r}{2} = 25$ cm.



A levágott felső csonka kúp alapkörének sugara $\rho = 25$ cm, fedőkörének sugara $r = 20$ cm, magassága pedig $m = 30$ cm. A felső csonka kúp a alkotójának hossza a Pitagorasz-tétel alapján:

$$a = \sqrt{m^2 + (\rho - r)^2} = \sqrt{925} = 5\sqrt{37} \text{ cm}.$$

A levágott felső csonka kúp felszíne:

$$A = \left(\rho^2 + r^2 + a \cdot (\rho + r)\right) \cdot \pi = \left(1025 + 225\sqrt{37}\right) \cdot \pi \approx 7519{,}78 \text{ cm}^2.$$

A levágott felső csonka kúp térfogata:

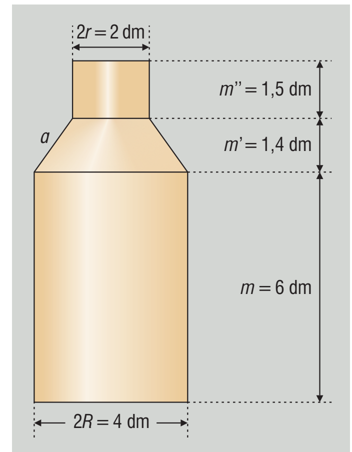
$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(\rho^2 + \rho \cdot r + r^2\right) = 15\,250\pi \approx 47\,909{,}29 \text{ cm}^3.$$

4413 *a)* Az alsó egyenes körhenger térfogata:

$$V_1 = R^2 \cdot \pi \cdot m = 24\pi \text{ dm}^3.$$

A középső egyenes csonka kúp alakú rész térfogata:

$$V_2 = \frac{m' \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = \frac{49}{15}\pi \text{ dm}^3.$$



A felső hengeres részben $1{,}5 - 0{,}2 = 1{,}3$ dm magasságig állhat méz, ennek térfogata:

$$V_3 = r^2 \cdot \pi \cdot m'' = \frac{13}{10}\pi \text{ dm}^3.$$

A bödönbe önthető méz térfogata legfeljebb:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{857}{30}\pi \approx 89{,}74 \text{ dm}^3.$$

Tehát a bödönbe $m_{\text{méz}} = V \cdot \rho = 125{,}64$ kg méz fér.

b) A bödön fenekéhez, illetve az alsó hengeres rész palástjához

$$A_1 = R^2 \cdot \pi = 4\pi \text{ dm}^2, \quad \text{illetve} \quad A_2 = 2R \cdot \pi \cdot m = 24\pi \text{ dm}^2$$

bádoglemez szükséges.

A középső csonka kúp palástját az alkotó segítségével határozhatjuk meg. Az alkotó hosszát a Pitagorasz-tétellel számítjuk:

$$a = \sqrt{(m')^2 + (R - r)^2} = \sqrt{1{,}4^2 + (2-1)^2} = \frac{\sqrt{74}}{5} \text{ dm},$$

így a palást felszíne:

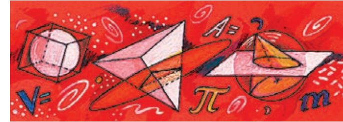
$$A_3 = a \cdot (R + r) \cdot \pi = \frac{\sqrt{74}}{5} \cdot (2+1) \cdot \pi = \frac{3\sqrt{74}}{5} \cdot \pi \text{ dm}^2.$$

A felső hengeres rész palástja:

$$A_4 = 2r \cdot \pi \cdot m'' = 3\pi \text{ dm}^2.$$

A bödön elkészítéséhez szükséges bádog mennyisége a 8%-os többlettel együtt:

$$A = (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \cdot 1{,}08 = \frac{155 + 3\sqrt{74}}{5} \cdot \pi \cdot 1{,}08 \approx 122{,}69 \text{ dm}^2.$$



4414 Az eredeti gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = 4000\pi \ \text{cm}^3.$$

A levágott gúla hasonló az eredetihez, és térfogata:

$$4000\pi - 1000\pi = 3000\pi \ \text{cm}^3.$$

A levágott és eredeti gúla térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbe, így:

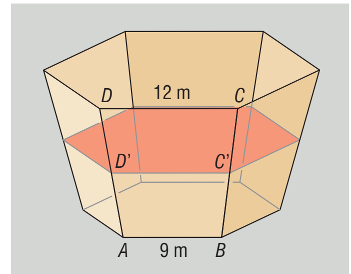
$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{3000\pi}{4000\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$$

Ha a csonka gúla keresett magassága m, akkor a levágott gúla magassága $40 - m$.
A levágott és az eredeti gúla magasságának aránya:

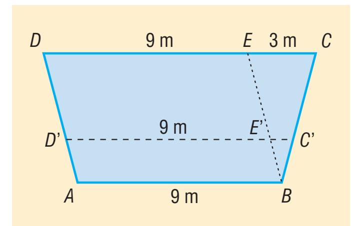
$$\lambda = \frac{40 - m}{40} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \frac{40 - m}{40} \quad \Rightarrow \quad m = 40\left(1 - \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right) \approx 3{,}66 \text{ cm}.$$

A csonka gúla magassága: 3,66 cm.

4415 *a)* A medencében lévő víz térfogatának meghatározásához ki kell számolnunk, hogy a víz felülete hány négyzetméter. Ehhez meg kell adnunk annak a szabályos hatszögnek az oldalhosszát, amelyet az alappal párhuzamos sík metsz ki a csonka gúlából.



Tekintsük a medence egy $ABCD$ húrtrapéz oldallapját, amelynek két alapja 12 m és 9 m. Az előbb említett hatszög oldala a trapéz szárainak a kisebbik alaphoz közelebbi harmadolópontjait összekötő $D'C'$ szakasz.



Húzzunk párhuzamost az AD szárral B csúcson keresztül. Ez a párhuzamos DC-t E-ben, $D'C'$-t E'-ben metszi. A létrejött $ABED$ négyszög szemben lévő oldalai párhuzamosak, tehát paralelogramma, ezért $DE = 9$ m és $EC = 3$ m.

Mivel $D'C'$ párhuzamos az alapokkal, a párhuzamos szelőszakaszok tételét felírva az EBC szögre:

$$\frac{E'C'}{EC} = \frac{BC'}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{E'C'}{3} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad E'C' = 1 \text{ m}.$$

A szabályos hatszög alakú vízfelület oldaléle:

$$D'C' = 1 + 9 = 10 \text{ m}.$$

A medencében lévő víz egy olyan csonka gúla térfogatával egyezik meg, amelynek magassága 2 m, az alaplapja 9 m oldalú, fedőlapja 10 m oldalú szabályos hatszög.

Az alaplap területe:

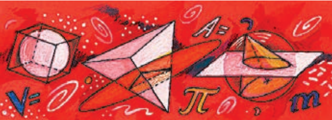
$$T = 6 \cdot \frac{9^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{2}.$$

A fedőlap területe:

$$t = 6 \cdot \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}.$$

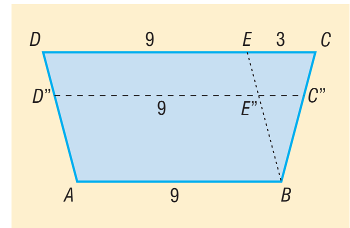
A medencében lévő víz térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{243\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{243\sqrt{3}}{2} \cdot 150\sqrt{3}} + 150\sqrt{3}\right) = 271\sqrt{3} \approx 469{,}39 \text{ m}^3.$$



b) Az *a)* részhez hasonló gondolatmenet alapján járunk el.

Ebben az esetben a húrtrapéz oldallapnak a szárak hosszabbik alap felé eső harmadolópontjait összekötő $D''C''$ szakasz hosszát kell meghatároznunk.



A szabályos hatszög alakú vízfelület oldaléle:

$$D''C'' = 9 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 11 \text{ m}.$$

A medencében lévő víz egy olyan csonka gúla térfogatával egyezik meg, amelynek magassága 4 m, az alaplapja 9 m oldalú, fedőlapja 11 m oldalú szabályos hatszög.

Az alaplap területe:

$$T = 6 \cdot \frac{9^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{243\sqrt{3}}{2}.$$

A fedőlap területe:

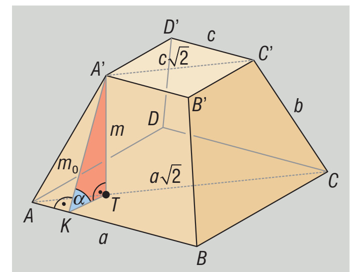
$$t = 6 \cdot \frac{11^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{363\sqrt{3}}{2}.$$

A medencében lévő víz térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{243\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{243\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{363\sqrt{3}}{2}} + \frac{363\sqrt{3}}{2}\right) = 602\sqrt{3} \approx 1042,69 \text{ m}^3.$$

4416 Használjuk az ábra jelöléseit.

Az egyenes csonka gúla alaplapjának éle legyen a, fedőlapjának éle c, testmagassága m, oldallapjának magassága m_o.



Mivel a palást területének harmada az $ACC'A'$ trapéz területe:

$$3 \cdot \frac{m \cdot \left(a\sqrt{2} + c\sqrt{2}\right)}{2} = 4 \cdot \frac{m_o \cdot (a + c)}{2},$$

$$m = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot m_o.$$

a) A csonka gúla A' csúcsának az $ABCD$ alaplapra eső merőleges vetülete legyen T, az AB alapélre eső merőleges vetülete pedig K.

A csonka gúla alaplapjának és az oldallapjának α hajlásszögét a KTA' derékszögű háromszögből meghatározhatjuk:

$$\sin\alpha = \frac{m}{m_o} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70,53°.$$

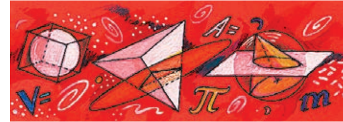
A csonka gúla alaplapjának és az oldallapjának hajlásszöge: 70,53°.

b) Az $A'TK$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételét felírva:

$$KT = \sqrt{m_o^2 - m^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot m\right)^2 - m^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot m.$$

Mivel A' pont T merőleges vetülete rajta van az $ABCD$ négyzet átlóján, az AKT háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög:

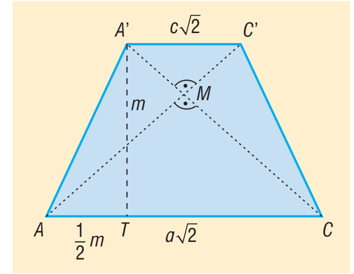
$$AT = KT \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot m \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} m.$$



Tekintsük az átlós $ACC'A'$ húrtrapéz síkmetszetet.

Az $ACC'A'$ húrtrapéz AC alapján az AT szakasz hossza az alapok különbségének a fele:

$$AT = \frac{1}{2}m = \frac{a\sqrt{2} - c\sqrt{2}}{2}.$$



Mivel az átlók merőlegesek egymásra, az átlók M metszéspontja az A, C illetve az A', C' pontokkal egyenlő szárú derékszögű háromszöget határoz meg. A derékszögű háromszögek átfogóhoz tartozó magassága az átfogó fele, tehát a csonka gúla m magassága AC és $A'C'$ szakaszok összegének a fele:

$$m = \frac{a\sqrt{2} + c\sqrt{2}}{2}.$$

Használjuk fel, hogy a csonka gúla testmagassága 30 cm:

$$\left.\begin{aligned} 30 &= \frac{a\sqrt{2} + c\sqrt{2}}{2} \\ 15 &= \frac{a\sqrt{2} - c\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszert megoldva:

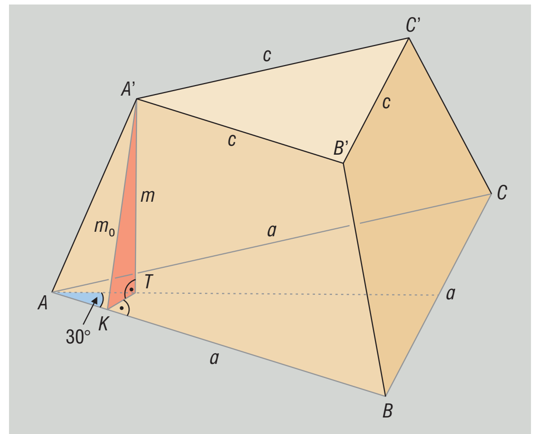
$$a = \frac{45\sqrt{2}}{2} \approx 31{,}82 \text{ cm} \quad \text{és} \quad c = \frac{15\sqrt{2}}{2} \approx 10{,}61 \text{ cm}.$$

A csonka gúla térfogata:

$$V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) = \frac{m}{3} \cdot \left(a^2 + a \cdot c + c^2\right) =$$

$$= \frac{30}{3} \cdot \left(\left(\frac{45\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{45\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{15\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = 14\,625 \text{ cm}^3.$$

4417 A mellékelt ábra jelöléseit használva a csonka gúla ABC alaplapjának éle $a = 10$ cm, $A'B'C'$ fedőlapjának éle $c = 8$ cm. Az oldallap magassága legyen m_o, a testmagasság m.



a) Mivel egy oldallapjának területe az alaplap és fedőlap területének mértani közepe, felírható:

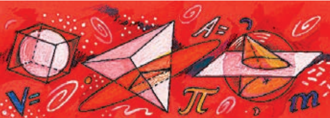
$$\frac{m_o \cdot (a + c)}{2} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}},$$

$$\frac{m_o \cdot (a + c)}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sqrt{3}}{4},$$

$$m_o = \frac{a \cdot c \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot (a + c)} = \frac{20\sqrt{3}}{9}.$$

A levélnehezék oldallapjának a magassága:

$$m_o = \frac{20\sqrt{3}}{9} \approx 3{,}85 \text{ cm}.$$



b) A csonka gúla térfogatának meghatározásához szükség van a test m magasságára. Az A' csúcs AB alapélre eső merőleges vetülete K. Az $ABB'A'$ húrtrapézból AK meghatározható:

$$AK = \frac{a-c}{2} = \frac{10-8}{2} = 1\text{ cm}.$$

Mivel az A' csúcsnak az alaplapra eső T merőleges vetülete rajta van a szabályos háromszög alaplapjának az A csúcsából kiinduló magasságán, az AKT derékszögű háromszög egy fél szabályos háromszög, vagyis:

$$KT = \frac{AK}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{ cm}.$$

Írjuk fel Pitagorasz tételét a KTA' háromszögben. A csonka gúla testmagassága:

$$m = \sqrt{m_o^2 - KT^2} = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{3}}{9}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{1173}}{9} \approx 3{,}81\text{ cm}.$$

A levélnehezék térfogata:

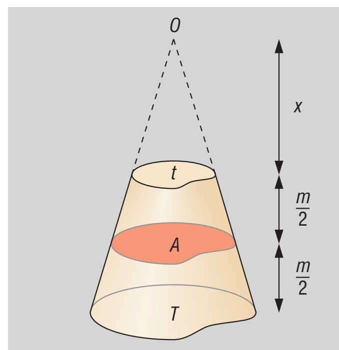
$$V = \frac{m}{3}\cdot\left(T + \sqrt{T\cdot t} + t\right) = \frac{\frac{\sqrt{1173}}{9}}{3}\cdot\left(\frac{10^2\cdot\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{10^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{8^2\cdot\sqrt{3}}{4}} + \frac{8^2\cdot\sqrt{3}}{4}\right) =$$

$$= \frac{61}{9}\cdot\sqrt{391} \approx 134{,}02\text{ cm}^3 = 0{,}13402\text{ dm}^3.$$

A levélnehezék tömege:

$$m_{\text{nehezék}} = V\cdot\rho = 0{,}13402\cdot 8 \approx 1{,}07\text{ kg}.$$

4418 Jelölje O annak a kúpszerű testnek a csúcsát, amelyből a csonka kúpszerű testet származtattuk. A fedőlapnak O-tól vett távolsága legyen x. Ha a csonka kúpszerű test magassága m, akkor az alaplapnak O-tól vett távolsága $m + x$, a metsző síknak pedig ugyanezen ponttól vett távolsága $\frac{m}{2} + x$.



A csonka kúpszerű test alaplapjának területe legyen T, fedőlapjáé t, a síkmetszet területe A.

Az O pontra vonatkozó térbeli középpontos hasonlósággal a fent említett síkidomok egymásba vihetők. A területük aránya az O-tól vett távolságuk négyzetével egyenesen arányos, így felírható:

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{T}} = \frac{x}{x+m} \quad \text{és} \quad \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{t}} = \frac{x+\frac{m}{2}}{x}.$$

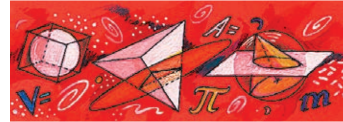
Az első egyenletből $x = \frac{\sqrt{t}\cdot m}{\sqrt{T}-\sqrt{t}}$, ezt a második egyenletbe behelyettesítve:

$$\sqrt{A} = \sqrt{t} + \sqrt{t}\cdot\frac{m}{2x} = \sqrt{t} + \sqrt{t}\cdot\frac{m}{2\cdot\frac{\sqrt{t}\cdot m}{\sqrt{T}-\sqrt{t}}} = \sqrt{t} + \frac{\sqrt{T}-\sqrt{t}}{2} = \frac{\sqrt{T}+\sqrt{t}}{2}.$$

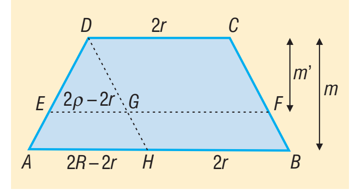
Tehát:

$$A = \left(\frac{\sqrt{T}+\sqrt{t}}{2}\right)^2 = \frac{T + t + 2\sqrt{T\cdot t}}{4} = \frac{\frac{T+t}{2} + \sqrt{T\cdot t}}{2},$$

amit bizonyítani kellett.



4419 A csonka kúp térfogatát felező kör síkmetszetnek a sugara legyen ρ, a csonka kúp magassága m, a felső csonka kúp magassága m'.



Tekintsük a csonka kúp alap-, illetve fedőköre középpontjára illeszkedő, az alaplap síkjára merőleges síkmetszetet. Ez trapéz alakú.

Az $ABCD$ trapéz alapjai $AB = 2R$, illetve $CD = 2r$. A csonka kúp alapokkal párhuzamos kör síkmetszetének átmérője a trapéz alapjaival párhuzamos $EF = 2\rho$ szakasz.

Húzzunk párhuzamost a D csúcson keresztül a CB szárral. Ez a párhuzamos AB oldalt H, az EF szakaszt G pontban metszi.

Az $AHD_\triangle$ és az $EGD_\triangle$ hasonló, mivel szögei páronként egyenlők. A hasonlóság aránya:

$$\frac{m'}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{m'}{m} = \frac{2\rho - 2r}{2R - 2r} = \frac{\rho - r}{R - r}.$$

A felső csonka kúp térfogata az egész csonka kúp térfogatának fele, tehát:

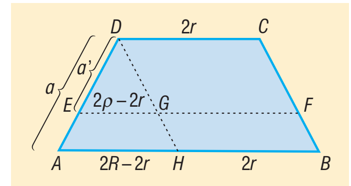
$$\frac{\frac{m' \cdot \pi}{3} \cdot \left(\rho^2 + \rho \cdot r + r^2\right)}{\frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{1}{2}, \quad \text{amiből} \quad \frac{m'}{m} \cdot \frac{\left(\rho^2 + \rho \cdot r + r^2\right)}{\left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{1}{2}.$$

Az utóbbi egyenletbe behelyettesítve az $\frac{m'}{m} = \frac{\rho - r}{R - r}$ arányt:

$$\frac{\rho - r}{R - r} \cdot \frac{\left(\rho^2 + \rho \cdot r + r^2\right)}{\left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho^3 - r^3}{R^3 - r^3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}.$$

A csonka kúp térfogatát felező sík körmetszetének a sugara: $\rho = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}$.

4420 Az egyenes csonka kúp palástjának területét felező kör síkmetszetnek a sugara legyen ρ, a csonka kúp alkotója a, és a felső csonka kúp alkotója a'.



A 4419. feladat megoldásához hasonlóan tekintsük a csonka kúp alap-, illetve fedőköre középpontjára illeszkedő, az alaplap síkjára merőleges $ABCD$ húrtrapéz síkmetszetet.

A már említett feladat megoldásában leírtak alapján az $AHD_\triangle$ és az $EGD_\triangle$ hasonló, mivel szögei páronként egyenlők. A hasonlóság aránya:

$$\frac{a'}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{a'}{a} = \frac{2\rho - 2r}{2R - 2r} = \frac{\rho - r}{R - r}.$$

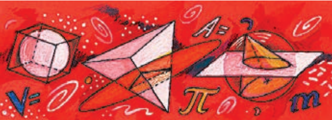
A felső csonka kúp palástjának területe feleakkora, mint az egész csonka kúp palástja, tehát:

$$\frac{a' \cdot (\rho + r) \cdot \pi}{a \cdot (R + r) \cdot \pi} = \frac{1}{2}.$$

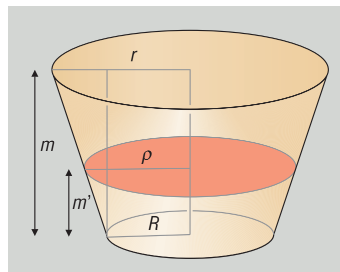
Az utóbbi egyenletbe behelyettesítve az $\frac{a'}{a} = \frac{\rho - r}{R - r}$ arányt:

$$\frac{\rho - r}{R - r} \cdot \frac{(\rho + r)}{(R + r)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}.$$

A csonka kúp palástjának területét felező sík síkmetszetének a sugara: $\rho = \sqrt{\frac{R^2 + r^2}{2}}$.



4421 A tál alapkörének sugara $R = 10$ cm, a fedőkör sugara $r = 15$ cm, magassága $m = 9$ cm.



Az üvegtál térfogata:

$$V_{tál} = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = 1425\pi \approx 4476{,}77 \text{ cm}^3.$$

A tálban a tej m' cm magasan áll, és szintje ρ cm sugarú körlapot határoz meg. A tej térfogata:

$$V_{tej} = \frac{m' \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot \rho + \rho^2\right) = 2000 \text{ cm}^3.$$

A két térfogat hányadosát felírva:

$$\frac{V_{tej}}{V_{tál}} = \frac{\frac{m' \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot \rho + \rho^2\right)}{\frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)}, \quad \text{amiből} \quad \frac{2000}{1425\pi} = \frac{m'}{m} \cdot \frac{\left(10^2 + 10\rho + \rho^2\right)}{\left(10^2 + 10 \cdot 15 + 15^2\right)}.$$

A 4419. feladat alapján:

$$\frac{m'}{m} = \frac{\rho - R}{r - R} = \frac{\rho - 10}{15 - 10}.$$

Behelyettesítve a kapott arányt:

$$\frac{2000}{1425\pi} = \frac{\rho - 10}{15 - 10} \cdot \frac{\left(10^2 + 10\rho + \rho^2\right)}{\left(10^2 + 10 \cdot 15 + 15^2\right)} = \frac{\rho^3 - 10^3}{15^3 - 10^3} \quad \Rightarrow \quad \rho = \sqrt[3]{\frac{4\,750\,000}{1425\pi} + 1000} \approx 12{,}73 \text{ cm}.$$

A két liter tej a tálban

$$m' = m \cdot \frac{\rho - R}{r - R} = 9 \cdot \frac{12{,}73 - 10}{15 - 10} \approx 4{,}91 \text{ cm}$$

magasan áll.

A gömb térfogata és felszíne – megoldások

4422 A gömb térfogata: $22\,449{,}30 \text{ cm}^3$.

4423 A gömb felszíne:
a) $165{,}39 \text{ cm}^2$; *b)* $605{,}21 \text{ cm}^2$.

4424 A gömb térfogata:
a) $3908{,}82 \text{ cm}^3$; *b)* $1486{,}91 \text{ cm}^3$.

4425 A gömb felszíne 9-szeresére, térfogata 27-szeresére nőtt, ha a sugarát háromszorosára növeltük.

4426 Az ejtőernyő $282{,}74 \text{ m}^2$ szövetből készült.

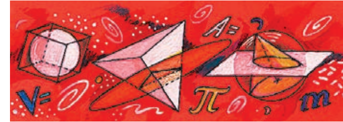
4427 A három gömb felszínének az összege $\frac{3}{\sqrt[3]{9}} \approx 1{,}44$-szorosa az eredeti gömb felszínének.

4428 Zoli zsebét húzza le jobban a benne levő üveggolyó.

4429 Az ágyúgolyó térfogata $82{,}30 \text{ cm}^3$-rel csökkent.

4430 A vízfelszín területe megközelítőleg $3{,}408 \cdot 10^8 \text{ km}^2$.

4431 A megtett távolság: $204{,}26$ km.



4432 *a)* A Vénusz sugara: 6051 km.

b) A Vénusz térfogata a Föld térfogatának 0,85-szorosa.

4433 A hengeres rész 3,43 m magas.

4434 A hidroglóbusz belső átmérőjének 8,74 m-nek kell lennie.

4435 A sík 24 cm távolságra halad a gömb középpontjától.

4436 *a)* A gömb térfogata: $\frac{500\pi}{3}$ cm^3, felszíne: 100π cm^2.

b) A gömb térfogata: 153 849,31 cm^3, felszíne: 13 885,06 cm^2.

4437 A két gömb sugara legyen R és $R + 2$.
Felszíneik összege:

$$4 \cdot R^2 \cdot \pi + 4 \cdot (R + 2)^2 \cdot \pi = 2060{,}88.$$

Az egyenletet rendezve az $R^2 + 2R - 80 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai: $R_1 = 8$ és $R_2 = -10$. Ez utóbbi nem lehet kör sugara.
A két gömb sugara 8 és 10 cm.

4438 A két gömb sugara legyen R és $R + 2$.
Térfogataik különbsége:

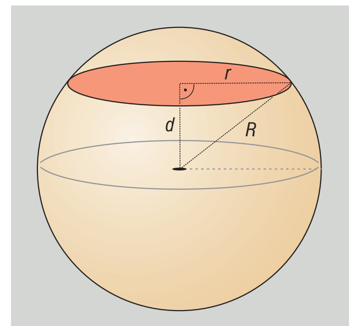
$$\frac{4 \cdot (R+2)^3 \cdot \pi}{3} - \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = 4255{,}81.$$

Az egyenletet rendezve az $R^2 + 2R - 168 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai: $R_1 = 12$ és $R_2 = -14$. Utóbbi nem lehet kör sugara.
A két gömb sugara 12 cm és 14 cm.

4439 A téglatest csúcsai körül szerkesztett gömböknek a téglatest belsejébe eső részei együtt egy 3 cm sugarú gömböt adnak ki.
A megmaradt test térfogata:

$$V = a \cdot b \cdot c - \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = 8 \cdot 10 \cdot 12 - \frac{4 \cdot 3^3 \cdot \pi}{3} = 960 - 36\pi \approx 846{,}90 \text{ cm}^3.$$

4440 A gömb sugara legyen R, a síkmetszet sugara r. Keressük a gömb középpontjának a síktól való d távolságát.



A gömb R sugarát a térfogatából meghatározhatjuk:

$$\frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = 1000 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}.$$

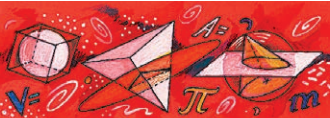
Az r sugarú kör területe fele a főgömb területének, tehát:

$$r^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} R^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{1}{2} R^2.$$

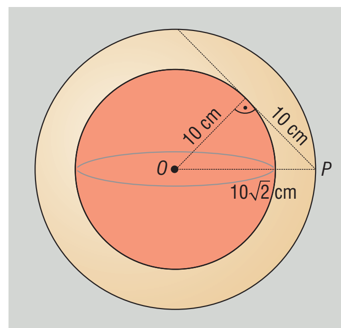
Mivel R, r és d derékszögű háromszöget határoznak meg:

$$d^2 = R^2 - r^2 = R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{1}{2}R^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{750}{\pi}}\right)^2, \quad \text{amiből} \quad d = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{750}{\pi}} \approx 4{,}39.$$

A gömb középpontjától a sík 4,39 cm-re van.



4441 Tekintsük a 10 cm sugarú gömb főkörét egy ilyen tulajdonságú P ponttal.



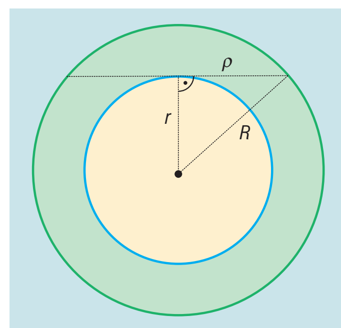
A feladat feltétele alapján a P pontból a főkörhöz húzott érintőszakasz hossza 10 cm. A P pont a gömb középpontjával és az érintési ponttal egy 10 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszöget határoz meg. A háromszög átfogója $10\sqrt{2}\text{ cm}$, ami a P pontnak a gömb középpontjától vett távolsága.

A P pont rajta van az adott gömbbel koncentrikus $10\sqrt{2}\text{ cm}$ sugarú gömbön.

Hasonló megfontolásból ez utóbbi gömb minden pontjából 10 cm sugarú érintőszakasz húzható az eredeti gömbhöz.

Az adott tulajdonságú pontok halmaza a 10 cm sugarú gömbbel koncentrikus $10\sqrt{2}\text{ cm}$ sugarú gömb.

4442 Legyen a nagyobb gömb sugara R, a kisebbé r. A kör síkmetszet sugara ρ.



A három sugár derékszögű háromszöget határoz meg, ezért:

$$\rho^2 = R^2 - r^2.$$

Annak a gömbnek a felszíne, amelyiknek a sugara ρ:

$$4 \cdot \rho^2 \cdot \pi = 4 \cdot \left(R^2 - r^2\right) \cdot \pi = 4 \cdot R^2 \cdot \pi - 4 \cdot r^2 \cdot \pi.$$

Ez éppen a bizonyítandó állítás.

4443 A külső gömb sugara 5 cm, a belső gömbé $4{,}4\text{ cm}$.

a) Az alumínium térfogatát megkapjuk, ha a külső gömb térfogatából kivonjuk a belső gömb térfogatát:

$$V = \frac{4 \cdot 5^3 \cdot \pi}{3} - \frac{4 \cdot (4{,}4)^3 \cdot \pi}{3} \approx 166{,}78\text{ cm}^3.$$

Az üreges gömb tömege:

$$m = V \cdot \rho = 166{,}78 \cdot 2{,}7 \approx 450{,}31\text{ g}.$$

b) A külső gömbfelszín a belsőnek

$$\frac{4 \cdot 5^2 \cdot \pi}{4 \cdot (4{,}4)^2 \cdot \pi} \cdot 100\% \approx 129{,}13\%\text{-a}.$$

A külső gömbfelszín $29{,}13\%$-kal nagyobb, mint a belső.

4444 Ha a tekegolyó tömege $2{,}8\text{ kg}$, akkor a térfogata:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{2{,}8}{1{,}4} = 2\text{ dm}^3.$$

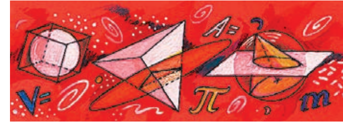
A golyó térfogatából R sugarára felírható:

$$\frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = 2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}\text{ dm}.$$

A tekegolyó az $s = 16{,}5\text{ m} = 165\text{ dm}$ hosszú pályán

$$n = \frac{s}{2 \cdot R \cdot \pi} = \frac{165}{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}\,\pi} \approx 33{,}60,$$

azaz közel 34-szer fordul meg.



4445 A szilvás gombócok sugara $R = 2$ cm, a fazék alapkörének sugara $r = 10$ cm, a fazék magassága $m = 28$ cm. A 20 darab szilvás gombóc térfogata:

$$V = 20 \cdot \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3}.$$

Ha vízbe tesszük mind a húszat, és a fazékban levő víz szintje h cm-rel megemelkedik, akkor:

$$r^2 \cdot \pi \cdot h = 20 \cdot \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} \quad \Rightarrow \quad h = 20 \cdot \frac{4 \cdot R^3}{3 \cdot r^2} = 20 \cdot \frac{4 \cdot 2^3}{3 \cdot 10^2} \approx 2{,}13.$$

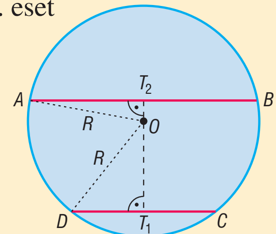
A fazekat $28 - 4 - 2{,}13 = 21{,}87$ cm magasan töltsük meg vízzel.

4446 Tekintsük az R sugarú gömbnek egy olyan főkörét, amelyik merőleges a metsző síkokra.
A síkoknak a főkörrel való közös pontjai az $AB = 2 \cdot 12$ cm és $DC = 2 \cdot 5$ cm párhuzamos húrok.
Bocsássunk merőlegeseket a kör O középpontjából a húrokra, ezeknek a talppontjai T_1 és T_2, amelyek távolsága 17 cm.
Írjuk fel Pitagorasz tételét az OAT_2 és ODT_1 derékszögű háromszögekben. Két eset lehetséges:

I. eset: Ha a kör középpontja a két húr között van:

$$R^2 = 12^2 + T_2O^2,$$
$$R^2 = 5^2 + (17 - T_2O)^2.$$

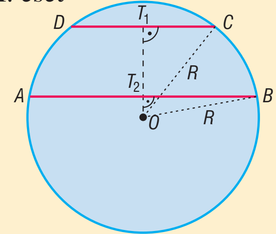
A két egyenletet kivonva egymásból $T_2O = 5$, ezt valamelyik egyenletbe visszahelyettesítve $R = 13$ adódik.



II. eset: Ha a kör középpontja nincs a két húr között:

$$R^2 = 12^2 + T_2O^2,$$
$$R^2 = 5^2 + (17 + T_2O)^2.$$

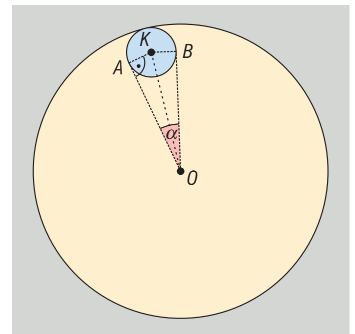
A két egyenletet kivonva egymásból a T_2O távolságra -5-öt kapunk, ami nem lehetséges.



A gömb sugara tehát 13 cm.
A gömb térfogata:

$$V = \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = \frac{8788\pi}{3} \approx 9202{,}77 \text{ cm}^3.$$

4447 *a)* Tekintsünk egy csapágygolyót, amely a csapágy külső gyűrűjét belülről érinti.
A középpontokat tartalmazó síkmetszeten O legyen a csapágygyűrű, K a csapágygolyó középpontja. Az O pontból a golyó főköréhez húzott érintők érintési pontjai A és B.
Az AOK derékszögű háromszögben:

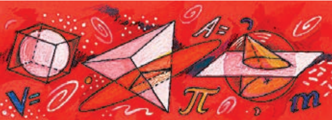


$$OK = \frac{54}{2} - \frac{5}{2} = 24{,}5 \quad \text{és} \quad AK = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Az O pontnál levő α középponti szög nagysága számolható:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2{,}5}{24{,}5} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 11{,}71°.$$

Mivel $\frac{360°}{11{,}71°} \approx 30{,}74$, a teljes szög kisebb, mint 31α, de nagyobb, mint 30α, tehát a csapágyba elhelyezhető golyók száma legfeljebb 30.



b) A csapágygolyók térfogatainak összege:

$$V = 30 \cdot \frac{4 \cdot R^3 \cdot \pi}{3} = 30 \cdot \frac{4 \cdot 2{,}5^3 \cdot \pi}{3} \approx 1963{,}50\ \text{mm}^3 = 1{,}96\ \text{cm}^3.$$

A csapágygolyók tömegének az összege:

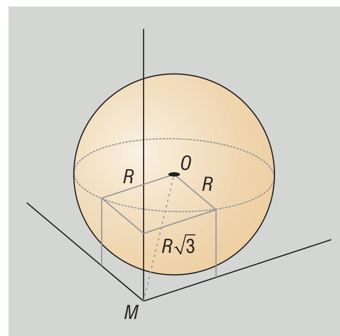
$$m = V \cdot \rho = 1{,}96 \cdot 7{,}14 \approx 13{,}99\ \text{g}.$$

4448 A biliárdgolyó sugara $r = 26{,}2$ mm. A négy golyó középpontja egy $2r$ oldalú szabályos tetraédert határoz meg, amelynek magassága $2r \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Az építmény magasságát úgy kaphatjuk meg, hogy a tetraéder magasságához még hozzáadjuk az alsó golyók középpontjának az asztal lapjától mért r távolságát, valamint a felső golyó középpontjának a golyó legmagasabb pontjától vett r távolságát. Az építmény magassága:

$$2r \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + 1\right) \approx 95{,}18\ \text{mm} \approx 9{,}52\ \text{cm}.$$

4449 Ha egy R sugarú gömb érint három egymásra merőleges síkot, akkor a gömb középpontjának a három síktól vett távolsága R. Tehát a gömb O középpontja egy R oldalélű kocka csúcsa, amelynek a síkok közös M pontjától vett távolsága a kocka átlójának a hossza, vagyis $OM = R\sqrt{3}$.



Ez alapján mind a teniszlabda, mind a golyó középpontja rajta van egy, a fiók sarkába képzeletben elhelyezett kocka testátlójának az egyenesén.

A teniszlabda középpontjának ezen az átlón a saroktól vett távolsága $\frac{7}{2} \cdot \sqrt{3}$, az r sugarú golyó középpontjának ugyanettől a ponttól vett távolsága $r\sqrt{3}$.

A golyó és a teniszlabda érintik egymást, tehát a középpontjaik távolsága a sugaraik hosszának az összege:

$$\frac{7}{2} \cdot \sqrt{3} - r\sqrt{3} = \frac{7}{2} + r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{7}{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}+1} = \frac{7}{4} \cdot \left(\sqrt{3}-1\right)^2 \approx 0{,}94.$$

A golyó sugara 0,94 cm.

Egymásba írt testek (kiegészítő anyag) – megoldások

4450 *a)* A gömb felszíne: $144\pi \approx 452{,}39\ \text{cm}^2$.

b) A gömb térfogata: $288\pi \approx 904{,}78\ \text{cm}^3$.

4451 *a)* A gömb felszíne: $432\pi \approx 1357{,}17\ \text{cm}^2$.

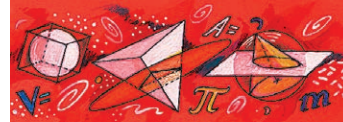
b) A gömb térfogata: $864 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \approx 4701{,}37\ \text{cm}^3$.

4452 A téglatest éleinek hossza: 22,28 cm, 33,43 cm és 44,57 cm.

4453 A négyzetes oszlop térfogata: $87\,655{,}23\ \text{cm}^3$.

4454 A doboz palástjának a felszíne: $48\pi \approx 150{,}80\ \text{cm}^2$.

4455 A doboz felszíne: $608\ \text{cm}^2$.



4456 *a)* A kúp felszíne: $100 \cdot \left(1+\sqrt{5}\right) \cdot \pi \approx 1016{,}64\ \text{cm}^2$.

b) A kúp térfogata: $\dfrac{2000}{3}\pi \approx 2094{,}40\ \text{cm}^3$.

4457 *a)* A gúla felszíne: $1440\ \text{cm}^2$.
b) A gúla térfogata: $1920\ \text{cm}^3$.

4458 *a)* A körkúp felszíne: $90\pi \approx 282{,}74\ \text{cm}^2$.
b) A körkúp térfogata: $100\pi \approx 314{,}16\ \text{cm}^3$.

4459 A hasáb magassága a beírt gömb átmérőjével egyenlő.

Mivel a beírt gömb érinti az oldallapokat, a gömb középpontján áthaladó, az alapokkal párhuzamos síkmetszet egy $24\ \text{cm}$ oldalú szabályos háromszög. A beírt gömb sugara ebbe a háromszögbe írható kör sugarával egyenlő.

A szabályos háromszög beírt körének sugara a háromszög magasságának a harmada:

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{24\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

A hasáb magassága:

$$2r = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86\ \text{cm}.$$

4460 A kockába írt gömb sugara a kocka élének a fele: $\dfrac{a}{2}$.

A kocka köré írt gömb sugara a kocka testátlójának a fele: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

A kocka éleit érintő gömb sugara a lapátló hosszának a fele: $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

A három gömb hasonló egymáshoz, és hasonlóságuk aránya a sugaraik hosszának aránya.

a) Hasonló testek felszínének az aránya a hasonlóság arányának a négyzete, tehát a három gömb felszínének az aránya:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 : \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 : \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1:3:2.$$

b) Hasonló testek térfogatának az aránya a hasonlóság arányának a köbe, tehát a három gömb térfogatának az aránya:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^3 : \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 : \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = 1:\sqrt{3^3}:\sqrt{2^3}.$$

4461 A téglatest élei legyenek a, b és c hosszúságúak. Két lapjának a területe:

$$a \cdot b = 48 \quad\Rightarrow\quad b = \frac{48}{a} \qquad \text{és} \qquad a \cdot c = 60 \quad\Rightarrow\quad c = \frac{60}{a}.$$

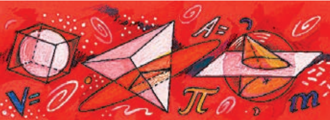
A téglatest köré írt gömb sugara a testátló fele, tehát:

$$5\sqrt{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} \qquad\Rightarrow\qquad a^2 + b^2 + c^2 = 200.$$

Az egyenletbe b és c helyére az előző összefüggéseket helyettesítve:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 200 \quad\Rightarrow\quad a^2 + \left(\frac{48}{a}\right)^2 + \left(\frac{60}{a}\right)^2 = 200 \quad\Rightarrow\quad a^4 - 200a^2 + 5904 = 0.$$

A kapott másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenletből a pozitív értékei: $a = 6$ és $a = 2\sqrt{41}$.

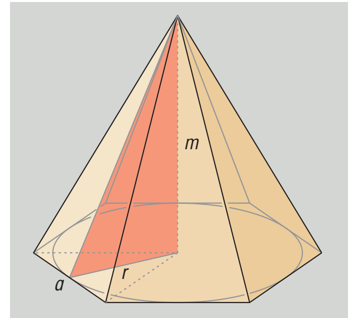


Az első esetben a téglatest éleinek hossza: 6 cm, 8 cm és 10 cm, a térfogata: 480 cm^3.

A második esetben a téglatest éleinek hossza: $2\sqrt{41}$ cm, $\frac{24\sqrt{41}}{41}$ cm és $\frac{30\sqrt{41}}{41}$ cm, a térfogata pedig $\frac{1440\sqrt{41}}{41}$ cm^3.

A téglatest térfogata lehet 480 cm^3 vagy $\frac{1440\sqrt{41}}{41} \approx 224{,}89$ cm^3.

4462 Legyen a szabályos hatszög alapú gúla alapéle a, magassága m.



A gúla térfogata:

$$V_{\text{gúla}} = \frac{T_{\text{hatszög}} \cdot m}{3} = \frac{6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m}{3} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot m.$$

A gúlából csiszolható legnagyobb térfogatú kúp magassága a gúla m magasságával egyezik meg. A kúp alapkörének a sugara a szabályos hatszög beírt körének a sugara.

Egy a oldalú szabályos hatszög beírt körének a sugara egy a oldalú szabályos háromszög magassága: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A kúp térfogata:

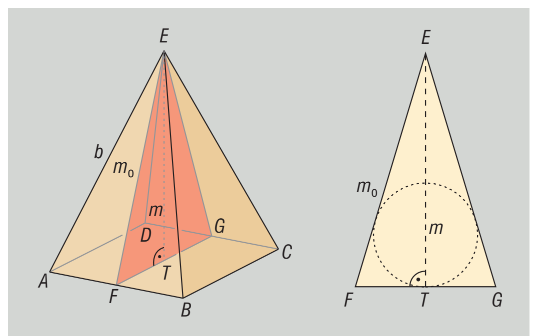
$$V_{\text{kúp}} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{a^2 \cdot \pi \cdot m}{4}.$$

A kúp a gúla térfogatának

$$\frac{V_{\text{kúp}}}{V_{\text{gúla}}} = \frac{\frac{a^2 \cdot \pi \cdot m}{4}}{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot m} \cdot 100 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \cdot 100 \approx 90{,}69\%\text{-a.}$$

A csiszoláskor keletkezett hulladék 9,31%.

4463 *a)* Vegyük a gúla alaplapjára merőleges, az alaplap középvonalát tartalmazó síkot.



Ez a sík a gúlából egy egyenlő szárú háromszöget, a beírt gömbből egy főkört metsz ki, amely a háromszög beírt köre.

A háromszög alapja $a = 12$ cm, magassága $m = 30$ cm, szára a gúla oldallapjának m_o magassága.

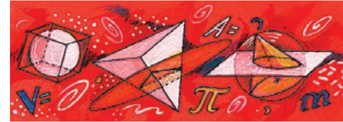
Az FTE derékszögű háromszögből:

$$m_o = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{936} = 6\sqrt{26}.$$

Jelölje a háromszög beírt körének sugarát r. A háromszög területét kétféleképpen felírva:

$$\frac{a \cdot m}{2} = r \cdot s = r \cdot \frac{a + 2 \cdot m_o}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{12 \cdot 30}{2} = r \cdot \frac{12 + 2 \cdot 6\sqrt{26}}{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{30}{1 + \sqrt{26}}.$$

A gúlába írható gömb sugara: $r = \frac{30}{1 + \sqrt{26}} \approx 4{,}92$ cm.



b) Vegyük az alaplap átlóját tartalmazó, az alaplapra merőleges síkot.

Ez a sík a gúlából egy egyenlő szárú háromszöget, a körülírt gömbből pedig egy főkört metsz ki, amely az említett háromszög körülírt köre.

A háromszög alapja $a\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ cm, magassága $m = 30$ cm, és a szár hossza a gúla b oldalélének a hosszúsága.

Legyen a háromszög köré írt kör sugara R, középpontja O.

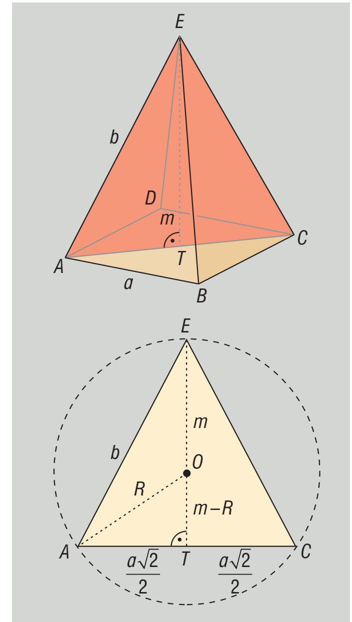
Az ábra jelöléseit használva az AOT derékszögű háromszög átfogója R, egyik befogója az alaplap átlójának a fele, másik befogója $m - R$.

A Pitagorasz-tétel alapján:

$$R^2 = (m - R)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (30 - R)^2 + \left(\frac{12\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

$$R = \frac{81}{5}.$$

A gúla köré írt gömb sugara $R = \frac{81}{5} = 16{,}2$ cm.



4464 *a)* A 4463. feladat *a)* részének megoldása alapján vegyük a gúla alaplapjára merőleges, az alaplap középvonalát tartalmazó síkot. A síkmetszet egy egyenlő oldalú háromszög, amelynek beírható köre a gúlába írható gömb főköre.

Mivel egy szabályos háromszög beírt körének a sugara a magasságának harmada, a beírt kör sugara 10 cm.

b) A gúla alapéle az *a)* részben említett szabályos háromszög oldala, amely a magasság hosszának ismeretében kiszámítható:

$$m = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad 30 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 20\sqrt{3}\text{ cm}.$$

A 4463. feladat *b)* részének megoldása alapján a körülírt gömb R sugarára:

$$R^2 = (m - R)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = (30 - R)^2 + \left(\frac{20\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

$$R = 25.$$

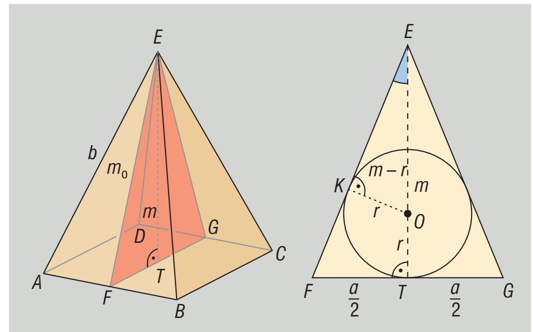
A gúla köré írt gömb sugara: $R = 25$ cm.

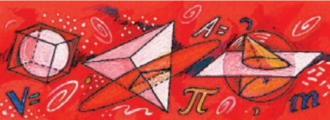
4465 Jelölje a gúla alapélét a, magasságát m, a beírt gömb sugarát r.

Vegyük a gúla alaplapjára merőleges, az alaplap középvonalát tartalmazó síkot.

Ez a sík a gúlából egy egyenlő szárú háromszöget, a beírt gömbből pedig egy főkört metsz ki, amely az említett háromszög beírt köre.

Az ábra jelöléseit használva az egyenlő szárú háromszög magassága $m = 32$ cm, alapja a, a beírt körének sugara $r = 8$ cm.





A háromszög szárának hossza:

$$FE = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

A síkmetszetben az FTE derékszögű háromszög hasonló az OKE derékszögű háromszöghöz, mivel FET hegyesszögük közös. A háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő:

$$\frac{FE}{OE} = \frac{FT}{OK} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{m - r} = \frac{\frac{a}{2}}{r},$$

amiből kapjuk, hogy:

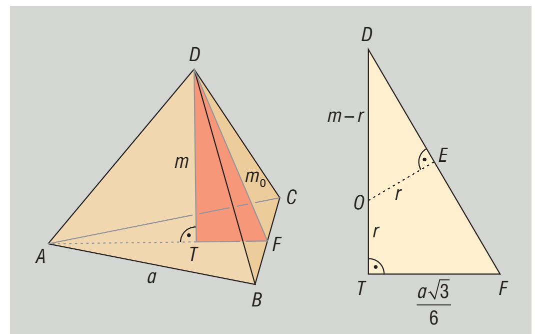
$$\frac{\sqrt{32^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{32 - 8} = \frac{\frac{a}{2}}{8} \quad \Rightarrow \quad a = 16\sqrt{2}.$$

A gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{a^2 \cdot m}{3} = \frac{\left(16\sqrt{2}\right)^2 \cdot 32}{3} = \frac{16384}{3} \approx 5461{,}33\ \text{cm}^3.$$

4466 Vegyük a gúla alaplapjára merőleges, az alaplap magasságát tartalmazó síkot. A gúla alapéle legyen a, magassága m.

a) A gúlába írt r sugarú gömb O középpontja rajta van a gúla magasságán, és az alaplapot a gúla magasságának talppontjában, az oldallapokat az oldallapok magasságain érinti.



Az ábra jelöléseit használva tekintsük az FTD derékszögű háromszöget. A háromszög T csúcsa az a oldalú szabályos háromszög súlypontja. A súlypont harmadolja a súlyvonalat, amely (szabályos háromszögről lévén szó) a magasság is egyben, tehát:

$$TF = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{18\sqrt{3}}{6} = 3\sqrt{3}.$$

A beírt gömb középpontja minden oldallaptól r távolságra van, tehát $OE = r$ és $OT = r$, ezért $OD = m - r$.

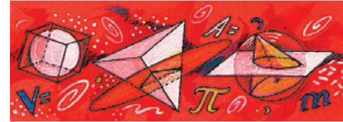
A háromszög FD átfogója a Pitagorasz-tétel alapján:

$$FD = \sqrt{m^2 + TF^2} = \sqrt{20^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{427}.$$

Az FTD derékszögű háromszög hasonló az OED derékszögű háromszöghöz, mivel FDT hegyesszögük közös. A háromszögek megfelelő oldalai hosszának aránya egyenlő:

$$\frac{TF}{OE} = \frac{FD}{OD} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{427}}{20 - r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{60\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + \sqrt{427}}.$$

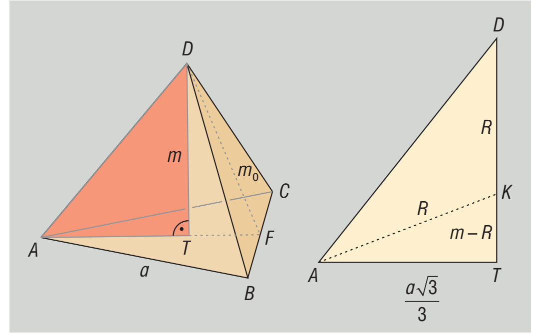
A gúlába írható gömb sugara: $r = \dfrac{60\sqrt{3}}{3\sqrt{3} + \sqrt{427}} \approx 4{,}02$ cm.



b) A gúla köré írt R sugarú gömb K középpontja rajta van a gúla magasságán.

Az ábra jelöléseit használva tekintsük az ATD derékszögű háromszöget. A háromszög T csúcsa az a oldalú szabályos háromszög súlypontja. A súlypont harmadolja a súlyvonalat, amely (szabályos háromszögről lévén szó) a magasság is egyben, tehát:

$$AT = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}.$$



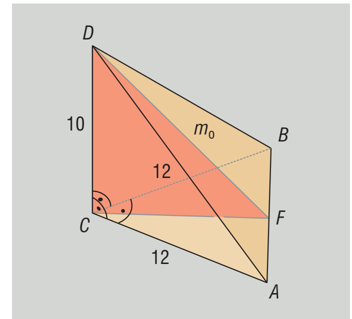
A gömb K középpontja a gúla minden csúcsától R távolságra van, tehát $AK = R$ és $KD = R$, ezért $KT = m - R$. Az AKT derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$R^2 = (m - R)^2 + AT^2 = (20 - R)^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{508}{40}.$$

A gúla köré írt gömb sugara: $R = \dfrac{508}{40} = 12{,}7$ cm.

4467 Ismert, hogy ha egy poliéderbe gömb írható, akkor a gömb r sugara a poliéder térfogatának és felszínének ismeretében kiszámítható: $r = \dfrac{3 \cdot V}{A}$.

Mivel tetraéderbe írható gömb, elég a tetraéder térfogatát és felszínét kiszámítani.



A tetraéder ABC alaplapjának területe:

$$T_{ABC} = \frac{12^2}{2} = 72 \text{ cm}^2,$$

a tetraéder magassága $m = 10$ cm, így a tetraéder térfogata:

$$V = \frac{T_{ABC} \cdot m}{3} = \frac{72 \cdot 10}{3} = 240 \text{ cm}^3.$$

Az ADC és BDC derékszögű háromszögek területe a befogók szorzatának fele, ezért:

$$T_{ADC} = T_{BDC} = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ cm}^2.$$

Az $ABD_\triangle$-ben a szimmetria miatt: $AF = BF = 6\sqrt{2}$ cm.

Az alaphoz tartozó m_o magasság Pitagorasz tétele alapján: $m_o = \sqrt{172} = 2\sqrt{43}$ cm.

Az $ABD_\triangle$ területe:

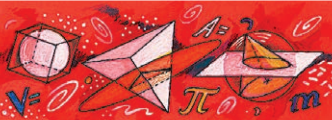
$$T_{ABD} = \frac{12\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{43}}{2} = 12\sqrt{86} \text{ cm}^2.$$

A gúla felszíne:

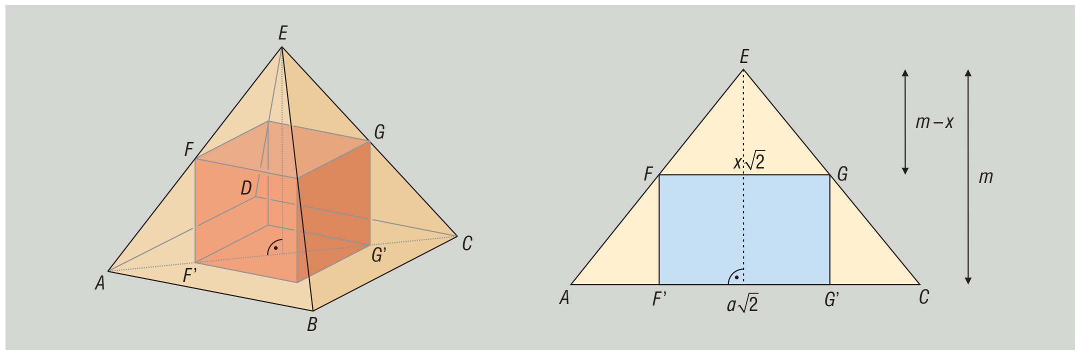
$$A = T_{ABC} + 2 \cdot T_{ACD} + T_{ABD} = 72 + 2 \cdot 60 + 12\sqrt{86} = 192 + 12\sqrt{86} \text{ cm}^2.$$

A gúlába írható gömb sugara:

$$r = \frac{3 \cdot V}{A} = \frac{3 \cdot 240}{192 + 12\sqrt{86}} = \frac{3 \cdot 20}{16 + \sqrt{86}} \approx 2{,}37 \text{ cm}.$$



4468 A gúla alapéle legyen a, magassága m hosszúságú. Használjuk az ábrák jelöléseit.



a) Vegyük a gúla ACE egyenlő szárú háromszög síkmetszetét. A háromszög alapja a gúla alaplapjának az átlója, vagyis $a\sqrt{2}$ hosszúságú. A háromszög magassága a gúla m magassága. Az oldalél és az alaplap EAC szögére felírhatjuk:

$$\operatorname{tg} EAC\sphericalangle = \frac{m}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} EAC\sphericalangle = \frac{10}{\frac{15\sqrt{2}}{2}} \quad \Rightarrow \quad EAC\sphericalangle \approx 43{,}31^\circ.$$

A gúla oldalélének az alaplappal bezárt szöge $43{,}31^\circ$.

b) A gúlába írt kocka élének hossza legyen x.

Ismét vegyük a gúla ACE egyenlő szárú háromszög síkmetszetét. A kockából ez a síkmetszet egy olyan $FGG'F'$ téglalapot metsz ki, amelyiknek az $FG = x\sqrt{2}$ hosszúságú oldala párhuzamos az $ACE_\triangle$ AC alapjával.

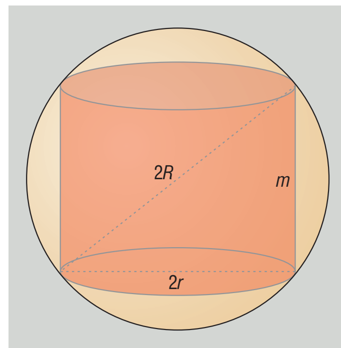
Az $ACE_\triangle$ és az $FGE_\triangle$ hasonló, mivel szögeik páronként egyenlők.

Felírhatjuk a két háromszögben, hogy az alapok hosszának aránya egyenlő a magasságok hosszának arányával:

$$\frac{m-x}{m} = \frac{x\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{10-x}{10} = \frac{x}{15} \quad \Rightarrow \quad x = 6.$$

A gúlába írt kocka éle 6 cm.

4469 Az R sugarú gömbbe írt henger alapkörének sugara legyen r, magassága m.



A feltétel szerint a henger palástjának területe kétszerese az alaplap területének, tehát:

$$2 \cdot r^2 \cdot \pi = 2r \cdot \pi \cdot m \quad \Rightarrow \quad r = m.$$

Vegyük a henger tengelymetszetét. Ez a tengelymetszet egy téglalap, amelynek egyik oldala $2r$, a másik m hosszúságú, és a téglalap átlója kétszer akkora, mint a gömb R sugara.

A Pitagorasz-tételt felírva:

$$(2R)^2 = (2r)^2 + m^2,$$
$$(2 \cdot 10)^2 = (2r)^2 + r^2,$$
$$r = 4\sqrt{5}.$$

A henger alapkörének sugara és magassága: $r = m = 4\sqrt{5}$ cm.

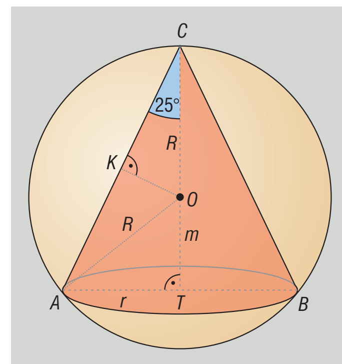
A henger térfogata:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot m = \left(4\sqrt{5}\right)^2 \cdot \pi \cdot 4\sqrt{5} = 320\sqrt{5} \cdot \pi \approx 2247{,}94\ \text{cm}^3.$$



4470 Mivel a gömb felszíne 400π cm², a gömb R sugara 10 cm.

Az ábra jelöléseit használva azt látjuk, hogy az $ABC_\triangle$ köré írható körének sugara R, középpontja O, valamint a háromszög szárszöge 50°. Az O középpontból az AC szárra bocsátott merőleges talppontja K.



Az OKC derékszögű háromszögből kifejezhető a kúp alkotójának hossza:

$$\cos 25° = \frac{\frac{AC}{2}}{R} \quad \Rightarrow \quad a = AC = 2R \cdot \cos 25° \approx 18{,}13 \text{ cm}.$$

Az ATC derékszögű háromszögben:

$$\cos 25° = \frac{CT}{AC} = \frac{CT}{2R \cdot \cos 25°},$$

amiből megkaphatjuk a kúp m magasságát:

$$m = CT = 2R \cdot \cos^2 25° \approx 16{,}43 \text{ cm}.$$

Az ATC derékszögű háromszög

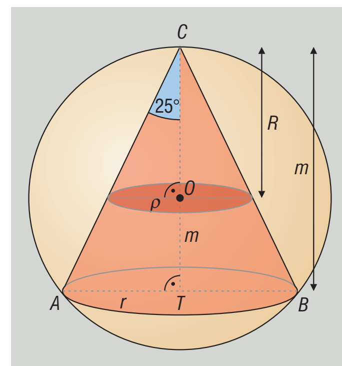
$$\frac{AT}{AC} = \sin 25° \quad \Rightarrow \quad AT = AC \cdot \sin 25°,$$

amiből a kúp alapkörének r sugara:

$$r = AT = 2R \cdot \cos 25° \cdot \sin 25° \approx 7{,}66 \text{ cm}.$$

a) A kúp felszíne:

$$A = r \cdot \pi \cdot (r + a) \approx 7{,}66\pi \cdot (7{,}66 + 18{,}13) \approx 620{,}63 \text{ cm}^2.$$



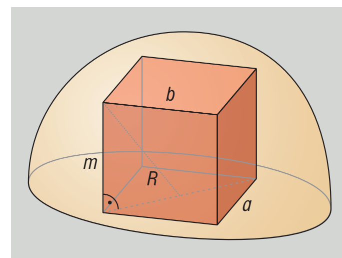
b) A gömb középpontján áthaladó, a kúp alaplapjával párhuzamos sík a kúpból az eredetihez hasonló kúpot metsz le. Legyen a hasonló kúp alapkörének sugara ρ. A hasonló kúpok magasságainak és az alapkörök sugarának a hosszára felírható:

$$\frac{\rho}{r} = \frac{R}{m} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{r \cdot R}{m} \quad \Rightarrow \quad \rho \approx \frac{7{,}66 \cdot 10}{16{,}43} \approx 4{,}66.$$

A sík által a kúpból kimetszett kör területe:

$$T = \rho^2 \cdot \pi \approx 4{,}66^2 \cdot \pi \approx 68{,}22 \text{ cm}^2.$$

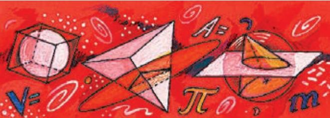
4471 A félgömb alakú üvegfedő középpontja az $a = 8$ cm és $b = 10$ cm oldalú téglalap átlóinak metszéspontja. Ha a sajt legnagyobb m magasságát keressük, akkor a téglalap átlójának a fele és az m magasság egy olyan derékszögű háromszög befogói, amelynek átfogója a gömb $R = 15$ cm hosszú sugara. A Pitagorasz-tétel alapján:



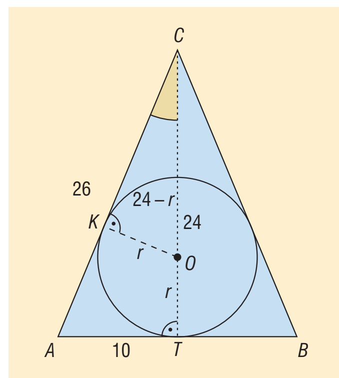
$$R^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^2 + m^2 \quad \Rightarrow \quad 15^2 = \left(\frac{\sqrt{8^2 + 10^2}}{2}\right)^2 + m^2,$$

amiből a magasságra kapjuk, hogy $m = 2\sqrt{46}$.

A sajt magassága legfeljebb $2\sqrt{46} \approx 13{,}56$ cm lehet.



4472 A pontszerű fényforrás és a golyó kör alakú árnyéka egy olyan forgáskúpot határoz meg, amelybe a golyó sugarával azonos sugarú gömb írható.



Vegyük a kúp ábrán látható tengelymetszetét.

A tengelymetszet olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek magassága $CT = 24$ cm, alapja $AB = 2 \cdot 10 = 20$ cm, a beírt körének sugara r. A háromszög szárának hossza:

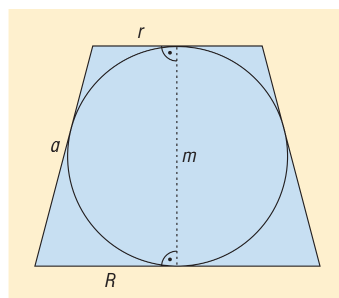
$$AC = \sqrt{CT^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26 \text{ cm}.$$

A síkmetszetben az ATC derékszögű háromszög hasonló az OKC derékszögű háromszöghöz, mivel ACT hegyesszögük közös. A háromszögek megfelelő oldalainak aránya egyenlő:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{AT}{OK} \quad \Rightarrow \quad \frac{26}{24 - r} = \frac{10}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{20}{3}.$$

A golyó átmérője $2r = \dfrac{40}{3} \approx 13{,}33$ cm.

4473 Legyen a csonka kúp alapkörének sugara R, fedőkörének sugara r, alkotója a, magassága m.



A csonka kúp tengelymetszete egy húrtrapéz, amely egyben érintőnégyszög is. A húrtrapéz alapjai $2R$, illetve $2r$ hosszúságúak. A trapéz magassága, ami a csonka kúp magassága is, a beírható kör sugarának a kétszeresével egyenlő: $m = 2\rho$. A húrtrapéz szárai a csonka kúp alkotói.

Az érintőnégyszögek tétele alapján:

$$2a = 2R + 2r \quad \Rightarrow \quad a = R + r.$$

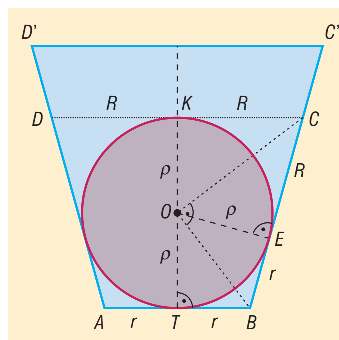
Írjuk fel a csonka kúp felszínének és térfogatának a hányadosát:

$$\frac{A}{V} = \frac{\pi \cdot \left(R^2 + r^2 + a \cdot (R + r)\right)}{\frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{3 \cdot \left(R^2 + r^2 + (R + r) \cdot (R + r)\right)}{2\rho \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} =$$

$$= \frac{3 \cdot (2 \cdot R^2 + 2 \cdot r^2 + 2 \cdot R \cdot r)}{2\rho \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)} = \frac{3}{\rho}.$$

A csonka kúp felszínének és térfogatának hányadosa $\dfrac{3}{\rho}$.

4474 A vödör alapkörének sugara $r = 5$ cm, fedőkörének sugara $R' = 8$ cm, magassága m.

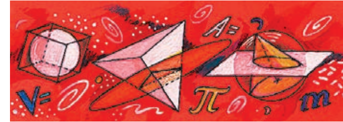


Vegyünk egy olyan síkot, amely metszi a vödröt, párhuzamos az alaplappal, és érinti a vödörbe tett labdát.

Ennek a síknak a vödörrel vett síkmetszete egy R sugarú kör.

Tekintsük a vödör ábrán látható $ABC'D'$ húrtrapéz alakú tengelymetszetét.

Az ábrán látható $ABCD$ húrtrapéz egyben érintőtrapéz is. A beírt kör sugara $\rho = 6$ cm, az alapok hossza $2r$, illetve $2R$, magassága pedig 2ρ.



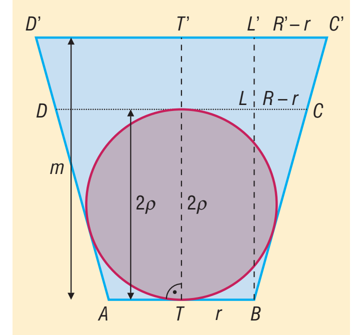
A beírt kör O középpontja a húrtrapéz B és C csúcsoknál levő szögek felezőinek metszéspontja. Ez a két szögfelező, mivel a trapéz egy száron nyugvó szögeinek összege 180º, derékszöget zár be.

A külső pontból egy körhöz húzott érintőszakaszok hosszának egyenlősége alapján $KC = CE = R$, illetve $TB = BE = r$.

Az OBC derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság $OE = \rho$, amely a BC átfogón R és r hosszúságú szeleteket hoz létre. A magasságtétel alapján:

$$\rho = \sqrt{R \cdot r} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\rho^2}{r} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{6^2}{5} = \frac{36}{5}.$$

A vödör m magasságának kiszámításához az $ABC'D'$ tengelymetszet B csúcsán keresztül állítsunk merőlegest a trapéz alapjára. Az így létrejött $BLC_\triangle$ és $BL'C'_\triangle$ hasonló, mivel szögeik páronként egyenlők. A két háromszög megfelelő oldalai hosszának aránya egyenlő:



$$\frac{m}{2\rho} = \frac{R'-r}{R-r} \quad \Rightarrow \quad m = 2\rho \cdot \frac{R'-r}{R-r} = 2 \cdot 6 \cdot \frac{8-5}{\frac{36}{5}-5} = \frac{180}{11}.$$

A vödör magassága: $m = \dfrac{180}{11} \approx 16{,}36$ cm.

4475 A kúp alapkörének sugara legyen r, magassága m, alkotója a, a beírt gömb sugara R.

A feladat feltétele szerint:

$$A_{\text{kúp}} = 2 \cdot A_{\text{gömb}} \quad \Rightarrow \quad r \cdot \pi \cdot (r+a) = 2 \cdot 4 \cdot R^2 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad r \cdot (r+a) = 8 \cdot R^2.$$

Tekintsük a kúp tengelymetszetét.

A tengelymetszet egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja $2r$, magassága m, szárainak hossza a, és a háromszögbe írt kör sugara R.

Számítsuk ki a háromszög területét kétféleképpen:

$$\frac{2 \cdot r \cdot m}{2} = R \cdot \frac{2 \cdot a + 2 \cdot r}{2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{r \cdot m}{a+r}.$$

Ezt beírva az $r \cdot (r+a) = 8 \cdot R^2$ összefüggésbe:

$$r \cdot (r+a) = 8 \cdot \left(\frac{r \cdot m}{a+r}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r + a = 8 \cdot \frac{r \cdot m^2}{(r+a)^2}.$$

Mivel $m^2 = a^2 - r^2$:

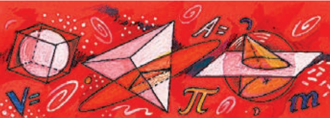
$$r + a = 8 \cdot \frac{r \cdot (a^2 - r^2)}{(r+a)^2} = 8 \cdot \frac{r \cdot (a+r) \cdot (a-r)}{(r+a)^2},$$

amiből kapjuk:

$$(r+a)^2 = 8 \cdot r \cdot (a-r),$$
$$9 \cdot r^2 - 6 \cdot r \cdot a + a^2 = 0,$$
$$(3 \cdot r - a)^2 = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az alkotó hossza a sugár háromszorosa, vagyis a fél nyílásszög szinusza $\frac{1}{3}$. Mivel ez a szög csak hegyesszög lehet, a fél nyílásszög 19,47º.

A kúp nyílásszöge 38,94º.



4476 A kúp alapkörének sugara legyen r, magassága m, alkotója a, a beírt gömb sugara R.
A 4475. feladat megoldása alapján:

$$m = \frac{(a+r)\cdot R}{r}.$$

A gömb és a kúp térfogatának aránya:

$$\frac{V_{\text{gömb}}}{V_{\text{kúp}}} = \frac{\frac{4\cdot R^3\cdot\pi}{3}}{\frac{r^2\cdot\pi\cdot m}{3}} = \frac{4\cdot R^3}{r^2\cdot m} = \frac{4\cdot R^3}{r^2\cdot\frac{R\cdot(a+r)}{r}} = \frac{4\cdot R^2}{r\cdot(a+r)}.$$

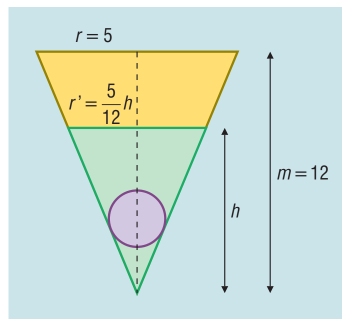
A gömb és a kúp felszínének aránya:

$$\frac{A_{\text{gömb}}}{A_{\text{kúp}}} = \frac{4\cdot R^2\cdot\pi}{r\cdot\pi\cdot(a+r)} = \frac{4\cdot R^2}{r\cdot(a+r)}.$$

Ez alapján egy tetszőleges forgáskúpba írt gömb térfogatának és a kúp térfogatának aránya egyenlő a gömb felszínének és a kúp felszínének az arányával.
A gömb felszíne a kúp felszínének harmada.

4477 A pohár egy $m = 12$ cm magasságú, $a = 13$ cm alkotójú kúp. A kúp alapkörének sugara:

$$r = \sqrt{a^2 - m^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$



A pohár térfogata:

$$V_{\text{pohár}} = \frac{r^2\cdot\pi\cdot m}{3} = \frac{5^2\cdot\pi\cdot 12}{3} = 100\pi.$$

A pohárban levő koktél térfogatát egy, a pohárhoz hasonló kúp térfogata adja meg. A hasonlóság aránya a kúpok magasságainak aránya: $\lambda = \frac{7{,}5}{12} = \frac{5}{8}$.

Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának a köbe:

$$\frac{V_{\text{koktél}}}{V_{\text{pohár}}} = \lambda^3 \quad\Rightarrow\quad V_{\text{koktél}} = \lambda^3\cdot V_{\text{pohár}} = \left(\frac{5}{8}\right)^3\cdot 100\pi = \frac{3125}{128}\pi.$$

A pohár által meghatározott kúpba írható gömb sugarát a 4475. feladat alapján az $R = \frac{r\cdot m}{a+r}$ összefüggéssel számolhatjuk:

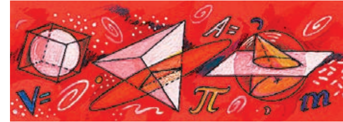
$$R = \frac{5\cdot 12}{13+5} = \frac{10}{3}\text{ cm}.$$

A koktél kúpjába írható gömb sugara:

$$\lambda\cdot R = \frac{5}{8}\cdot\frac{10}{3} = \frac{50}{24} > 1\text{ cm},$$

tehát a beletett 2 cm átmérőjű ringlót a koktél teljesen ellepi.
A ringlószilva térfogata:

$$V_{\text{szilva}} = \frac{4\cdot 1^3\cdot\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$



Ha a pohárba beletesszük a szilvát, akkor a pohárban levő koktél a szilvával együtt egy h magasságú kúpot alkot. A kúp alapkörének sugara legyen r'. Ez a kúp hasonló a pohár kúpjához, tehát megfelelő adatai hosszának hányadosára egyenlő:

$$\frac{r'}{h} = \frac{r}{m} \quad \Rightarrow \quad r' = h \cdot \frac{r}{m} = h \cdot \frac{5}{12}.$$

A h magasság kiszámítása:

$$V_{\text{koktél}} + V_{\text{szilva}} = \frac{(r')^2 \cdot \pi \cdot h}{3},$$

$$\frac{3125}{128}\pi + \frac{4\pi}{3} = \frac{\left(\frac{5}{12}h\right)^2 \cdot \pi \cdot h}{3},$$

$$h \approx 7{,}63.$$

A pohárban a koktél szintjének emelkedése:

$$h - 7{,}5 = 7{,}63 - 7{,}5 = 0{,}13 \text{ cm} = 1{,}3 \text{ mm}.$$

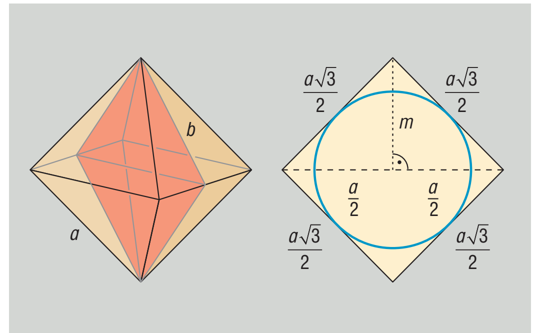
4478 Jelölje az oktaéder élének hosszúságát a, $a = 30$ cm.

a) Vegyük az oktaéder két szemközti párhuzamos élének felezőpontján áthaladó, ezen élekre merőleges síkmetszetét.

A rombusz alakú síkmetszet tartalmazza a beírt gömb középpontját, és a gömb főköre érinti a rombusz oldalait.

A rombusz oldalának hossza az a oldalú szabályos háromszög magassága:

$$b = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$$



A rombusz egyik átlója az oktaéder a élével egyenlő hosszú.

Keressük a rombuszba írt kör sugarának r hosszát.

A rombusz területét egyrészt felírhatjuk r segítségével:

$$T_{\text{rombusz}} = r \cdot \frac{k}{2} = r \cdot \frac{4b}{2} = 2r \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = r \cdot a\sqrt{3} = 30\sqrt{3} \cdot r.$$

Másrészt a rombusz területe egyenlő két a alapú és b szárú egyenlő szárú háromszög területével. A háromszög alaphoz tartozó magassága:

$$m = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(15\sqrt{3}\right)^2 - 15^2} = 15\sqrt{2},$$

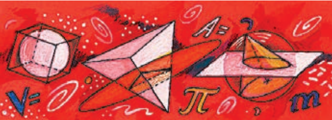
amiből a rombusz területére kapjuk, hogy

$$T_{\text{rombusz}} = 2 \cdot \frac{a \cdot m}{2} = 30 \cdot 15\sqrt{2} = 450\sqrt{2}.$$

A két kifejezés egyenlőségéből:

$$30\sqrt{3} \cdot r = 450\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{450\sqrt{2}}{30\sqrt{3}} = 5\sqrt{6}.$$

Az oktaéderbe írt gömb sugara: $r = 5\sqrt{6} \approx 12{,}25$ cm.

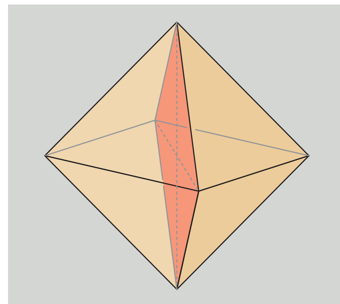


b) Vegyük az oktaéder két-két szemközti csúcsán áthaladó síkmetszetét. Ennek a négyszög alakú síkmetszetnek minden oldala a hosszúságú, átlóinak hossza $a\sqrt{2}$, a síkmetszet tehát négyzet.

A négyzet átlóinak metszéspontjától a szabályos oktaéder minden csúcsa $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ távolságra van.

Tehát a szabályos oktaéder köré írható gömb sugara:

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} \approx 21{,}21 \text{ cm}.$$



Vegyes feladatok I. – megoldások

4479 A visszamaradó testnek 56 csúcsa, 84 éle és 30 lapja van.

4480 A síkmetszet területe: $\frac{27\sqrt{3}}{8} \approx 5{,}85 \text{ cm}^2$.

4481 *a)* $\gamma = 90°$, $\beta \approx 33{,}69°$, $\alpha \approx 56{,}31°$. A háromszög c oldala: $2\sqrt{13} \approx 7{,}21$ cm.

b) Két ilyen háromszög van.

Az egyikben $\gamma = 30°$, a harmadik oldal hossza pedig körülbelül 3,23 cm. A háromszög másik két szöge: $\alpha \approx 111{,}73°$ és $\beta \approx 38{,}27°$.

A másik háromszögben $\gamma = 150°$, a harmadik oldal hossza körülbelül 9,67 cm. A háromszög további szögei: $\alpha \approx 18{,}15°$ és $\beta \approx 11{,}85°$.

4482 *a)* Mivel a megadott paralelogramma négyzet, bármely két szomszédos oldala 90°-os szöget zár be egymással.

b) A megadott paralelogramma két szomszédos oldala 11,54°-os vagy 168,46°-os szöget zár be egymással.

4483 A körgyűrűcikk szélessége 4,75 cm. A középponti szöge $\alpha = \frac{14}{7} = 2$ radián, azaz $\alpha \approx 114{,}59°$.

4484 *a)* A háromszög területét Heron képletével számolhatjuk:

$$T = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ cm}^2.$$

b) A legkisebb kör alakú kartonlapnak a sugara, amelyből a háromszöget kivághattuk, éppen a háromszög körülírt körének sugara. Ha a körülírt kör sugara R, akkor:

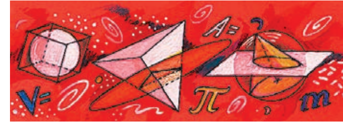
$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot T} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8{,}125 \text{ cm}.$$

A körülírt kör területe körülbelül $207{,}39 \text{ cm}^2$.

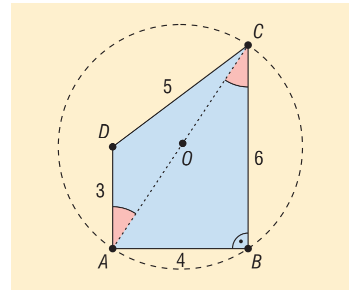
c) A háromszöglapból kivágható legnagyobb kör a háromszögbe írható kör. Ennek r sugarára:

$$r = \frac{T}{s} = \frac{84}{21} = 4 \text{ cm}.$$

A legnagyobb kivágható kör területe körülbelül $50{,}27 \text{ cm}^2$.



4485 *a)* Mivel $AB^2 + BC^2 = AC^2$ teljesül, ezért az $ABC_\triangle$ derékszögű, amelyben az AC oldal az átfogó.



Az $ABCD$ négyszög területére teljesül:

$$T_{ABCD} = T_{ABC} + T_{ACD}.$$

Az ABC derékszögű háromszög területe:

$$T_{ABC} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

Az $ACD_\triangle$ területét Heron képletével számolhatjuk:

$$T_{ACD} = \sqrt{\left(4+\sqrt{13}\right)\cdot\left(4-\sqrt{13}\right)\cdot\left(\sqrt{13}+1\right)\cdot\left(\sqrt{13}-1\right)} = \sqrt{3\cdot 12} = 6 \text{ cm}^2.$$

Az $ABCD$ négyszög területe:

$$T_{ABCD} = 12 + 6 = 18 \text{ cm}^2.$$

b) Mivel az $ABC_\triangle$ derékszögű, ezért ha létezik olyan kör, amelyre a négyszög összes csúcsa illeszkedik, akkor a húrnégyszögek tétele alapján az $ACD_\triangle$-ben a D csúcsnál szintén 90º-os szögnek kellene lennie. Mivel:

$$3^2 + 5^2 < \left(2\sqrt{13}\right)^2,$$

ezért az $ACD_\triangle$ tompaszögű, vagyis az $ABCD$ négyszögnek nem létezik körülírt köre (azaz nem húrnégyszög).

c) A *b)* részben láttuk, hogy az $ACD_\triangle$ tompaszögű, vagyis az AC átló a D pontból 90º-nál nagyobb szög alatt látszik, tehát a D pont az $ABC_\triangle$ Thalész-körének belső pontja. Az $ABCD$ négyszöget teljes egészében lefedő kör legalább akkora sugarú, mint az $ABC_\triangle$ köré írt kör sugara, ezért a legkisebb sugarú kör, amely lefedi a négyszöget, éppen az AC szakasz Thalész-köre. Ennek sugara $\sqrt{13}$ cm, területe pedig $13\pi \approx 40{,}84 \text{ cm}^2$.

d) A $DAC_\triangle$-ben a koszinusztétel alapján:

$$\cos DAC\sphericalangle = \frac{3^2 + \left(2\sqrt{13}\right)^2 - 5^2}{2\cdot 3\cdot\left(2\sqrt{13}\right)} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Az ABC derékszögű háromszögben:

$$\cos ACB\sphericalangle = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

A kapott eredményeket összehasonlítva láthatjuk, hogy $DAC\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, ezért az AD és CB szakaszok párhuzamosak egymással, így az $ABCD$ négyszög trapéz.

4486 *a)* A legbelső futósáv középkörének sugara:

$$r = \frac{400}{2\pi} \approx 63{,}66 \text{ m}.$$

Belülről kifelé haladva a következő futósáv középkörének sugara 64,66 m, hossza 406,3 méter. A következő sáv középkörének sugara 65,66 m, hossza 412,6 méter. A legkülső sáv középkörének sugara 66,66 méter, hossza 418,8 méter.

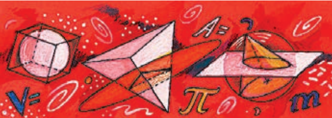
b) A körgyűrű területe:

$$2\cdot\rho\cdot m\cdot\pi,$$

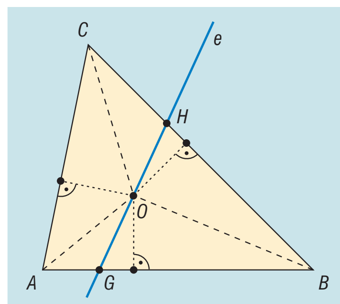
ahol ρ a középkörének sugara, m pedig a szélessége.

A képlet alkalmazásával az egyes futósávokra a következő területeket kapjuk:

$$400{,}0 \text{ m}^2,\quad 406{,}3 \text{ m}^2,\quad 412{,}6 \text{ m}^2,\quad 418{,}8 \text{ m}^2.$$



4487 Tegyük fel, hogy az e egyenes megfelezi az $ABC_\triangle$ kerületét és területét. Ha az e egyenes az $ABC_\triangle$-et két másik háromszögre bontja, azaz átmegy a háromszög egyik csúcsán, akkor a két részháromszög területének egyenlőségéből következik, hogy az e egyenes a háromszög egyik súlyvonala, a kerületek egyenlőségéből pedig az következik, hogy a háromszög egyenlő szárú. Mivel az egyenlő szárú háromszög csúcsából induló súlyvonal egyben szögfelező is, ezért az e egyenes valóban tartalmaz olyan pontot, amely a háromszög oldalaitól egyenlő távolságra található, ugyanis a beírt kör középpontja megfelel a feltételeknek.



Ha az e egyenes nem megy át a háromszög egyetlen csúcsán sem, akkor a háromszöget egy négyszögre és egy másik háromszögre bontja. Tegyük fel, hogy az egyenes a háromszögnek az AB és BC oldalait metszi, AB-t G-ben és BC-t H-ban. Legyen $AG = x$, $CH = y$, továbbá ebből adódóan $GB = c - x$ és $HB = a - y$. Legyen továbbá O a B csúcsból induló szögfelező és az e egyenes metszéspontja. Ekkor persze az O pont az AB és BC oldalaktól egyforma távolságra található, amit r-rel jelöltünk. A $GHB_\triangle$ területe:

$$T_{GHB} = \frac{(c-x)r}{2} + \frac{(a-y)r}{2}.$$

Az $AGHC$ négyszög területe:

$$T_{AGHC} = T_{AGO} + T_{HCO} + T_{CAO} = \frac{xr}{2} + \frac{yr}{2} + \frac{br'}{2},$$

ahol r' az O pont AC oldaltól mért távolsága.

Mivel az e egyenes megfelezi az $ABC_\triangle$ területét, ezért:

$$\frac{(c-x)r}{2} + \frac{(a-y)r}{2} = \frac{xr}{2} + \frac{yr}{2} + \frac{br'}{2},$$

$$(c-x)r + (a-y)r = xr + yr + br'. \qquad (1)$$

Vegyük figyelembe, hogy az e egyenes megfelezi az $ABC_\triangle$ kerületét is, ezért:

$$c - x + a - y = x + y + b,$$

amiből r-rel való szorzás után:

$$(c-x)r + (a-y)r = xr + yr + br. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenlőségek bal oldalán ugyanaz a kifejezés áll, ezért a bal oldalon álló mennyiségek is megegyeznek, azaz:

$$xr + yr + br' = xr + yr + br,$$

amiből következik, hogy $r = r'$. Ez azt jelenti, hogy az O pont a háromszög mindhárom oldalától egyenlő távolságra található, amit éppen bizonyítanunk kellett.

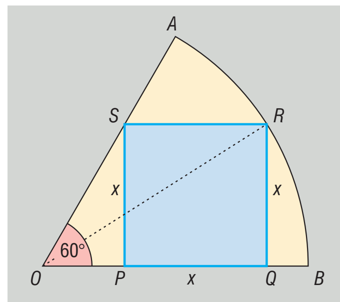
Megjegyzés: Az O pont éppen a háromszög beírt körének középpontja.

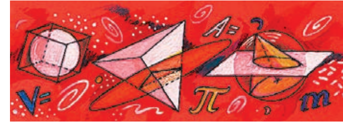
4488 A körcikkben az ábra szerint elhelyezett $PQRS$ négyzet oldalát jelöljük x-szel. Az OPS derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{OP} \quad \Rightarrow \quad OP = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Ebből következik, hogy az ORQ derékszögű háromszög oldalai:

$$OQ = x + \frac{x\sqrt{3}}{3} = x \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \qquad RQ = x, \qquad OR = 12 \text{ cm}.$$





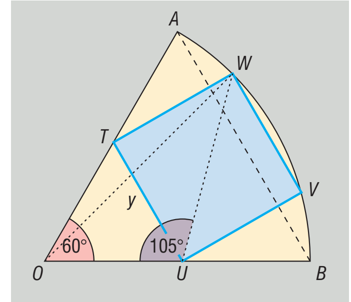
Az $ORQ_\triangle$-ben felírhatjuk Pitagorasz tételét:

$$x^2 \cdot \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + x^2 = 12^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 \cdot \frac{7+2\sqrt{3}}{3} = 144,$$

amiből a $PQRS$ négyzet területe:

$$x^2 = \frac{432}{7+2\sqrt{3}} \approx 41{,}28\ \text{cm}^2.$$

A körcikkben az ábra szerint elhelyezett $TUVW$ négyzet oldalát y-nal jelöltük. A feltételek szerint az UT szakasz párhuzamos az AB húrral, amiből következik, hogy az $OUT_\triangle$ szögei páronként megegyeznek az $OBA_\triangle$ szögeivel, azaz a két háromszög hasonló. Mivel az $OBA_\triangle$ szabályos ($OA = OB$ és a két oldal 60°-os szöget fog közre), ezért a hozzá hasonló $OUT_\triangle$ is szabályos, így $OU = y$.



Tekintsük ezután az $OUW_\triangle$-et. A háromszög oldalai:

$$OU = y, \qquad UW = y\sqrt{2} \qquad \text{és} \qquad OW = 12\ \text{cm}.$$

A háromszög megfelelő szögére:

$$OUW\sphericalangle = OUT\sphericalangle + TUW\sphericalangle = 60° + 45° = 105°.$$

A koszinusztétel alapján:

$$OW^2 = OU^2 + UW^2 - 2 \cdot OU \cdot UW \cdot \cos 105°,$$
$$144 = y^2 + 2y^2 - 2y\sqrt{2} \cdot y \cdot \cos 105°,$$

amiből a műveletek elvégzése után a $TUVW$ négyzet területére adódik, hogy:

$$y^2 = \frac{144}{3 - 2\sqrt{2} \cdot \cos 105°} \approx 38{,}58\ \text{cm}^2.$$

Eredményeink alapján az első esetben kapunk nagyobb területű négyzetet.

4489 Ha a fából készült kocka éleinek hossza x cm, valamint a darabolás után keletkező kisebb kocka éleinek hossza y cm ($x > y$), akkor a feltételek szerint a nagyobb kocka és a darabolás után keletkező kisebb kocka térfogatának különbségére teljesül, hogy: $x^3 - y^3 = 152$.

Az ismert nevezetes azonosság alkalmazásával szorzattá alakítva kapjuk, hogy:

$$(x-y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = 152.$$

A bal oldalon szereplő szorzat tényezői pozitív egész számok, továbbá látható, hogy a második tényező határozottan nagyobb, mint az első, ezért a következő esetek lehetségesek.

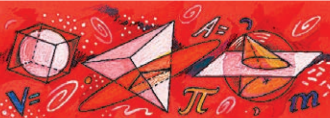
I. eset: $x - y = 1$ és $x^2 + xy + y^2 = 152$. Az első egyenletből $x^2 - 2xy + y^2 = 1$, amit a második egyenletből kivonva kapjuk, hogy $3xy = 151$. Mivel a 151 nem osztható 3-mal, ezért ez az eset nem teljesülhet.

II. eset: $x - y = 2$ és $x^2 + xy + y^2 = 76$. A második egyenletből kivonva az első egyenlet négyzetét: $3xy = 72$, azaz $xy = 24$. Tekintettel arra, hogy x pontosan 2-vel nagyobb y-nál, könnyen beláthatjuk, hogy $x = 6$, $y = 4$.

III. eset: $x - y = 4$ és $x^2 + xy + y^2 = 38$. A már kétszer alkalmazott módszer most a $3xy = 22$ egyenletre vezet. Mivel a 22 nem osztható 3-mal, ezért ez az eset nem teljesülhet.

IV. eset: $x - y = 8$ és $x^2 + xy + y^2 = 19$. Ezúttal $3xy = -45$. Mivel a bal oldalon pozitív számok állnak, amelyek szorzata nem lehet negatív szám, ezért ez az eset sem teljesülhet.

A feltételeknek egyetlen kocka tesz eleget, amelynek élei 6 cm hosszúak. Az ellenőrzés mutatja, hogy a 6 cm élű kocka valóban feldarabolható az ismertetett módon.



Vegyes feladatok II. – megoldások

4490 *a)* A téglatest felszíne: $2248\ \text{cm}^2$.
b) A téglatest térfogata: $6240\ \text{cm}^3$.

4491 A négyzetes hasáb térfogata: $1685{,}11\ \text{cm}^3$.

4492 A padlástér legnagyobb magassága: 8 m.

4493 *a)* A sajtból megközelítőleg 592 darab szokásos méretű sajtot lehetett volna készíteni.
b) Egy ilyen minőségű 1,4 kg tömegű sajt elkészítéséhez megközelítőleg 10 liter tej kellene.
c) Megközelítőleg 183 napra lenne elegendő.

4494 A hangyaleső lárvájának megközelítőleg $84\ \text{cm}^3$ térfogatú homokot kellett megmozgatnia.

4495 Egy liter aszúból körülbelül 242 borbonbont lehet készíteni.

4496 *a)* A keletkezett forgástest felszíne: $300\pi \approx 942{,}48\ \text{cm}^2$.
b) A keletkezett forgástest térfogata: $240\pi \approx 753{,}98\ \text{cm}^3$.

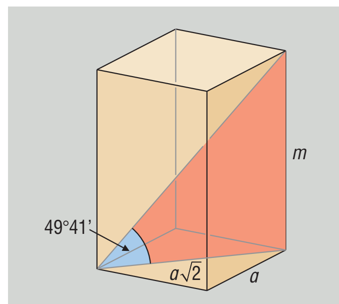
4497 A lavórba megközelítőleg 22 liter víz fér.

4498 A golyók felületének az összege: $130{,}46\ \text{cm}^2$.

4499 A négyzetes oszlop alapéle legyen a, oldaléle m hosszúságú.
A feladat feltételei alapján:

$$\frac{m}{a\sqrt{2}} = \operatorname{tg} 49°41',$$

$$a^2 \cdot m = 2880.$$



Az egyenletrendszer megoldásai: $a = 12$ és $m = 20$.
A négyzetes oszlop felszíne:

$$2 \cdot 12^2 + 48 \cdot 20 = 1248\ \text{cm}^2.$$

4500 A feladat szövege alapján egy átlagos testalkatú ember térfogata:

$$V_1 = 1{,}5 \cdot 0{,}08 = 0{,}12\ \text{m}^3.$$

A földön élő 6,9 milliárd ember térfogata:

$$V = 6{,}9 \cdot 10^9 \cdot 0{,}12 = 0{,}828 \cdot 10^9\ \text{m}^3 = 0{,}828\ \text{km}^3.$$

A Balaton vízszintjének h emelkedésére felírhatjuk, hogy:

$$0{,}828 = h \cdot 594 \quad \Rightarrow \quad h \approx 0{,}0014\ \text{km}.$$

A Balaton vízszintje 1,4 m-rel emelkedne.

4501 *a)* Az UTP kábel keresztmetszete $T = 2{,}75^2 \cdot \pi\ \text{mm}^2$, tehát kétszer 20 méter térfogata:

$$V = 2{,}75^2 \cdot \pi \cdot 40\,000 \approx 950\,332\ \text{mm}^3 \approx 950{,}33\ \text{cm}^3.$$

A kábel tömege:

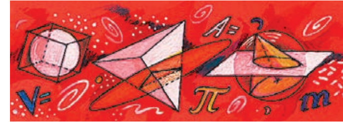
$$m_1 = V \cdot \rho = 950{,}33 \cdot 0{,}8 \approx 760\ \text{g}.$$

A cső tömege:

$$m_2 = 20 \cdot 0{,}5 = 10\ \text{dkg} = 100\ \text{g}.$$

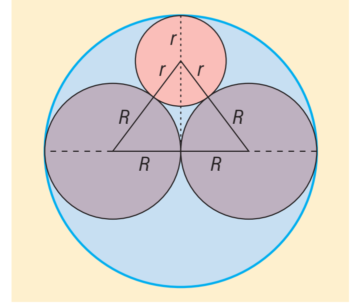
A cső és a kábel együttes tömege:

$$m = m_1 + m_2 = 860\ \text{g} = 86\ \text{dkg}.$$



b) Az UTP kábel sugara $R = 2{,}75$ mm, a csőbe még behúzható legnagyobb sugarú kábel sugara legyen r.

Vegyük a bekábelezett cső ábrán látható keresztmetszetét.

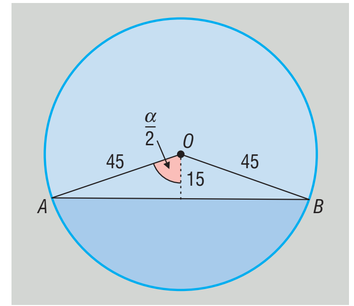


A három kábel kör keresztmetszetének középpontjai egy olyan egyenlő szárú háromszöget határoznak meg, amelynek alapja $2R$, szárai $R + r$, az alaphoz tartozó magassága pedig $2R - r$ hosszúságúak. Írjuk fel Pitagorasz tételét a magasság által létrehozott egyik derékszögű háromszögben:

$$(R + r)^2 = R^2 + (2R - r)^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2}{3}R.$$

A csőbe legfeljebb $2r = \frac{4}{3}R = \frac{4}{3} \cdot 2{,}75 \approx 3{,}67$ mm külső átmérőjű kábel húzható.

4502 Tekintsük a csatorna ábrán látható keresztmetszetét.



Számoljuk ki, hogy a keresztmetszetben mekkora területű részt foglal el az átfolyó víz. Ez egy 45 cm sugarú körszelet, amelyet az AB húr határol. A húrnak a kör középpontjától vett távolsága a sugár harmadrésze, azaz 15 cm. Ez alapján az α középponti szögre felírható:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{15}{45} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 141{,}06°.$$

A körszelet területe:

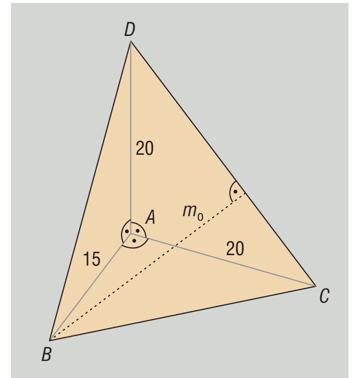
$$T = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2} = 45^2 \cdot \pi \cdot \frac{141{,}06°}{360°} - \frac{45^2 \cdot \sin 141{,}06°}{2} \approx$$

$$\approx 1856{,}37 \text{ cm}^2 \approx 0{,}19 \text{ m}^2.$$

A csatorna óránként annyi vizet enged át, amekkora egy T alapterületű $m = 0{,}8 \cdot 3600 = 2880$ m magasságú hengerszerű test térfogata.

Óránként a csatorna $V = T \cdot m = 547{,}2 \text{ m}^3$ vizet enged át.

4503 A tetraéder magassága legyen $m = AD = 20$ cm, az alaplapja az $ABC_\triangle$, melynek területe:



$$T_{ABC} = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150 \text{ cm}^2.$$

a) A tetraéder térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{15 \cdot 20}{2} \cdot 20}{3} = 1000 \text{ cm}^3.$$

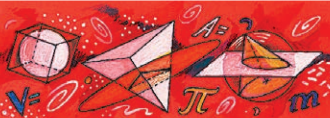
b) A felszín kiszámításához szükségünk van az oldallapok területére.

Az ABC derékszögű háromszögből:

$$BC = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ cm}.$$

Mivel az $ABC_\triangle$ és az $ABD_\triangle$ egybevágó: $DB = 25$ cm.

Az ACD derékszögű háromszögből: $DC = 20\sqrt{2}$ cm.



A tetraéder *BCD* oldallapja egyenlő szárú háromszög. Szárainak hossza 25 cm, alapja $20\sqrt{2}$ cm hosszú, így az alaphoz tartozó magassága:

$$m_o = \sqrt{25^2 - \left(\frac{20\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17} \quad\Rightarrow\quad T_{BCD} = \frac{20\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{17}}{2} = 50\sqrt{34}\ \text{cm}^2.$$

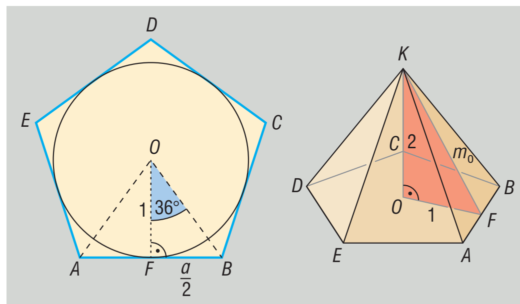
A tetraéder másik három oldallapjának területe:

$$T_{ABC} = T_{ABD} = 150\ \text{cm}^2 \quad \text{és} \quad T_{ACD} = 200\ \text{cm}^2.$$

A tetraéder felszíne:

$$A = 2\cdot T_{ABC} + T_{ACD} + T_{BCD} = 2\cdot 150 + 200 + 50\sqrt{34} = 500 + 50\sqrt{34} \approx 791{,}55\ \text{cm}^2.$$

4504 Az ábrák jelöléseinek megfelelően a gúla magassága $m = 2$ m, az alaplap beírt körének sugara $r = 1$ m, alapéle pedig a. Az alaplap beírt köre az alapélt az él F felezőpontjánál érinti.



A *BFO* derékszögű háromszög *O* csúcsánál lévő szöge: $\frac{360^\circ}{5}\cdot\frac{1}{2} = 36^\circ$, amiből:

$$\text{tg}\,36^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{1} \quad\Rightarrow\quad a \approx 2\cdot \text{tg}\,36^\circ\ \text{m}.$$

a) A gúla alaplapjának területe:

$$T = 5\cdot\frac{a\cdot r}{2} \approx 5\cdot \text{tg}\,36^\circ\ \text{m}^2 \quad\Rightarrow\quad V = \frac{T\cdot m}{3} = \frac{5\cdot \text{tg}\,36^\circ\cdot 2}{3} \approx 4{,}42\ \text{m}^3.$$

A gúla térfogata $4{,}42\ \text{m}^3$.

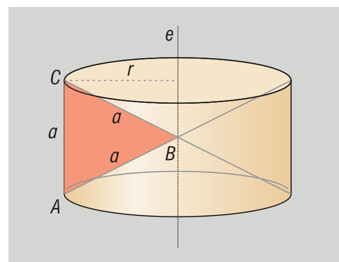
b) A palást felszínének kiszámításához szükség van az oldallap m_o magasságára. Az *OFK* derékszögű háromszögben ismerjük az *OK* és *OF* befogókat, így az m_o átfogó:

$$m_o = \sqrt{OK^2 + OF^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\ \text{m}.$$

A gúla palástjának felszíne:

$$A_{\text{palást}} = 5\cdot\frac{a\cdot m_o}{2} = 5\cdot \text{tg}\,36^\circ\cdot\sqrt{5} \approx 8{,}12\ \text{m}^2.$$

4505 Az $a = 12$ cm oldalú szabályos *ABC* háromszöget *e* egyenes körül megforgatva egy olyan körhengert kapunk, amelyből két egybevágó körkúpot kivágtunk.



A két kúp és a körhenger alapkörének a sugara a szabályos háromszög magassága: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. A henger magassága a háromszög oldalának az a hossza, a kúpok magassága pedig $\frac{a}{2}$.

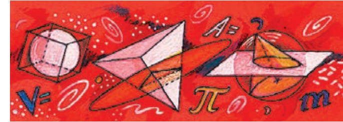
A kúpok alkotóinak hossza a háromszög a oldalának a hossza.

a) A henger és a két kúp palástjának területét összeadva megkapjuk a forgástest felszínét:

$$A = A_{\text{hengerpalást}} + 2\cdot A_{\text{kúppalást}} = 2r\cdot\pi\cdot a + 2r\cdot\pi\cdot a = 4r\cdot\pi\cdot a = 4\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\pi\cdot a =$$

$$= 2\sqrt{3}\cdot\pi\cdot a^2 = 2\sqrt{3}\cdot\pi\cdot 144 \approx 1567{,}12\ \text{cm}^2.$$

A forgástest felszíne: $A \approx 1567{,}12\ \text{cm}^2$.



b) A forgástest térfogatát megkaphatjuk úgy, hogy a henger térfogatából kivonjuk a két kúp térfogatát:

$$V = V_{\text{henger}} - 2 \cdot V_{\text{kúp}} = r^2 \cdot \pi \cdot m_{\text{henger}} - 2 \cdot \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m_{\text{kúp}}}{3} = r^2 \cdot \pi \cdot \left(m_{\text{henger}} - \frac{2}{3} m_{\text{kúp}}\right) =$$

$$= \left(\frac{12\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \left(12 - \frac{2}{3} \cdot 6\right) = 864\pi \approx 2714{,}34 \text{ cm}^3.$$

A forgástest térfogata: $V \approx 2714{,}34 \text{ cm}^3$.

4506 A csonka kúp alakú tejfölös doboz fedőkörének sugara $R = 4{,}25$ cm, az alapkör sugara $r = 3{,}25$ cm, az alkotója $a = 12$ cm.

A csonka kúp m magassága az $a^2 = m^2 + (R - r)^2$ összefüggés alapján:

$$m = \sqrt{a^2 - (R - r)^2} = \sqrt{12^2 - 1^2} = \sqrt{143} \text{ cm}.$$

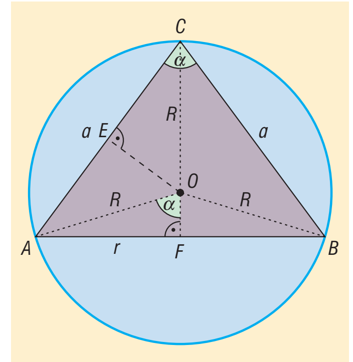
A doboz térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) = \frac{\sqrt{143} \cdot \pi}{3} \cdot \left(4{,}25^2 + 4{,}25 \cdot 3{,}25 + 3{,}25^2\right) \approx 531{,}43 \text{ cm}^3.$$

A tejföl sűrűsége:

$$\rho = \frac{m_{\text{tejföl}}}{V} = \frac{450}{531{,}43} \approx 0{,}85 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

4507 Az ábra jelölései szerint a gömbbe írt kúp tengelymetszete az $ABC_\triangle$. A háromszög körülírható körének sugara $R = 20$ cm, a háromszög szárának a hossza $a = \frac{3}{4} \cdot 2R = 30$ cm, ami a kúp a alkotójának hossza is egyben.



Az AOC egyenlő szárú háromszögben az AC oldalhoz tartozó EO magasság behúzásával kiszámítható az ABC egyenlő szárú háromszög C csúcsánál levő α szárszöge:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{EC}{OC} \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{15}{20} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 82{,}82°.$$

A kerületi és középponti szögek tétele alapján:

$$AOB\sphericalangle = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad AOF\sphericalangle = \alpha.$$

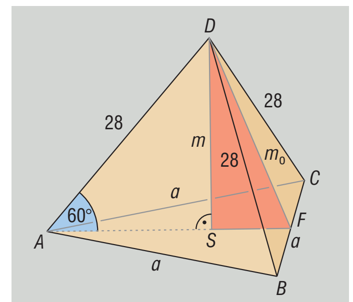
Az AOF derékszögű háromszögből meghatározható a kúp alapkörének sugara:

$$\sin\alpha = \frac{r}{R} \quad \Rightarrow \quad \sin 82{,}82° = \frac{r}{20} \quad \Rightarrow \quad r \approx 19{,}84 \text{ cm}.$$

A gömbbe írt kúp felszíne:

$$A = \pi \cdot r \cdot (r + a) = \pi \cdot 19{,}84 \cdot (19{,}84 + 30) \approx 3106{,}49 \text{ cm}^2.$$

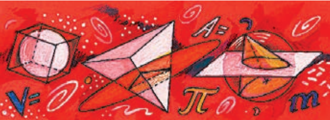
4508 Tekintsük a mellékelt ábrát. Legyen a gúla alapéle a.



Mivel szabályos háromszög alapú gúláról van szó, a D csúcsnak az alaplapra eső merőleges vetülete az ABC szabályos háromszög S súlypontja.

Egy háromszögben a súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja, tehát:

$$AS = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Az ASD fél szabályos háromszögben:

$$SD = AD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}, \quad \text{tehát a gúla testmagassága: } m = 14\sqrt{3} \text{ cm},$$

valamint:

$$AS = \frac{AD}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{a\sqrt{3}}{3} = 14, \quad \text{tehát a gúla alapéle: } a = 14\sqrt{3}.$$

A gúla oldallapjának magassága a DBC egyenlő szárú háromszögből számítható:

$$m_o = DF = \sqrt{BD^2 - BF^2} = \sqrt{28^2 - \left(\frac{14\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 7\sqrt{13} \text{ cm}.$$

a) A gúla felszíne:

$$A = T + 3 \cdot T_\triangle = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{a \cdot m_o}{2} = 147\sqrt{3} + 147\sqrt{39} \approx 1172{,}63 \text{ cm}^2.$$

b) A gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot m}{3} = \frac{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot m}{3} = 2058 \text{ cm}^3.$$

4509 A süvegcukor alapkörének sugara $r = 6$ cm, magassága $m = 30$ cm.

A kúp alkotójának hossza:

$$a = \sqrt{m^2 + r^2} = \sqrt{30^2 + 6^2} = \sqrt{936} = 6\sqrt{26} \text{ cm}.$$

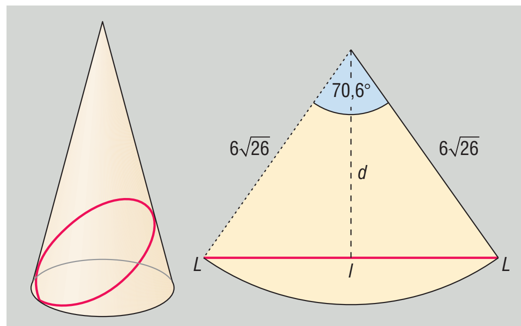
A kúp palástja egy a sugarú körcikk, amelynek középponti szögét jelölje α. A körcikk ívhossza az alaplap kerületével egyenlő:

$$2 \cdot a \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot r \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{26} \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 2 \cdot 6 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 70{,}60^\circ.$$

a) A kúp palástját az L ponton áthaladó alkotója mentén felvágjuk, és síkba kiterítjük. A légy által megtett legrövidebb út az így kapott körcikk l hosszúságú húrja. A húr hossza annak az egyenlő szárú háromszögnek az alapja, amelynek szárszöge $70{,}60^\circ$, szára $6\sqrt{26}$:

$$l = 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{26} \cdot \sin\frac{70{,}60^\circ}{2} \approx 35{,}36.$$

A légy által megtett út 35,36 cm.



b) Tekintsük a kúp P ponton áthaladó tengelymetszetét az ábrán látható jelölésekkel.

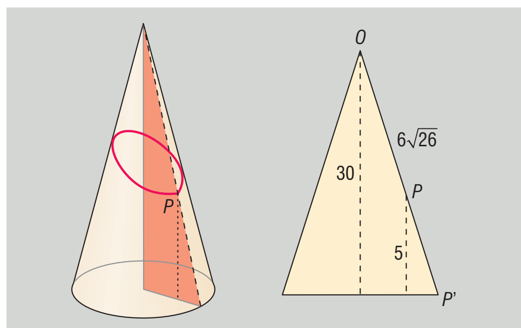
A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján:

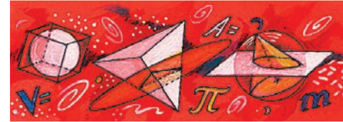
$$\frac{PP'}{OP'} = \frac{5}{30},$$

$$PP' = 6\sqrt{26} \cdot \frac{1}{6} = \sqrt{26}.$$

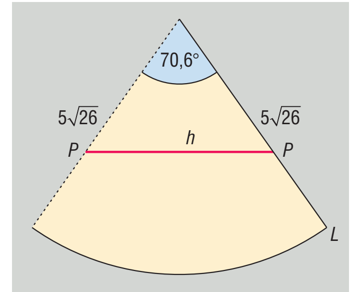
A P pontnak a kúp csúcsától vett távolsága:

$$OP = 6\sqrt{26} - \sqrt{26} = 5\sqrt{26} \text{ cm}.$$





A kúp palástját a P ponton áthaladó alkotója mentén felvágjuk, és síkba kiterítjük. A hangya által megtett legrövidebb út az így kapott körcikk azon h húrjának a hosszúsága, amelynek végpontjai a határoló sugarakon a kúp csúcsától $5\sqrt{26}$ cm távolságra vannak:



$$l = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{26} \cdot \sin\frac{70{,}60^\circ}{2} \approx 29{,}47.$$

A hangya által megtett út 29,47 cm.

c) A légy akkor kerül a legközelebb a kúp csúcsához, amikor az út felét megtette. Ekkor a csúcstól vett távolság:

$$d = 6\sqrt{26} \cdot \cos\frac{70{,}60^\circ}{2} \approx 24{,}97 \text{ cm}.$$

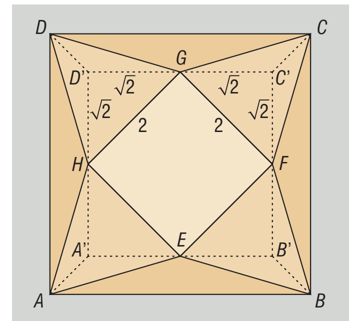
A hangya a kiinduló helyzetében van legtávolabb a kúp csúcsától. Ez a távolság:

$$OP = 5\sqrt{26} \approx 25{,}50 \text{ cm}.$$

Mivel $OP > d$, a hangya és a légy találkozhat a süvegcukor felületén.

4510 Tekintsünk egy olyan szabályos négyoldalú csonka gúlát, amelynek az alapéle 4 dm, a fedőlapjának felezőpontjai által meghatározott négyzet oldala 2 dm, magassága pedig 1,5 dm.

Az emlékmű talapzatát ennek a testnek a csonkolásával kapjuk úgy, hogy a fedőlap minden csúcsánál levágunk egy-egy tetraédert.



A felülnézeti ábrán az emlékmű talapzata az $ABCDEFGH$ test. Ha az $ABCDA'B'C'D'$ csonka gúla A', B', C' és D' csúcsainál levágjuk az $EHA'A$, az $EFB'B$, az $FGC'C$ és a $HGD'D$ egybevágó tetraédereket, akkor éppen a talapzatot kapjuk meg.

A HGD' egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója 2, így befogói $\sqrt{2}$ hosszúságúak, ezért az $A'B'C'D'$ négyzet oldalának a hossza $2\sqrt{2}$.

$$V_{ABCDA'B'C'D'} = V = \frac{m}{3} \cdot \left(T + \sqrt{T \cdot t} + t\right) =$$
$$= \frac{1{,}5}{3} \cdot \left(4^2 + 4 \cdot 2\sqrt{2} + \left(2\sqrt{2}\right)^2\right) = 12 + 4\sqrt{2}.$$

A levágandó egybevágó tetraéderek (pl. $HGD'D$) alaplapjának területe a $\sqrt{2}$ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög területe, magassága $m = 1{,}5$, így:

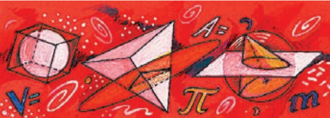
$$T' = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = 1 \quad \text{és} \quad V_{\text{tetraéder}} = \frac{T' \cdot m}{3} = \frac{1}{2}.$$

Az emlékmű térfogata:

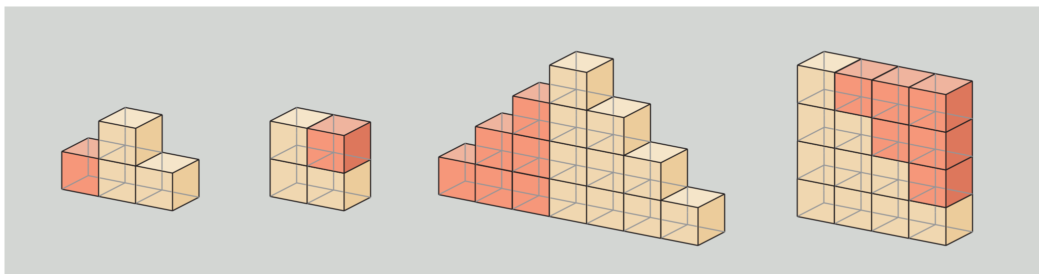
$$V = V_{ABCDA'B'C'D'} - 4 \cdot V_{\text{tetraéder}} = 12 + 4\sqrt{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} =$$
$$= 10 + 4\sqrt{2} \approx 15{,}66 \text{ dm}^3.$$

A talapzat tömege:

$$m_{\text{talapzat}} = V \cdot \rho = 15{,}66 \cdot 2{,}7 = 42{,}28 \text{ kg}.$$



4511 *a)* Észrevehető, hogy minden függőleges réteg átdarabolható egy négyzetes elrendezésbe:



Mivel a rétegek magassága mindig kettővel nő, ezért a páros négyzetszámok adják meg a szomszédos rétegekben levő kockák darabszámát.

Az építményben a kis kockák száma:

$$4 + 16 + 36 + 64 + 100 + 144 + 100 + 64 + 36 + 16 + 4 = 584.$$

b) Az építmény elölnézetének területe megegyezik a legmagasabb függőleges réteg területével. Ezt a felületet elöl és hátul is le kell festeni. Az előzőek alapján ez a két felület:

$$2 \cdot 12^2 = 288\ \text{cm}^2.$$

Az építmény oldalnézetben kétkockányi magasságról indul, és mindig újabb két kockával növekszik, amíg el nem éri a 12 kockányi magasságot, majd onnan az előző szabály alapján kétkockányi magasságig csökken. Két oldalról a lefestendő felület:

$$2 \cdot (2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2) = 144\ \text{cm}^2.$$

Felülről az építmény alapjának megfelelő területet kell lefesteni:

$$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 19 + 15 + 11 + 7 + 3 = 133\ \text{cm}^2.$$

A befestendő felület összesen:

$$288 + 144 + 133 = 565\ \text{cm}^2.$$

c) Az első függőleges réteg 2^2 darab kockából áll, és ennyit takar el a második függőleges réteg nem szélső kockáiból, így ezeket nem kell befesteni.

A második függőleges réteg 4^2 darabot takar el, a harmadik 6^2-t, és így tovább egészen az ötödik függőleges rétegig, ami 10^2 kocka festését nem engedi meg a hatodik legmagasabb rétegből.

Ettől kezdve a csökkenő magasságú oldalon az előzőkhöz hasonlóan gondolkodhatunk.

Az építményben így

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 8^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2 = 340$$

kockának nem lesz egy oldala sem befestve.



12.4. VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS, STATISZTIKA

Geometriai valószínűség – megoldások

4512 *a)* $p = \frac{4}{10} = 0,4.$

b) Nem, a végpont nem befolyásolja az intervallum hosszát.

4513 –

4514 *a)* $p = \frac{4}{9} \approx 0,44;$ *b)* $p = \frac{5}{8} = 0,625;$ *c)* $p = \frac{1+1}{6} \approx 0,33.$

4515 *a)* $p = \frac{4}{9} \approx 0,44;$ *b)* $p = \frac{5}{9} \approx 0,56.$

4516 $p = 0,7 = \frac{x}{7},$ így $x = 4,9.$ I-nek 4,9 hosszú intervallumnak kell lennie. Pl. $[8;\ 12,9]$.

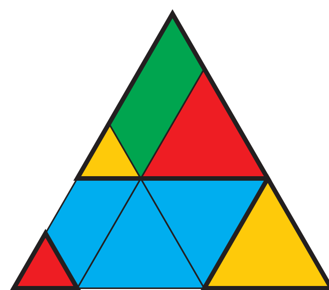
4517 $p = \frac{18}{19} - \frac{11}{20} = \frac{151}{380} \approx 0,3974.$

4518 $p = \frac{12 - 5 \cdot 0,8}{12} = \frac{2}{3} \approx 0,67.$

4519 $p = \frac{5 \cdot 15 - 2 \cdot 3^2}{5 \cdot 15} = \frac{57}{75} = 0,76.$

4520 *a)* $P_{\text{bull}} = \frac{1,5^2 \cdot \pi}{16,75^2 \cdot \pi} \approx 0,008;$ *b)* $P_{\text{bull's eye}} = \frac{0,75^2 \cdot \pi}{16,75^2 \cdot \pi} \approx 0,002.$

4521 Tekintsük az ablak nyitott (kék) részén kívüli darabokat.



I. megoldás: Ezek három, az eredetihez hasonló háromszöget alkotnak. A szöveg alapján tudjuk, hogy a kis háromszögek oldalai feleakkorák, mint egy nagyobb háromszög oldala. Mivel két nagyobb és egy pici háromszög oldala kiadja az ablak alsó oldalát, így a kis piros háromszög oldala éppen $\frac{1}{5}$-e, a sárga nagyobb háromszög oldala $\frac{2}{5}$-e, míg a felső színes háromszög oldala $\frac{3}{5}$-e az ablak oldalának. A hasonlóságnál igazoltak alapján (hasonló alakzatok területei a hasonlósági arány négyzetével arányosak):

$$P_{(\text{betöri az ablakot})} = \frac{T_{\text{nem kék}}}{T_{\text{ablak}}} = \frac{\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{9}{25}}{1} = \frac{14}{25} = 0,56.$$

II. megoldás: A feladatot átdarabolással is megoldhatjuk. Számoljuk össze, hogy a bal alsó kis piros háromszöget hányszor mérhetjük fel az ábra többi alkotóelemére. (A hasonlóság miatt ezt megtehetjük.)



4522 Gyakorlatilag nyolc sávot látunk a táblán a középkört is beleértve, így a tábla sugara 16 cm. Bármely sáv területét megkapjuk, ha a külső határoló kör területéből kivonjuk a belső határoló kör területét.

a) $p = \dfrac{2^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}015625;$

b) $p = \dfrac{4^2 \cdot \pi - 2^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}046875;$

c) $p = \dfrac{8^2 \cdot \pi - 6^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}109375;$

d) $p = \dfrac{12^2 \cdot \pi - 10^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}171875;$

e) $p = \dfrac{6^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}140625;$

f) $p = 1 - \dfrac{10^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}609375;$

g) $p = \dfrac{12^2 \cdot \pi - 4^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} = 0{,}5.$

h) Két dobásból 15 pontot úgy érhetünk el, ha 9-et és 6-ot, vagy 6-ot és 9-et, vagy 8-at és 7-et, vagy 7-et és 8-at dobunk:

$$P(9 \text{ és } 6 \quad \text{vagy} \quad 6 \text{ és } 9) = 2 \cdot \frac{4^2 \cdot \pi - 2^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} \cdot \frac{10^2 \cdot \pi - 8^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} \approx 0{,}01318,$$

$$P(8 \text{ és } 7 \quad \text{vagy} \quad 7 \text{ és } 8) = 2 \cdot \frac{6^2 \cdot \pi - 4^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} \cdot \frac{8^2 \cdot \pi - 6^2 \cdot \pi}{16^2 \cdot \pi} \approx 0{,}01708.$$

A két eredmény összege adja a kérdésre a választ: $p \approx 0{,}03$.

4523 Először számítsuk ki a dupla 20 és a tripla 20 pontszámot adó részek területeit:

$$T_{D20} = \frac{16{,}75^2 \cdot \pi - 15{,}75^2 \cdot \pi}{20} \approx 5{,}105 \text{ cm}^2,$$

$$T_{T20} = \frac{10{,}75^2 \cdot \pi - 9{,}75^2 \cdot \pi}{20} \approx 3{,}22 \text{ cm}^2.$$

Ezek után könnyebb kiszámítani a sima 20 pontot érő területet:

$$T_{20} = \frac{15{,}75^2 \cdot \pi - 1{,}5^2 \cdot \pi}{20} - T_{T20} \approx 38{,}61 - 3{,}22 = 35{,}39 \text{ cm}^2.$$

Fel vagyunk vértezve a valószínűségek kiszámításához szükséges adatokkal.

a) $P(\text{D20}) = \dfrac{T_{D20}}{T_{20} + T_{D20} + T_{T20}} \approx 0{,}1168;$

b) $P(\text{T20}) = \dfrac{T_{T20}}{T_{20} + T_{D20} + T_{T20}} \approx 0{,}0737.$

c) Az előző pontból:

$$P(20) = 1 - P(\text{D20}) - P(\text{T20}) \approx 0{,}8096.$$

Két nyíllal 80 pontot úgy szerezhet Dávid, ha két dupla 20-at, vagy egy tripla és egy sima 20-at, vagy egy sima és egy tripla 20-at dob. Valószínűségeik összege:

$$P(80 \text{ pont}) = P(\text{D20}) \cdot P(\text{D20}) + 2 \cdot P(20) \cdot P(\text{T20}) \approx 0{,}1328.$$

4524 Írjuk fel a valószínűséget. Jelölje a kis kör sugarát r, a nagy köréت R. Ekkor:

$$P = \frac{r^2 \cdot \pi}{R^2 \cdot \pi} = 0{,}01,$$

innen $r = 0{,}1 \cdot R$.

Tehát a középkör sugara 10%-a kell, hogy legyen a tábla sugarának.



4525 Írjuk fel a másodfokú egyenlet megoldóképletét, egyszerűsítsünk 2-vel:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4c}}{2}=2\pm\sqrt{4-c}.$$

Természetesen akkor lesz mindkét megoldás 1-nél nagyobb, ha a kisebb gyök is nagyobb 1-nél:

$$2-\sqrt{4-c}>1.$$

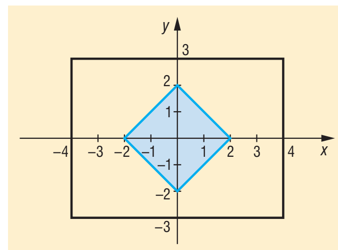
Megoldását a $c>3$ valós számok adják. Így a keresett valószínűség:

$$p=\frac{1}{6}.$$

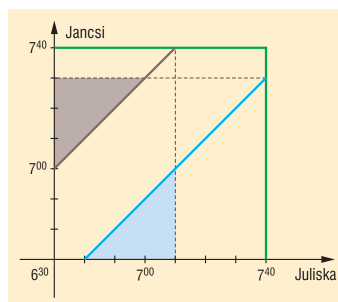
4526 Keressük meg azokat a pontokat a koordináta-rendszerben, amelyek kielégítik az egyenlőtlenséget. Az ábrán ezeket a pontokat látjuk a téglalappal együtt.

A valószínűséget a területek mértékéből meghatározhatjuk:

$$p=\frac{4\cdot 2}{8\cdot 6}=\frac{1}{6}.$$



4527 Képzeljük el egy koordináta-rendszerben a fürdőbe lépések lehetséges időpontjait. Jancsi és Juliska 6^{30}-kor kelnek és 7^{40}-kor hagyják el a házat. Tehát e két időpont között tartózkodhatnak a fürdőszobában (ábrán zöld négyzet). Mivel Juliskának 30 perc szükséges, hogy elkészüljön, legkésőbb 7^{10}-kor meg kell kezdenie a szépítkezést (függőleges szaggatott vonal és attól balra). Jancsinál ez az idő 10 perc, így ő ráér akár még 7^{30}-kor is bemenni a fürdőbe (vízszintes szaggatott vonal és attól lefelé). Így az eseménytér a tengelyek és a szaggatott vonalak közé eső téglalap alakú terület.



Ha Jancsi 6^{30}-kor megy a fürdőbe, akkor Julisnak 6^{40}-től szabad a pálya. Ha Jancsi 6^{40}-kor lép be, akkor Julis 6^{50}-től mehet, stb. Ezeket a belépési pontokat a kék terület mutatja. Ha Julis lép be először rögtön ébredés után, akkor Jancsi csak 7^{00}-től mehet be. Ha Julis csak 6^{40}-kor megy be, akkor Jancsinak várnia kell 7^{10}-ig stb. Ezt a barna részen látjuk.

Örömmel akkor vesznek búcsút, ha a fürdőre nem kellett várniuk. Ennek a valószínűségét a háromszögek területeinek összege és a téglalap területének aránya adja meg. A két háromszögből készíthetünk egy négyzetet:

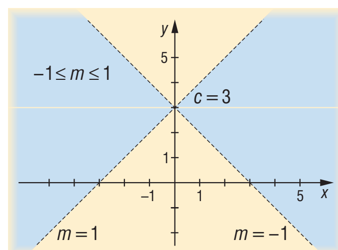
$$P(\text{öröm és boldogság})=\frac{3\cdot 3}{6\cdot 4}=0{,}375.$$

Hát ez bizony nem túl sok… Érdemes lenne valami rendszert vinniük a reggeli készülődésbe.

4528 Az egyenletben m jelöli az egyenes meredekségét, c pedig a függőleges eltolás mértékét.

Keressünk olyan egyeneseket, melyek kielégítik a metszésre kapott feltételt.

Például ha $c=3$ lenne, akkor m értékét a $[-1;\,1]$ intervallumból választhatnánk tetszőlegesen. (Ez azonban nem felel meg a feladat megoldásának, hiszen c értéke nem lehet 2-nél nagyobb.)



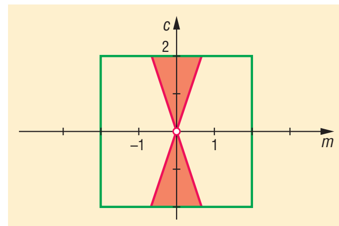


Ha $c = 2$, akkor m legalább $-\frac{2}{3}$, legfeljebb $\frac{2}{3}$ lehet.

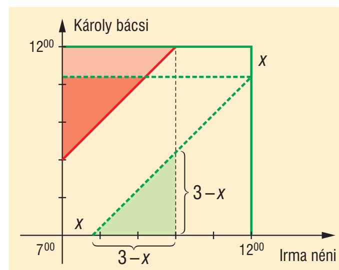
Ha $c = 1$, akkor m legalább $-\frac{1}{3}$, legfeljebb $\frac{1}{3}$ lehet. Hasonlóan kapjuk a negatív c-re adódó értékeket. Érdekes módon, ha $c = 0$, akkor m nem vehet fel értéket, hiszen bárhogy is adjuk meg, az egyenes metszeni fogja a $[-3; 3]$ intervallumon az x tengelyt.

Ábrázoljuk egy m–c koordináta-rendszerben a lehetséges és a feltételeknek megfelelő paramétereket. Ezt látjuk a jobb oldali ábrán, a piros színű rész a számunkra kedvező. A kérdezett valószínűség:

$$p = \frac{4 \cdot \frac{2}{3}}{4 \cdot 4} = \frac{1}{6}.$$



4529 Képzeljük el a konyhába való belépési időpontokat egy derékszögű koordináta-rendszerben. Jelöljük az abszcisszatengelyen Irma néni, az ordinátatengelyen Károly bácsi belépésének idejét. A tengelyeken mérjük az egységet órában. Irma néniről ismert, hogy 2 órát tölt a konyhában, Károly bácsi ottlétének hosszát jelölje x. x nem lehet kisebb 0-nál és nem lehet nagyobb 3-nál, hiszen akkor már biztosan rányit egyikük a másikra. Azt is tudjuk, hogy Irma néninek legkésőbb 10^{00}-kor el kell kezdeni a főzést (függőleges szaggatott vonal).



A piros színű rész azokat a pontokat jelöli, amikor Károly bácsi beléphet a konyhába Irma néni után. Ezt biztosan ismerjük. Nem ismerjük x értékét. Annyit tudunk, hogy x befolyásolja az alsó zöld háromszög területét, illetve magát az eseményteret is (a tengelyek és a velük párhuzamos szaggatott vonalak által határolt téglalap). A zöld háromszögből és a piros háromszögnek az eseménytérbe eső részéből össze tudunk állítani egy $(3 - x)$ oldalú négyzetet. Az eseménytér egyik oldala biztosan 3 (Irma néni konyhában töltött ideje miatt). Írjuk fel a területegységek hányadosát x függvényében:

$$P(\text{nem zavarják egymást}) = \frac{(3-x)^2}{3 \cdot (5-x)}.$$

Most próbáljunk meg válaszolni a kérdésekre.

a) Ha azt szeretnénk, hogy az ebédfőzés megzavarásának valószínűsége 0,5 alatt maradjon, akkor 0,5-nél nagyobbá kell tenni az előző valószínűséget. Szorozzunk a nevezővel (mivel $0 \le x < 3$, az egyenlőtlenség iránya nem változik), majd rendezzünk egy oldalra:

$$\frac{(3-x)^2}{3 \cdot (5-x)} > 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad (3-x)^2 > 1{,}5 \cdot (5-x) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4{,}5x + 1{,}5 > 0.$$

Innen:

$$x_{1,2} = \frac{4{,}5 \pm \sqrt{4{,}5^2 - 4 \cdot 1{,}5}}{2}, \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 0{,}36 \quad \text{és} \quad x_2 \approx 4{,}14.$$

Feltételeinknek csak a kisebb érték felel meg. Mivel a másodfokú kifejezés egy felfelé nyíló parabola, így az egyenlőtlenség megoldása:

$$0 \le x < 0{,}36.$$

Azaz ha Károly bácsi 0,36 óránál (kb. 21 perc és 36 másodpercnél) kevesebb időt tölt el a konyhában, akkor 50%-nál nagyobb a valószínűsége, hogy nem akadályozza az ebédfőzést.



b) Annál kisebb a másik megzavarásának valószínűsége, minél nagyobb a $p = \frac{(3-x)^2}{3\cdot(5-x)}$ kifejezés értéke. Vizsgáljuk a kifejezést a $0 \le x < 3$ intervallumon. Néhány érték behelyettesítése után azt sejtjük, hogy $x = 0$-ra kapjuk a legnagyobb értéket, mégpedig $p_{max} = \frac{3}{5}$. Hogyan igazolhatnánk ezt?

Azt mutatjuk meg, hogy p a p_{max} értéknél csak kisebb lehet minden $0 < x < 3$ esetén:

$$\frac{(3-x)^2}{3\cdot(5-x)} < \frac{3}{5}.$$

Tüntessük el a törteket, majd fejtsük ki a zárójelet, és rendezzük az egyenlőtlenséget egy oldalra (pozitív számmal szorzunk):

$$5\cdot(3-x)^2 < 9\cdot(5-x),$$
$$45 - 30x + 5x^2 < 45 - 9x,$$
$$5x^2 - 21x < 0,$$
$$x\cdot(5x-21) < 0.$$

Megoldása:

$$0 < x < 4{,}2 \quad \text{(egyenes állású parabola).}$$

Mivel $]0; 3[\subset]0; 4{,}2[$, ezért valóban teljesülnek a fenti egyenlőtlenségek.

Végeztünk: Károly bácsi akkor akadályozza a legkisebb,

$$1 - p_{max} = \frac{2}{5}$$

valószínűséggel az ebéd elkészítését, ha 0 órát tölt el a konyhában, azaz a közelébe sem megy.

Megjegyzés: Ezt Irma néni a fenti példa megoldása nélkül is nagyon jól tudja.

Várható érték – megoldások

4530 $M = 0{,}1\cdot 1 + 0{,}2\cdot(-2) + 0{,}3\cdot 3 + 0{,}4\cdot(-4) = -1.$ Nem érdemes a játékban részt venni.

4531 $M = 0{,}4\cdot 1 + 0{,}3\cdot(-2) + 0{,}2\cdot 3 + 0{,}1\cdot(-4) = 0.$ Igazságos a játék.

4532 $M = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 4 + \frac{1}{6}\cdot 5 + \frac{1}{6}\cdot 6 = \frac{1}{6}\cdot(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = 3{,}5.$

4533 *a)* $M_A = \frac{1}{2}\cdot(-10) + \frac{1}{2}\cdot 8 = -1;$ *b)* $M_B = \frac{1}{2}\cdot 10 + \frac{1}{2}\cdot(-8) = 1.$

4534 $M = \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}\cdot 1145 + \frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}\cdot 17690 + \frac{\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}\cdot 2127600 + \frac{\binom{5}{5}\cdot\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}}\cdot 675000000 \approx 75{,}5 \text{ Ft}.$

$75{,}5 - 225 = -149{,}5.$ Nem érte meg.



4535 *a)* Az első pörgetéskor akkor éri el a legnagyobb pontnövekedést, ha 3000-et forgat. Ezután viszont mindig kétszer a duplázót kell kiforgatnia, azaz maximum 20 000 pontot érhet el.

b) A keréken nyolc mező van és feltételezzük, hogy nem csalnak a játékban, azaz minden mezőnek ugyanakkora a valószínűsége. A duplázó 2000-rel növeli, a felező 1000-rel, a negyedelő 1500-zal, a nullázó 2000-rel csökkenti a pontszámot, ezért a pörgetéskor várhatóan kapható pontszám:

$$M=\frac{1}{8}\cdot(-2000)+\frac{1}{8}\cdot(-1500)+\frac{1}{8}\cdot(-1000)+\frac{1}{8}\cdot(-1000)+$$
$$+\frac{1}{8}\cdot 1000+\frac{1}{8}\cdot 2000+\frac{1}{8}\cdot 3000+\frac{1}{8}\cdot 2000=312,5.$$

A forgatás után a játékosnak sok ilyen helyzetet tekintve átlagosan

$$2000+312,5=2312,5$$

pontja lesz.

c) Ha lenullázta magát, akkor a számára negatív mezőket nem kell figyelembe venni, hiszen ennél kevesebb pontja nem lehet. Hasonló a helyzet a duplázóval is. Így:

$$M=\frac{1}{8}\cdot 1000+\frac{1}{8}\cdot 2000+\frac{1}{8}\cdot 3000=750.$$

Sok ilyen szituáció után körülbelül 750 pont lesz a pontjainak átlaga.

d) 10 000 pont esetén a duplázó ugyanennyivel növeli a pontok számát, illetve a felező 5000-rel, a negyedelő 7500-zal, a nullázó 10 000-rel csökkenti a pontokat. Tehát:

$$M=\frac{1}{8}\cdot(-10000)+\frac{1}{8}\cdot(-7500)+\frac{1}{8}\cdot(-5000)+\frac{1}{8}\cdot(-1000)+$$
$$+\frac{1}{8}\cdot 1000+\frac{1}{8}\cdot 2000+\frac{1}{8}\cdot 3000+\frac{1}{8}\cdot 10000=-937,5.$$

Ebben a szituációban (sok játék átlagát tekintve) a játékos pontszáma $10000-937,5=9062,5$ pontra csökken. Úgy tűnik, hogy minél több pontja van egy játékosnak, az arányosan csökkentő és a nullázó mezők annál jobban csökkentik a pontjait.

4536 A játékos nyereményét a játék árának kell egyensúlyba hozni. Azaz akár a játékos, akár a játékot szervező Dani várható nyereménye 0 kell, hogy legyen. Mivel a játékos nyereménye $\frac{1}{3}\cdot 6=2$ játékeuró, ezért a játék árának is 2 eurót kell választani. (Az egyiket minden fordulóban „megnyeri" valamelyik fél, a másikat „elveszíti".)

4537 Tekintsük Balázs szempontjából a bevételeket és a kiadásokat. A játék ára (2 euró) Balázsnál marad, ha a játékra befizető veszít. Ha a játékos nyer, akkor 6 eurót fizet neki Balázs. Ez csak 4 euró veszteség Balázsnak, hiszen előtte 2 euróért a játékos megvette a játékot. A két esemény közül az egyik biztosan bekövetkezik: ha egyiknek x valószínűséget tulajdonítunk, akkor a másik $(1-x)$ valószínűséggel következik be.

A kérdés: hogyan válasszuk meg a valószínűségeket, hogy a játék várható értéke Balázs szempontjából 1 legyen?

Írjuk fel a várható értéket:

$$(1-x)\cdot 2+x\cdot(-4)=1,\quad \text{amiből}\quad x=\frac{1}{6}.$$

Tehát Balázsnak úgy kell meghirdetnie a játékot, hogy a játékos csak egy dobott szám esetén nyerjen. Például a hatos dobásra fizet nyereményt, a többire nem.



4538 Tegyük fel, hogy a kezdőcsapat 10 tagjából x fő rutinos. Ekkor $(10-x)$ fő tapasztalatlan. Azt szeretnénk, ha várhatóan legalább hat fő berúgná a tizenegyest:

$$0{,}8x + 0{,}25\cdot(10-x) \ge 6,$$
$$0{,}55x \ge 3{,}5,$$
$$x \ge 6{,}36.$$

Ezek szerint legalább hét tapasztalt játékosnak kell lennie a csapatban.

4539 *a)* Nyilván akkor éri meg a játékosnak, ha a játék várható értéke pozitív. A várható értéket növeljük, ha a játékos számára kedvezőtlen (negatív) nyereményeket a kisebb valószínűségű, a kedvező (pozitív) nyereményeket a nagyobb valószínűségű esetekhez rendeljük. Például:

$$P(-4) = 0{,}2;\quad P(-2) = 0{,}1;\quad P(3) = 0{,}3;\quad P(1) = 0{,}4$$

esetén a várható érték már pozitív:

$$M = 0{,}4\cdot 1 + 0{,}1\cdot(-2) + 0{,}3\cdot 3 + 0{,}2\cdot(-4) = 0{,}3.$$

b) A legnagyobb várható érték akkor lehetséges, ha a legkedvezőtlenebb esethez (-4) rendeljük a legkisebb valószínűséget, majd a következőhöz a következőt stb.:

$$P(-4) = 0{,}1;\quad P(-2) = 0{,}2 \quad \text{és} \quad P(3) = 0{,}4;\quad P(1) = 0{,}3.$$

Ekkor a várható nyeremény:

$$M = 0{,}3\cdot 1 + 0{,}2\cdot(-2) + 0{,}4\cdot 3 + 0{,}1\cdot(-4) = 0{,}7.$$

4540 *a)* Egy vaníliás krémtúrót a visszatevés nélküli esetet tekintve legalább elsőre vagy legfeljebb hetedikre vehetünk ki a dobozból. Annak a valószínűsége, hogy elsőre ilyen kerül a kezünkbe, 0,4. Tekintsünk egy közbülső esetet, például azt, ha negyedikre vesszük ki a vaníliást: ebben az esetben elsőre, másodikra, harmadikra meggyest vagy kekszest kell kivennünk:

$$P(\text{negyedik a vaníliás}) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} \approx 0{,}0952.$$

Összesen hét eset lehet, valószínűségeik az előzőhöz hasonlóan írhatók fel. A várható érték:

$$M = \frac{4}{10}\cdot 1 + \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot 2 + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot 3 + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot 4 + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot 5 +$$
$$+ \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot 6 + \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}\cdot 7 \approx 2{,}2.$$

Ha a dobozban 4 vaníliás, 2 meggyes és 4 kekszes krémtúró van, akkor visszatevés nélkül várhatóan másodikra veszünk ki vaníliást.

b) Ha visszatesszük a kivett krémtúrókat, akkor a húzások között nem változnak a valószínűségek értékei. Vagyis a vaníliás kivételének valószínűsége 0,4; a nem vaníliásé minden esetben 0,6. Rossz hír, hogy húzhatunk folyamatosan nem vaníliásat, tehát akár végtelen sok esetünk is lehetséges. Annak a valószínűsége, hogy csak negyedikre vesszük ki kedvencünket:

$$P(\text{negyedik a vaníliás}) = 0{,}6^3\cdot 0{,}4 = 0{,}0864.$$

Az első 10 tagot kiszámítva a várható érték:

$$M = 0{,}4\cdot 1 + 0{,}6\cdot 0{,}4\cdot 2 + 0{,}6^2\cdot 0{,}4\cdot 3 + 0{,}6^3\cdot 0{,}4\cdot 4 + 0{,}6^4\cdot 0{,}4\cdot 5 +$$
$$+ 0{,}6^5\cdot 0{,}4\cdot 6 + \ldots + 0{,}6^9\cdot 0{,}4\cdot 10 \approx 2{,}42.$$

(Ha az első 200 tagot írjuk fel, a várható érték akkor is csak 2,5-nek adódik.) Várhatóan másodikra vagy harmadikra fogjuk kivenni kedvenc krémtúrónkat.

Megjegyzés: Bizonyítható, hogy minden tagot számba véve az összeg 2,5-nek adódik.



4541 *a)* Jelölje x a játékos éppen aktuális pontszámát $(0 \le x)$. Ekkor a duplázó x, a nullázó $-x$, a negyedelő $\left(-\frac{3x}{4}\right)$, a felező $\left(-\frac{x}{2}\right)$ „megnyert" pontot jelent. A várható érték x függvényében:

$$M(x) = \frac{1}{8}\cdot(-x) + \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{3\cdot x}{4}\right) + \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{8}\cdot(-1000) + \frac{1}{8}\cdot 1000 + \frac{1}{8}\cdot 2000 + \frac{1}{8}\cdot 3000 + \frac{1}{8}\cdot x =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\left(5000 - \frac{5}{4}\cdot x\right) = 625 - \frac{5}{32}\cdot x.$$

Ez a várható érték azonban csak akkor számítható, ha a játékosnak van pontja. Ugyanis 0 pont esetén az előző szerencsekerekes feladat *c)* pontjában kiszámított 750 pont várható.

A játékosnak eredetileg x pontja volt, ezt növelte/csökkentette a fenti értékkel. Így most pontjainak száma:

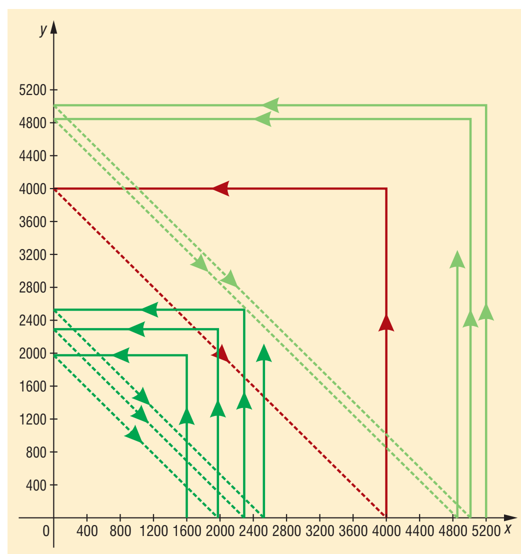
$$\text{összpontszám} = \begin{cases} x + 625 - \dfrac{5}{32}\cdot x = \dfrac{27}{32}\cdot x + 625, & \text{ha} \quad x > 0, \\ 750, & \text{ha} \quad x = 0. \end{cases}$$

Ez nem befolyásolja nagymértékben a játék kimenetelét, hiszen ha $x = 1$, akkor várhatóan 626 pont lesz a kerék megforgatása után.

b) Az előző pontban kiszámolt $M(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő lineáris függvény, zérushelye $x = 4000$. Ez az a pontszám, amellyel ha rendelkezik a játékos, akkor a játék igazságos.

Ha ennél több ponttal rendelkezik, akkor a játék a játékos számára kedvezőtlen, hiszen nagy átlagban levonnak tőle valamennyi pontot.

Ha 4000 pontnál kevesebbet gyűjt, akkor a játék kedvező a játékos számára, hiszen a várható érték pozitív. Sőt: minél jobban eltérünk ettől az értéktől, annál többet nyer vagy veszít.



Így már az is világos, hogy

– a legnagyobb várható nyereménye miért akkor van a játékosnak, amikor éppen lenullázta magát;

– ha elég sokáig játszik a játékos, akkor a nyereménye 4000 pont körül lesz. Ezt a várható értékből megállapított függvény alapján szemléltethetjük is. Az x tengelyen az aktuális pontszámot, az y tengelyen a forgatás utáni (várható) pontszámot jelöljük.

Ha például 1600 pontja van, akkor várhatóan 1975 pontja lesz. Az 1975 pontról újra forgatva 2291,4. Erről 2258,4 stb. Mindig közelebb kerül a 4000 ponthoz (sötétzöld töröttvonal, a haladási irányt a nyilak mutatják). Ha azonban 5200 pontja van, akkor várhatóan 5012,5 pontja lesz a kerék pörgetése után. Újra forgatva már csak 4854,3 stb. (világoszöld vonalak). Az egyetlen stabil helyzet az ábrán is 4000 pont (önmagába visszatérő bordó töröttvonal).



Statisztika – megoldások

4542 95 fő.

4543 Legalább az 5. helyre.

4544 A medián (Q_2) 5,5, $Q_1 = 3$, $Q_3 = 6$.

4545 *a)* 20 euró.
b) A medián (Q_2) 3, $Q_1 = 2$, $Q_3 = 4$ darab.

4546 A módusz 5.
A kvartilisek: $Q_1 = 3{,}5$, $Q_2 = 5$ (medián), $Q_3 = 7$.

4547 *a)* 50; *b)* 51.

4548 *a)* Jeles. *b)* Jó.

4549 65,4 m^3.

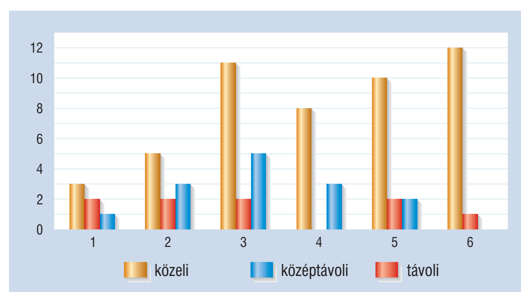
4550 *a)* 9 mm; *b)* 3 mm.

4551 9.

4552 $\dfrac{4+4+7+x+11}{5} = 7$, ahonnan $x = 9$.

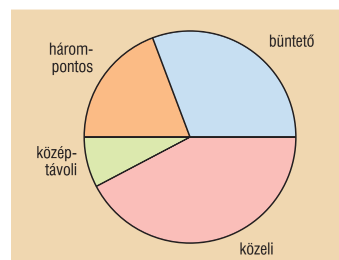
A keresett minta: 4, 4, 7, 9, 11.

4553 A keresett oszlopdiagram:



4554 Mivel 2ZK + 2KK + 3PK + BDK = 360°, így:

$$2ZK \approx 152{,}3°;$$
$$2KK \approx 27{,}7°;$$
$$3PK \approx 69{,}2°;$$
$$BDK \approx 110{,}8°.$$

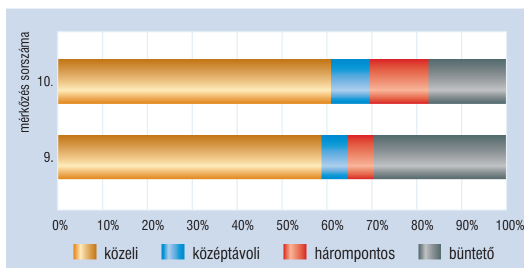




4555 *a)* Mivel nincs kiugró adat, ezért a minimum $Q_0 = 1$, a maximum $Q_4 = 7$. Az alsó kvartilis $Q_1 = 2$, a medián $Q_2 = 3$, a felső kvartilis pedig $Q_3 = 4$. Ezekből $IQR = 4 - 2 = 2$.

b) A játékos mindig dobott legkevesebb 1 pontot büntetőből (mindig harcolt ki büntetődobásokat az ellenfél palánkja alatt). Legalább a mérkőzések felében 2 és 4 pont között ért el találatot a büntetővonalról ($IQR = 2$, tehát erre elég stabilan lehet számítani). A legjobb meccsén 7 pontot dobott a büntetővonalról.

4556 Roland a 10. mérkőzésen az előzőhöz viszonyítva bátrabban próbálkozott a középtávoli, és méginkább a távoli dobásokkal.



4557 *a)* A legnagyobb és legkisebb érték alapján az osztályköz:

$$\frac{27-9}{3} = 6.$$

Nagyon jó mérkőzés	(22–28)	3
Jó mérkőzés	(15–21)	3
Közepes mérkőzés	(8–14)	4

b) $A = \dfrac{10 + 9 + 27 + 24 \cdot 2 + 21 \cdot 2 + 20 + 11 + 12}{10} = 17{,}9.$

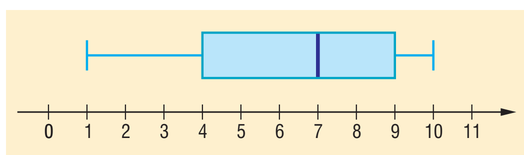
c) $A_{gyt} = \dfrac{4 \cdot 11 + 3 \cdot 18 + 3 \cdot 25}{10} = 17{,}3.$

d) Az eltérés 0,6. Oka, hogy több érték is felső kategóriahatár közelébe esik (21, 27).

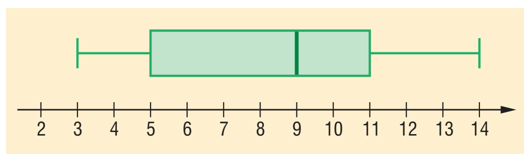
4558 A rangsorba rendezett tíz adatra (1, 3, 4, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 10) a következőket kapjuk:

$$Q_0 = 1 \text{ (minimum)}, \quad Q_1 = 4 \text{ (alsó kvartilis)}, \quad Q_2 = 7 \text{ (medián)},$$
$$Q_3 = 9 \text{ (felső kvartilis)}, \quad Q_4 = 10 \text{ (maximum)}.$$

Megállapítjuk, hogy a lefelé kissé kilógó minimum nem esik távolabb Q_1 alsó kvartilistől az interkvartilis terjedelem ($IQR = Q_3 - Q_1 = 9 - 4 = 5$) másfélszeresénél ($Q_1 - 1{,}5 \cdot IQR = 4 - 7{,}5 < 1 = Q_0$). Ez alapján a dobozdiagram:



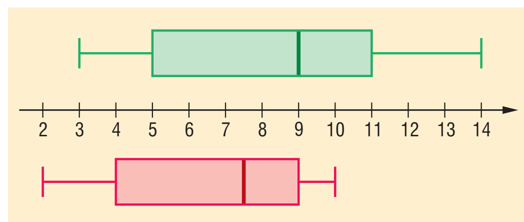
4559 *a)* A zóna kísérletek számait rangsorba állítva (3, 5, 5, 6, 8, 10, 10, 11, 12, 14) a medián (Q_2) 9, az alsó kvartilis (Q_1) 5, a felső (Q_3) 11. Se a legnagyobb (14), se a legkisebb (3) érték nem kiugró ($IQR = 9$). A diagram:



b) Ábrázoljuk együtt a diagramokat! A felsőn a kísérletek (2ZK), az alsón a sikeres dobások (2ZS) számát látjuk.

A minimumok és az alsó kvartilisek eggyel, a mediánok másféllel, a felső kvartilisek kettővel térnek el egymástól:

$IQR_{2ZK} = 11 - 5 = 6, \quad IQR_{2ZS} = 9 - 4 = 5.$





A diagramok hasonló felépítéséből, eltoltságából arra következtethetünk, hogy a játékos nagy valószínűséggel *meccsei jó részén hasonló megbízhatósággal dob közelről* pontokat. A százalékot pontosan megadni nem tudjuk. Valószínűleg amikor a legtöbbet dobta rá, akkor szerezte a legtöbb pontját (14 dobásból 10 sikeres, 71%) és amikor a legkevesebbet, akkor a legkevesebbet (3-ból 2, 67%).

A valódi statisztikákat tekintve megállapításaink helyesek: a 10-ből 5 meccsen volt a sikeres dobások aránya körülbelül 2/3 (64% és 71% között). A legkevesebb pontot az első meccsen szerezte (3-ból 2), a legtöbbet az utolsó, tizedik meccsen érte el (14-ből 10).

4560 *a)* $A_{\text{idő}} = \dfrac{18+27+29+31+40+30+23+22+35+36}{10} = 29{,}1$ perc.

b) $s_{\text{idő}} = \sqrt{\dfrac{(18-A)^2+(27-A)^2+(29-A)^2+(31-A)^2+(40-A)^2+(30-A)^2+(23-A)^2+(22-A)^2+(35-A)^2+(36-A)^2}{10}} \approx 6{,}49.$

c) $I = \left]29{,}1-6{,}49;\ 29{,}1+6{,}49\right[= \left]22{,}61;\ 35{,}59\right[.$ Az intervallumba hat érték esik.

4561 *a)* A rangsorba rendezett adatok:

9, 10, 11, 12, 20, 21, 21, 24, 24, 27.

$Me_{\text{Pt}} = 20{,}5.$

b) $AE_{\text{Pt}} = \dfrac{|9-Me|+|10-Me|+|11-Me|+|12-Me|+|20-Me|+2\cdot|21-Me|+2\cdot|24-Me|+|27-Me|}{10} = 5{,}5.$

c) $I = \left]20{,}5-5{,}5;\ 20{,}5+5{,}5\right[= \left]15;\ 26\right[.$

Az adatok közül öt esik a megadott intervallumba.

4562 *a)* A diagramok közül *nagy valószínűséggel A)* mutatja a támadó, *B)* pedig a védő lepattanók számát. Ugyanis *B)* minden jellemző értéke (minimuma, alsó- és felső kvartilise, mediánja 1-gyel, maximuma pedig 3-mal) nagyobb, mint *A)* megfelelő értékei. Ez abból adódik, hogy *majdnem mindig* a védőjátékos van a palánkhoz közelebb, a támadót kiszorítva várja a lepattanó labdát, így könnyebben eléri, mint az ellenfele.

b) Rangsorba rendezve az adatokat: 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7. Mivel a diagramon $Q_0 = 2$, $Q_1 = 3$ és $Q_3 = 5$, $Q_4 = 7$, ezért a hiányzó adat 3-nál nem lehet kisebb és 5-nél nem lehet nagyobb. A szóba jövő 3, 4, 5 értékek mindegyike megfelelő.

c) Az ismert elemek rangsora: 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7. A hiányzó két adat $Q_0 = 2$, $Q_1 = 3$ és $Q_3 = 5$, $Q_4 = 7$ miatt ismét csak a 3, 4, 5 közül kerülhet ki. Azonban 5 sem lehet, mert akkor a medián már 5 lenne, így marad 3 és 4. Egyikből sem lehet kettő darab (akkor két módusz lenne): így a két hiányzó adat a 3 és a 4.

d) Képzeljük el a rangsort: első eleme 2, az utolsó 7. Mivel a minta 12 elemű, így $Q_1 = 3$, $Q_2 = 4$ és $Q_3 = 5$ is két adat „közé" esik, ezért a 3. és 4. elem csak 2 és 4 (I.), vagy két darab 3-as (II.) lehet. Hasonlóan a 6. és 7. elem csak 4 és 6 lehet: egyrészt mert 5 adat nincs, másrészt 3 és 7 nem lehet a medián (4) miatt.

(I.) A rangsor: 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 6, X, 7. Az X értéke csak 6 vagy 7 lehet, tehát 2 megoldás van.

(II.) A rangsor: 2, X, 3, 3, Y, 4, 4, 4, 4, 6, Z, 7. Minden betű helyén kétféle érték állhat (X lehet 2 vagy 3; Y lehet 3 vagy 4; Z lehet 6 vagy 7), ebben az esetben $2^3 = 8$ megoldás van.

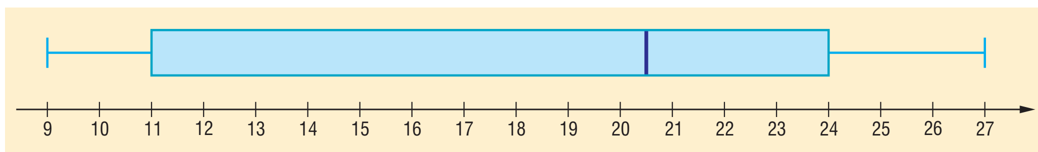
Összesen $2 + 8 = 10$ darab különböző 12 elemű, egészekből álló minta van, aminek értékeiből a megadott dobozdiagram áll elő.



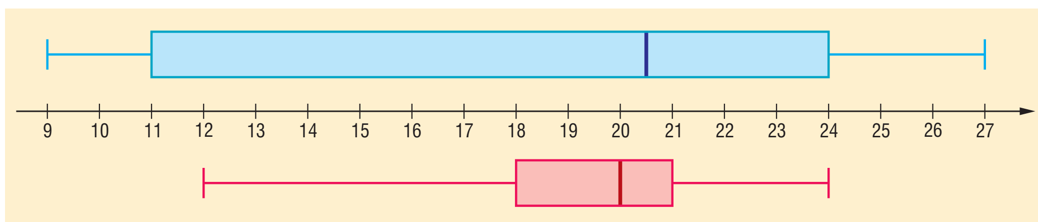
4563 *a)* A rangsorból (9, 10, 11, 12, 20, 21, 21, 24, 24, 27) leolvasható, hogy

$$Q_0 = 9,\ Q_1 = 11,\ Q_2 = 20{,}5,\ Q_3 = 24,\ Q_4 = 27.$$

Így a keresett diagram:



b) Közös rendszerben ábrázolva könnyebb összehasonlítani a diagramokat. A felső mutatja az őszi fordulókat:



A szurkoló általában a jó meccsekre emlékszik. A diagramok jobb oldalát vizsgálva szerinte a játékos teljesítménye romlott: legtöbb dobott pontja, pontjainak felső kvartilise és mediánja is alacsonyabb volt a tavaszi fordulókban (sorban 27-ről 24-re, 24-ről 21-re, 20,5-ről 20-ra csökkentek).

A statisztikákat jobban böngésző szurkoló ehhez hozzáteszi, hogy a diagramok bal oldalán viszont javulást látunk: a minimum és az alsó kvartilis értéke nőtt (előbbi 3 ponttal, utóbbi viszont 7-tel!).

Mit gondolhat az edző? Hasonlítsuk össze az interkvartilis terjedelmeket is:

$$IQR_{ősz} = 24 - 11 = 13,$$

$$IQR_{tavasz} = 21 - 18 = 3.$$

A medián változása gyakorlatilag elhanyagolható (fél pont). Ezekből azt állapíthatjuk meg, hogy a játékos teljesítménye tavaszra sokkal kiegyensúlyozottabb lett, ráadásul az őszi idény felső kvartiliséhez közel: tavasszal a meccsei legalább felén 18 és 21 pont között dobott, ami nagyon jó eredmény.

c) A keresett Q_0 és Q_4 értéke egyszerűen leolvasható: $Q_0 = 9$, $Q_4 = 27$ (mindkettő őszi adat). A kvartilisek esetén figyelembe kell vennünk, hogy 20 adatból dolgozunk, vagyis a medián, az alsó és felső kvartilis is két adat (5. és 6., illetve 10. és 11., végül 15. és 16. érték) számtani közepe.

A mediánt pontosan meg tudjuk adni. Tekintsük a rangsorba rendezett őszi és tavaszi mintát. Tudjuk, hogy az őszi első öt mintaelem utolsó tagja 20, a második öt elem első tagja 21. Tavaszról nincs pontos adatunk, lehetne ez a két érték 20 és 20, 19 és 21 vagy 18 és 22. Azonban tavasszal $Q_3 = 21$, ezért 22 nem lehet Q_3 előtt, vagyis tavasszal a két középső elem csak 20 és 20 vagy 19 és 20 lehet. Így a két mintát egyesítve a középső négy elem 20, 20, 20, 21 vagy 19, 20, 20, 21, azaz a teljes évre vonatkozó medián értéke 20.

A tavaszi mintában $Q_2 = 20$, $Q_3 = 21$, tehát a tavaszi rangsor 5., 6., 7. elemét ezek a számok adják. Mivel 21 szerepelt kétszer az őszi mintában is, így a teljes éves rangsorban a 11.-től a 15. elemig csak 20 és 21 fordul elő. Az őszi minta 24, 24, 27 értéke, illetve a tavaszi minta maximuma (24) az éves rangsorban az utolsó helyekre (17.–20.) kerül. Az egyetlen, amit nem tudunk, az az éves rangsor 16. tagja, ami 21 és 24 között bármi lehet. Így a teljes évre vonatkozó Q_3 értéke négy féle lehet: 21, 21,5, 22 vagy 22,5.

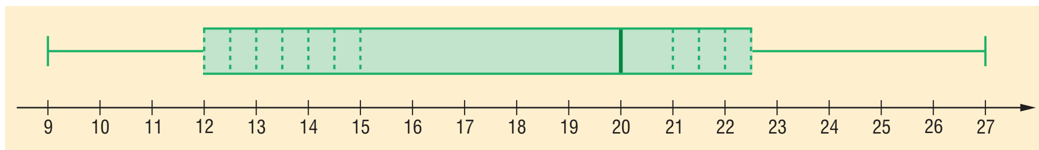


Az alsó kvartilist még kevésbé pontosan tudjuk meghatározni. Annyi biztos, hogy az őszi adatok és a tavaszi diagram minimuma (12) alapján a teljes évi rangsor első öt tagja 9, 10, 11, 12, 12. Azonban a következő érték 18-ig bármi lehet (a tavaszi mintában van 18), tehát a teljes évre vonatkozó Q_1 érték 12, 12,5, …, 15 közül kerül ki.

A teljes minta ismert értékei:

9, 10, 11, 12, 12, □, □, □, □, 20, 20, □, 21, 21, 21, □, 24, 24, 24, 27.

A négy egymást követő ismeretlen hely közül az első három egyikére kerül a 18. Ezekből a dobozdiagram:



4564 *a)* A számtani átlag 85,25, ez kerekítve 85 pont.

b) A minta módusza a leggyakoribb elem: 83. A rangsorba rendezett minta mediánja a két középső elem átlaga, ez 84,5. A minta terjedelme: 94 – 76 = 18.

c) Az osztályközt válasszuk $18:3 = 6$-nak. Így az ábrán látható gyakorisági táblát kapjuk.

A kategória felső határa nem tartozik a kategóriához, kivéve a C kategóriát.

A kategória	(76–82)	2
B kategória	(82–88)	3
C kategória	(88–94)	3

d) A keresett diagram az ábrán látható.



4565 Alkossák az n elemű mintát az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatok. Ekkor a minta átlaga:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

a) Ha az elemeket kicseréljük $x_1 + b, x_2 + b, \ldots, x_n + b$-re, akkor A' átlaguk:

$$A' = \frac{x_1 + b + x_2 + b + \ldots + x_n + b}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + n \cdot b}{n} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + b = A + b.$$

b) Ha az elemeket kicseréljük $c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n$-re, akkor A'' átlaguk:

$$A'' = \frac{c \cdot x_1 + c \cdot x_2 + \ldots + c \cdot x_n}{n} = \frac{c \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} =$$

$$= c \cdot \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = c \cdot A.$$



4566 Tételezzük fel, hogy az eredeti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatokból álló n elemű rangsor módusza $Mo = x_m$ $(1 \le m \le n)$, mediánja Me. Az alsó és felső kvartilisek kiszámítása megegyezik a mediánnal.

Vegyük észre, hogy a módusz nem az elemek nagyságához, hanem az elemek előfordulásához kapcsolódik, a medián pedig az elem rangsorban elfoglalt helyzetéhez! A medián páratlan sok elem esetén $(n = 2k + 1)$ a „középső” elem $(Me = x_{k+1})$, páros sok szám esetén a „középső kettő” elem átlaga $\left(Me = \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$.

a) Legyen az új minta $x_1 + b, x_2 + b, \ldots, x_n + b$. Az elemekhez hozzáadott b valós szám sem a gyakoriságukon, sem a rangsorban elfoglalt helyzetükön nem változtat. Így az új módusz:

$$Mo' = x_m + b = Mo + b.$$

Páratlan elemszámú minta esetén $(n = 2k + 1)$ az eltolt minta Me' mediánja:

$$Me' = x_{k+1} + b = Me + b.$$

Páros elemszámú mintában $(n = 2k)$ az új minta Me' mediánja:

$$Me' = \frac{x_k + b + x_{k+1} + b}{2} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} + b = Me + b.$$

b) Hasonló a helyzet, ha c valós számmal szorozzuk a minta összes elemét:

$$Mo'' = c \cdot x_k = c \cdot Mo.$$

Páratlan elemszámú mintára:

$$Me'' = c \cdot x_{k+1} = c \cdot Me,$$

illetve páros elemszámú mintára:

$$Me'' = \frac{c \cdot x_k + c \cdot x_{k+1}}{2} = c \cdot \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = c \cdot Me.$$

Ez akkor is így van, ha $c = 0$ vagy $c < 0$. Utóbbi esetben a rangsor megfordul, a maximális elem a minimális lesz, és előre kerül.

4567 Legyen az n elemű $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adatokból álló minta terjedelme R, szórása s, abszolút átlagos eltérése AE.

a) Legyenek az új minta elemei $x_1 + b,\ x_2 + b, \ldots, x_n + b$. Ekkor a terjedelem nem változik:

$$R' = x_{max} + b - (x_{min} + b) = x_{max} - x_{min} = R.$$

A szórás esetén használjuk ki, hogy a számtani átlag $A + b$-re változik:

$$s' = \sqrt{\frac{(x_1 + b - (A + b))^2 + \ldots + (x_n + b - (A + b))^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(x_1 - A)^2 + \ldots + (x_n - A)^2}{n}} = s.$$

Az abszolút átlagos eltérésben is használjuk ki, hogy a medián $Me + b$-re változik:

$$AE' = \frac{|x_1 + b - (Me + b)| + \ldots + |x_n + b - (Me + b)|}{n} =$$

$$= \frac{|x_1 - Me| + \ldots + |x_n - Me|}{n} = AE.$$



b) Legyenek az új minta elemei $c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n$. Ekkor a terjedelem:

$$R' = c \cdot x_{max} - c \cdot x_{min} = |c| \cdot (x_{max} - x_{min}) = |c| \cdot R.$$

Az abszolút értéket használnunk kell, $c < 0$ esetben a mintában ugyanis a maximális és a minimális elem felcserélődik.

A szórás esetén használjuk ki, hogy a számtani átlag $c \cdot A$-ra változik:

$$s' = \sqrt{\frac{(c \cdot x_1 - c \cdot A)^2 + \ldots + (c \cdot x_n - c \cdot A)^2}{n}} =$$

$$= \sqrt{c^2 \cdot \frac{(x_1 - A)^2 + \ldots + (x_n - A)^2}{n}} = |c| \cdot s.$$

Az abszolút átlagos eltérésben is használjuk ki, hogy a medián $c \cdot Me$-re változik:

$$AE' = \frac{|c \cdot x_1 - c \cdot Me| + \ldots + |c \cdot x_n - c \cdot Me|}{n} =$$

$$= |c| \cdot \frac{|x_1 - Me| + \ldots + |x_n - Me|}{n} = |c| \cdot AE.$$

4568 Legyen a t elemű minta rangsorba rendezve $x_1, x_2, \ldots, x_t$. Csoportosítsuk őket n darab osztályba, legyen az osztályköz $\frac{x_{max} - x_{min}}{n} = d > 0$, és jelölje az osztályközepeket $K_1, K_2, \ldots, K_n$. Essen az egyes osztályokba rendre $r_1, r_2, \ldots, r_n$ darab adat ($r_1 + r_2 + \ldots + r_n = t$).

Vizsgáljuk meg a minta elemeiből számított A és a gyakorisági táblázatból számított A' átlag eltérését:

$$|A - A'| = \left| \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_t}{t} - \frac{r_1 \cdot K_1 + r_2 \cdot K_2 + \ldots + r_n \cdot K_n}{t} \right| =$$

Párosítsuk a minta elemeit a megfelelő osztályközepekkel (az első r_1 darab elemet K_1-gyel stb.):

$$= \left| \frac{(x_1 - K_1) + \ldots + (x_{r_1} - K_1) + (x_{r_1+1} - K_2) + \ldots + (x_t - K_n)}{t} \right| \le$$

Kihasználjuk, hogy $|a + b| \le |a| + |b|$ háromszög-egyenlőtlenség teljesül akármennyi értékre:

$$\le \frac{|x_1 - K_1| + \ldots + |x_{r_1} - K_1| + |x_{r_1+1} - K_2| + \ldots + |x_t - K_n|}{t} \le$$

Kihasználjuk, hogy az adott kategóriába eső elemek maximum az osztályköz felével térhetnek el az osztályközéptől:

$$\le \frac{t \cdot \frac{d}{2}}{t} = \frac{d}{2}.$$

Tehát a gyakorisági táblázatból számított és a valódi átlag legfeljebb az osztályköz felével térhet el egymástól.



4569 Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ minta n elemű, számtani átlaga:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

szórása pedig

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - A)^2 + \ldots + (x_n - A)^2}{n}}.$$

Azt akarjuk bizonyítani, hogy ha s képletében bármely X-re cseréljük A-t, akkor nem kaphatunk kisebb számot az eredeti s-nél. Ehhez megvizsgáljuk az X-től függő (a többi adat rögzített)

$$\sqrt{\frac{(x_1 - X)^2 + \ldots + (x_n - X)^2}{n}}$$

kifejezést, hogy mely X-re van minimuma. Mivel nemnegatív mennyiség, ott van minimuma, ahol a négyzetének is minimuma van:

$$\frac{(x_1 - X)^2 + \ldots + (x_n - X)^2}{n}.$$

A nevezőt sem kell figyelembe vennünk, hiszen a minimumot csak a számláló befolyásolja. Így elegendő a négyzeteket megvizsgálni:

$$(x_1 - X)^2 + \ldots + (x_n - X)^2 = x_1^2 - 2x_1X + X^2 + \ldots + x_n^2 - 2x_nX + X^2 =$$
$$= nX^2 - 2X \cdot (x_1 + \ldots + x_n) + x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

A kifejezés X-ben másodfokú, mégpedig egy felfelé nyíló parabola ($n > 0$).

Tudjuk, hogy az $ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ kifejezésnek $x_{\min} = -\frac{b}{2 \cdot a}$ helyen van minimuma. Jelen esetben $a = n$, $b = -2 \cdot (x_1 + \ldots + x_n)$. Így:

$$X_{\min} = -\frac{-2 \cdot (x_1 + \ldots + x_n)}{2 \cdot n} = A.$$

Azaz a szórás a számtani átlagra minimális.

4570 Legyen az n elemű rangsor $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Mediánját jelölje Me, abszolút átlagos eltérését pedig

$$AE = \frac{|x_1 - Me| + \ldots + |x_n - Me|}{n}.$$

Két lépésben bizonyítjuk az állítást. Először megvizsgáljuk páratlan sok, majd páros sok elemű mintára. Mindkétszer belátjuk, hogy az abszolút átlagos eltérésben Me helyére más számot írva, nem kaphatunk AE-nél kisebb értéket.

I. eset: Ha n páratlan, akkor a medián a minta középső eleme:

$$Me = x_k, \quad \text{ahol} \quad k = \frac{n+1}{2}.$$

Lehetséges, hogy a mintának több eleme is megegyezik a mediánnal. Legyen az első ilyen elem indexe e, az utolsóé u.

Így $(u - e + 1)$ darab elemre (akár $e = k$ vagy $k = u$):

$$x_e = \ldots = x_k = \ldots = x_u = Me.$$

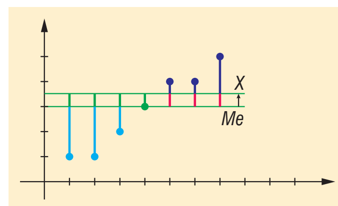


A rangsorban az x_e előtti elemek kisebbek, az x_u után levők nagyobbak a mediánnál. Figyelembe véve a nagyságrendi viszonyokat, az abszolút átlagos eltérés abszolút érték nélküli alakban is írható:

$$AE = \frac{(Me - x_1) + \ldots + (Me - x_{e-1}) + (u - e + 1)\cdot(Me - x_k) + (x_{u+1} - Me) + \ldots + (x_n - Me)}{n}$$

Cseréljük ki a kifejezésben Me-t X-re. AE nagysága csak a számlálóban található X-től függ:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_{e-1}) + (u - e + 1)\cdot(X - x_k) + (x_{u+1} - X) + \ldots + (x_n - X).$$



Növeljük X értékét. Legyen kicsit nagyobb a mediánnál, de még $X < x_{u+1}$. Ekkor az első u tag növekedni fog pontosan $X - x_k$ értékkel, a maradék tagok pedig pontosan ennyivel csökkennek. Mivel $k = \frac{n+1}{2} < u + 1$, több tag fog növekedni, mint amennyi csökken. Így az összeg csak növekedhet, mégpedig $(2u - n)\cdot(X - x_k)$ értékkel. (Az ábrán $e = k = u$. A piros vonalak AE csökkenését, a vastag zöldek a növekedését jelzik.)

Ha X eléri x_{u+1} értékét, akkor az $(u + 1)$-edik zárójelben és mindazokban, ahol x_{u+1}-gyel egyenlő értékek állnak, meg kell fordítani a különbséget:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_{e-1}) + (u - e + 1)\cdot(X - x_k) + (X - x_{u+1}) + \ldots + (x_n - X).$$

Innentől kezdve ezek a tagok az eddigi csökkenés helyett már növekedni fognak. Tehát még több tag növekedik és kevesebb csökken, mint eddig. Így tovább, minél inkább $Me < X$, annál inkább $AE < AE(X)$.

II. eset: Ha n páros, akkor a medián a két középső elem átlaga:

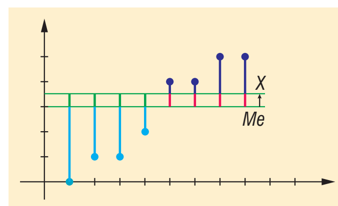
$$Me = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}, \quad \text{ahol} \quad k = \frac{n}{2}.$$

Ha a két középső elem egyenlő, akkor az I. esetnél leírtakat szóról szóra alkalmazhatjuk. Ha különbözőek, akkor a mintában nincs olyan elem, amely megegyezne a mediánnal. Sőt, az elemek pontosan fele kisebb és fele nagyobb Me-nél. Abszolút értékek nélkül írva:

$$AE = \frac{(Me - x_1) + \ldots + (Me - x_k) + (x_{k+1} - Me) + \ldots + (x_n - Me)}{n}.$$

Ismét cseréljük ki a kifejezésben Me-t X-re. AE nagysága csak a számlálótól függ:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_k) + (x_{k+1} - X) + \ldots + (x_n - X).$$



Változtassunk X értékén. Válasszuk nagyobbnak a mediánnál, de még $X < x_{k+1}$ legyen. Ekkor a tagok első fele növekedni, második fele csökkenni fog ugyanazon $X - Me$ értékkel, azaz az összeg nem változik.

Amint $X = x_{k+1}$, a $(k + 1)$-edik zárójelben és mindazokban, ahol x_{k+1}-gyel egyenlő értékek állnak, megfordítjuk a különbséget:

$$n \cdot AE(X) = (X - x_1) + \ldots + (X - x_k) + (X - x_{k+1}) + \ldots + (x_n - X).$$

Tovább növelve X-et, az imént megfordított tagok már nem csökkenni, hanem növekedni fognak. Mivel így több tag nő, mint csökken, az összeg is növekedni fog. A gondolatmenet hasonlóan folytatódik, ha $X > x_{k+1}$.

Megjegyzés: Mindkét gondolatmenet hasonlóan végigvihető, ha X értékét csökkentjük Me-ről.



Vegyes feladatok – megoldások

4571 $|J| = 10,\ |I| = x,\ p = 0{,}5 = \frac{x}{10}$. Ebből $x = 5$, ezért csak $I = \left]1; 6\right[$ lehet.

4572 $P = \frac{5 \cdot 7}{15 \cdot 35} = \frac{1}{15}$.

4573 $M = 0{,}02 \cdot 1 + 0{,}03 \cdot 2 + 0{,}24 \cdot 3 + 0{,}6 \cdot 4 + 0{,}11 \cdot 5 = 3{,}75$ év.

4574 *a)* A csoportba 12-en járnak.

b) $A_{\text{kiscs.}} = \frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 12 + 1 \cdot 17}{12} = 7;$

$$A_{\text{nagycs.}} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 5 \cdot 12 + 3 \cdot 17}{12} = 10{,}75 \approx 11.$$

4575 *a)* Igen, $Mo = 2,\ Q_1 = 2,\ Me = Q_2 = 3$ és $Q_3 = 4$.

b) Nem.

c) $A = \frac{4 \cdot 4{,}5 + 9 \cdot 12{,}5 + 6 \cdot 20{,}5 + 8 \cdot 28{,}5 + 3 \cdot 36{,}5}{30} = 19{,}7;$

$$s = \sqrt{\frac{4 \cdot (4{,}5-19{,}7)^2 + 9 \cdot (12{,}5-19{,}7)^2 + 6 \cdot (20{,}5-19{,}7)^2 + 8 \cdot (28{,}5-19{,}7)^2 + 3 \cdot (36{,}5-19{,}7)^2}{30}} \approx 9{,}77;$$

$I = \left]9{,}93; 29{,}47\right[$.

d) $AE = \frac{4 \cdot |1-3| + 9 \cdot |2-3| + 6 \cdot |3-3| + 8 \cdot |4-3| + 3 \cdot |5-3|}{30} \approx 1;$

$I = \left]2; 4\right[$.

4576 Ha a korong ($r = 1{,}5$ cm) teljes egészében egy négyzetbe esik, akkor a riasztó csendben marad. Elég egy négyzetet tekintenünk. Ehhez a korong középpontjának egy $(10 - 2 \cdot 1{,}5)$ oldalú négyzetbe kell esnie. (Feltehetjük, hogy érintésre még nem riaszt.) Tehát annak a valószínűsége, hogy nem szólal meg a riasztó, illetve annak a valószínűsége, hogy megszólal:

$$P(\text{csend}) = \frac{49}{100}, \qquad \text{illetve} \qquad P(\text{riaszt}) = \frac{51}{100}.$$

A válasz a kérdésre igen, a riasztó nagyobb valószínűséggel kezd szirénázni.

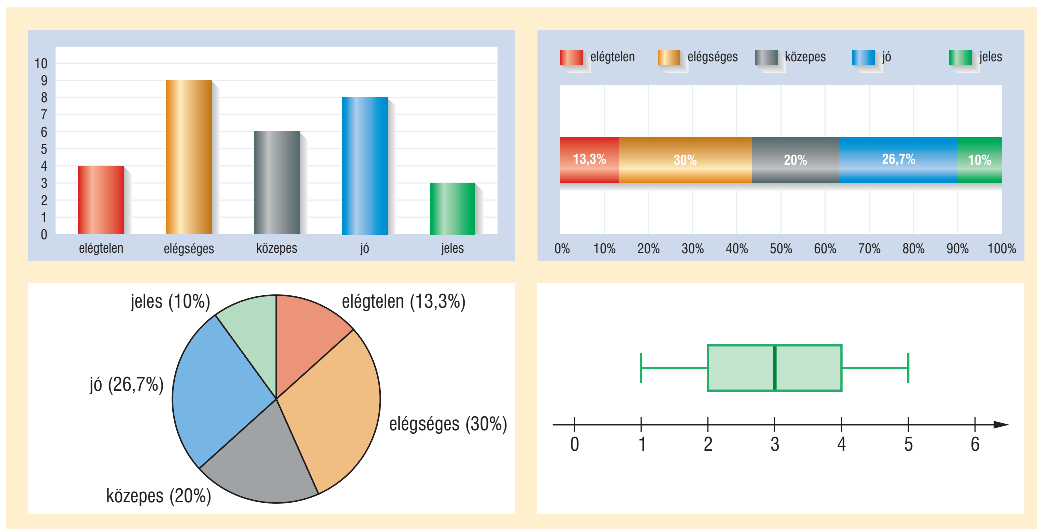
4577 A várható érték:

$$M = \binom{7}{0} \cdot 0{,}36^0 \cdot 0{,}64^7 \cdot 0 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}36^1 \cdot 0{,}64^6 \cdot 1 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}36^2 \cdot 0{,}64^5 \cdot 2 +$$
$$+ \binom{7}{3} \cdot 0{,}36^3 \cdot 0{,}64^4 \cdot 3 + \binom{7}{4} \cdot 0{,}36^4 \cdot 0{,}64^3 \cdot 4 + \binom{7}{5} \cdot 0{,}36^5 \cdot 0{,}64^2 \cdot 5 +$$
$$+ \binom{7}{6} \cdot 0{,}36^6 \cdot 0{,}64^1 \cdot 6 + \binom{7}{7} \cdot 0{,}36^7 \cdot 0{,}64^0 \cdot 7 \approx 2{,}52.$$

Tehát várhatóan két vagy három saját számot fog hallani Zsófi.



4578 *a)* A sávdiagram százalékai: elégtelen 13,3%, elégséges 30%, közepes 20%, jó 26,7%, jeles 10%. A kördiagram középponti szögei: elégtelen 48°, elégséges 108°, közepes 72°, jó 96°, jeles 36°. A dobozdiagramnál $Q_0 = 1$, $Q_1 = 2$ (a 8. adat), $Q_2 = 3$ (a 15. és 16. számtani átlaga), $Q_3 = 4$ (a 23. adat), $Q_4 = 5$.



b) Az első három diagramról leolvasható, hogy a módusz az elégséges. A sáv és a kördiagramon azt is láthatjuk, hogy a teljes mintához hogyan viszonyulnak az egyes kategóriák, például jó jegyet az osztály negyede kapott. A dobozdiagramról ebben az esetben nagyon kevés információ olvasható le: biztosan volt egy-egy elégtelen és jeles, illetve az elemszám miatt a rangsor 8. eleme elégséges, a 23. eleme pedig jó. De az sem biztos, hogy valaki szerzett közepes érdemjegyet.

c) A legjobb átlagot akkor kapjuk, ha a rangsorban az utolsó hét jegy 5-ös, az előtte levő hét jegy 4-es, aztán nyolc jegy 3-as, hét jegy 2-es és csak az első jegy 1-es. Ekkor az átlag 3,4. A legrosszabb átlagot ugyanígy felírva, csak az 1-estől indulva kapjuk, értéke 2,6.



Készüljünk az érettségire!

Megoldások

Rendszerező összefoglalás

166

Gondolkodási módszerek

Algebra és számelmélet

Függvények

Geometria

Érettségi gyakorló feladatsorok

307





12.5. RENDSZEREZŐ ÖSSZEFOGLALÁS

GONDOLKODÁSI MÓDSZEREK – ÖSSZEFOGLALÁS

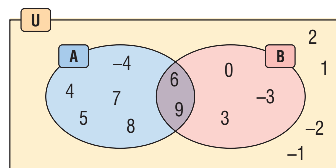
Halmazok – megoldások

5001 *a)* Igen, $|A| = 0$, $A = \emptyset$; *b)* Igen, $|B| = \infty$;
c) Igen, $|C| = 3$, $C = \{\{2; 3\}, \{1; 2; 3\}, \{2; 3; 4\}\}$; *d)* Nem.

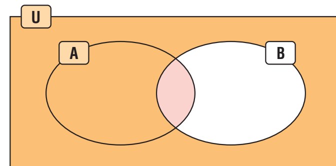
5002 *a)* $\emptyset$, {a}, {b}, {c}, {a; b}, {a; c}, {b; c}, {a; b; c}.
$\emptyset$ diszjunkt minden más részhalmazzal, rajta kívül {a} és {b; c}, {b} és {a; c}, {c} és {a; b} diszjunktak.
b) $|B| = 6$, $|\{B \text{ összes részhalmaza}\}| = 2^6 = 64$.

5003 $A = \{2; 3; 5; 7\}$, $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.
a) $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 7; 9\}$; $A \cap B = \{3; 5; 7\}$; $A \setminus B = \{2\}$; $B \setminus A = \{1; 9\}$;
b) $\overline{A} = \{1; 9\}$, $\overline{B} = \{2\}$;
c) $C = \{1; 2; 4; 6; 8; 9\}$.

5004 $U = \{-4; -3; \ldots; 8; 9\}$, $A = \{-4; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$;
$B = \{-3; 0; 3; 6; 9\}$.
a) A Venn-diagram az ábrán látható.
b) $\overline{A} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, $\overline{B} = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 8\}$.
c) $A \cup B = \{-4; -3; 0; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, $A \cap B = \{6; 9\}$,
$A \setminus B = \{-4; 4; 5; 7; 8\}$, $B \setminus A = \{-3; 0; 3\}$.

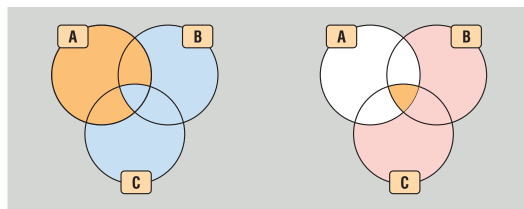


5005 $A \setminus \overline{B} = A \cap B$.



5006 *a)* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; *b)* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

5007 A Venn-diagram az ábrán látható.



5008 $|U| = |A \cup B| + |\overline{A \cup B}| = |A| + |B| - |A \cap B| + |\overline{A \cup B}| = 6 + 8 - 3 + 13 = 24$.

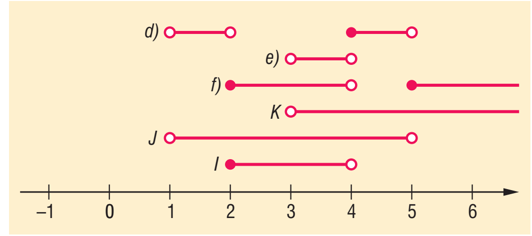
5009 $|U| = |A| + |B| - |A \cap B| + |\overline{A \cup B}|$; $12 = 4 + 5 - x + 3$; $x = 0$.

5010 $|U| = |A| + |B \setminus A| + |\overline{A \cup B}|$; $30 = 15 + 7 + x$; $x = 8$.

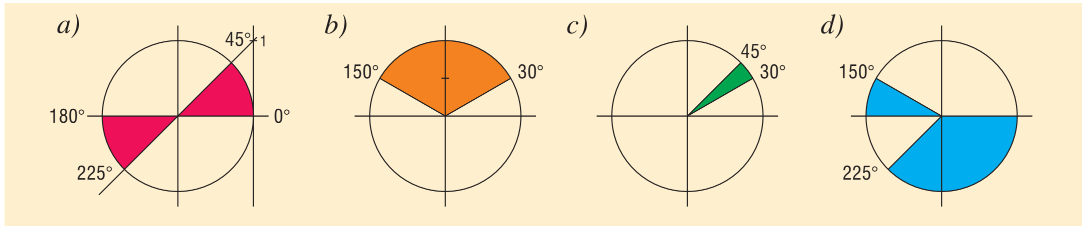


5011 a) $\overline{I} =]2; 5]$; b) $\overline{I} =]-2; 0]$;
c) $\overline{I} = \{0\} \cup]2; 7]$; d) $\overline{I} =]-\infty; 0] \cup]2; \infty[$.

5012 a) $I = [2; 4[$;
b) $J =]1; 5[$;
c) $K =]3; \infty[$;
d) $J \setminus I =]1; 2[\cup [4; 5[$;
e) $I \cap K =]3; 4[$;
f) $(K \setminus J) \cup I = [2; 4[\cup [5; \infty[$.



5013 a) $I = [0°; 45°] \cup [180°; 225°]$; b) $J = [30°; 150°]$;
c) $J \cap I = [30°; 45°]$; d) $\overline{I} \setminus J =]150°; 180°[\cup]225°; 360°]$.



5014 a) Nullaelemű részhalmaz csak az üres halmaz lehet, tehát a válasz 1. Kilenceleműek azok a részhalmazok, melyeket úgy kapunk, hogy egy elemet elhagyunk A-ból. Mivel 10-féleképpen tehetjük ezt meg, a válasz 10.

b) Annyi k-elemű részhalmaza van, ahányféleképpen a 10 elemből ki tudunk választani ismétlés nélkül k darabot. Tehát $\binom{10}{2} = 45$, $\binom{10}{4} = 210$, $\binom{10}{5} = 252$, $\binom{10}{8} = 45$.

c) $\binom{10}{k} = 120$. Próbálkozással, vagy az előző kérdésre adott válaszok figyelembevételével $k = 3$, illetve $k = 7$.

5015 Például ilyen a következő 4 halmaz: $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 4\}$, $C = \{1; 3; 4\}$, $D = \{2; 3; 4\}$.

5016 a) Mindkét halmazt többféleképpen is felírhatjuk, például

$$P = (A \setminus C) \cup (B \cap C) \setminus A \quad \text{és} \quad Q = (B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C).$$

b) Azt kell biztosítanunk, hogy a két halmaz közös része üres halmaz legyen:

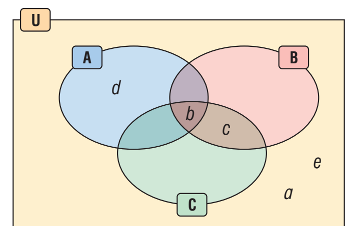
$$[B \cap (A \cup C)] \setminus (A \cap B \cap C) = \varnothing.$$

c) Azt kell biztosítanunk, hogy a P Q-n kívül eső része üres halmaz legyen:

$$A \setminus (B \cup C) = \varnothing.$$

5017 Írjuk b-t a hármas metszetbe. Ekkor c-t B és C kettős metszetbe kell helyeznünk, így d csak A metszeteken kívüli részébe kerülhet. (Közben figyelembe vettük, hogy az elemszámok egyenlők.) Ezek szerint:

$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \{a; e\}.$$

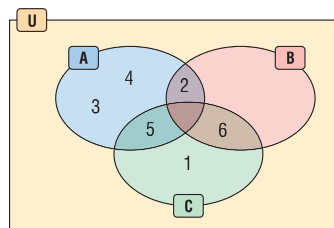




5018 A megoldáshoz töltsünk ki egy Venn-diagramot. A 2-t két helyre írhatjuk, de a második feltétel a hármas metszetet kizárja. A 3-at és a 4-et csak egy helyre írhatjuk ezek után. Az 5 két feltételben is szerepel, így csak egy helyre kerülhet. Végül a 6-ot sem írhatjuk középre.

A megoldás a diagramról leolvasható:

$$A = \{2; 3; 4; 5\},\quad B = \{2; 6\},\quad C = \{1; 5; 6\}.$$

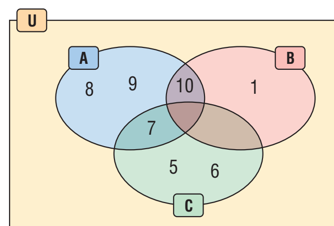


5019 *a)* $A = \{7; 8; 9; 10\},\quad B = \{1; 10\},\quad C = \{5; 6; 7\}.$

b) A Venn-diagram az ábrán látható.

c) Üres halmaz.

d) $|(A \cup B) \cap C| = 1$, egyelemű $\{7\}$.



5020 *a)* Ha C üres halmaz, akkor:

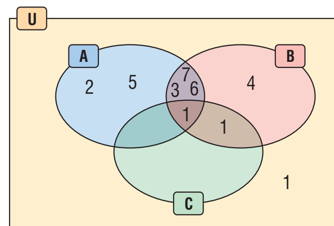
$$A = \{2; 3; 5; 6; 7\},\quad B = \{3; 4; 6; 7\}.$$

b) C eleme csak az 1 lehet. Ezt rögtön két helyre is írhatjuk: vagy a hármas metszetbe, vagy B és C kettős metszetbe. Így:

$$C = \{1\},\quad B = \{1; 3; 4; 6; 7\}$$

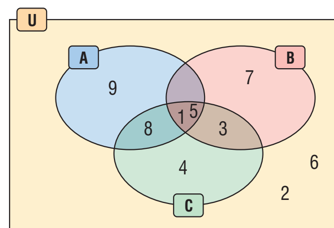
és

$$A = \{1; 2; 3; 5; 6; 7\}\quad \text{vagy}\quad A' = \{2; 3; 5; 6; 7\}.$$



5021 *a)* A Venn-diagram az ábrán látható.

b) A-ba eső elemek összege 23, B-be 16, C-be 21.

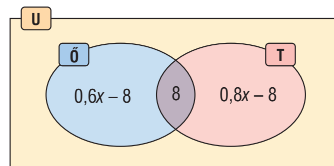


5022 *a)*

$$0{,}6x - 8 + 8 + 0{,}8x - 8 = x,$$
$$1{,}4x - 8 = x,$$
$$0{,}4x = 8,$$
$$x = 20.$$

20 fő dolgozik a Kiskunsági Nemzeti Parkban.

b) $|Ő \setminus T| = 4$ fő.

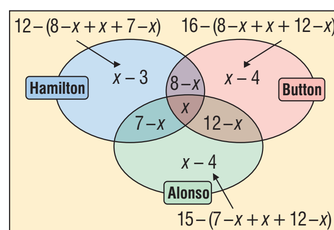


5023 *a)*

$$x - 3 + 8 - x + x + 7 - x + 12 - x + x - 4 + x - 4 = 20,$$
$$4 = x.$$

4 tanuló gyűjtött eddig mindhárom versenyzőtől dedikált emléket.

b) 0 fő. Nekik már vagy mindhárom versenyzőtől, vagy a másik két említett egyikétől van autogramja.





5024 A szöveg szerint a törpéken kívül még $5 \cdot 7 = 35$ fő jött el a mulatságra, azaz bányászok összesen 42-en voltak. A szita-formula így alakul, ha x-szel a narancssárga sapkás telepvezető vájárok számát jelöljük:

$$42 = 21 + 21 + 20 - (7 + 7 + 6) + x.$$

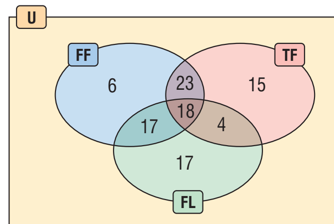
Innen $x = 0$. Tehát ilyen bányász nem vett részt a bulin.

5025 *a)* Alkalmazzuk a szita-formulát. A számba vett kutyák száma 100, hiszen egy megszökött:

$$100 = 64 + 60 + 56 - (41 + 22 + 35) + x,$$

ahol x jelöli a hármas metszet elemszámát. Innen $x = 18$.

b) Belülről kifelé haladva töltsük ki az elemszámokkal a Venn-diagramot, amelyből leolvasható a kérdezett érték: 17 ilyen kutya van. (Az elmenekült jószágról nincs információnk.)



5026 *a)* Lehetséges, hogy senki sem kért egyszerre mindkét ételfajtából (0). Maximum pedig a kisebb elemszámú halmaz elemszámával egyenlő lehet a számuk (8). Tehát 0 és 8 közötti a számuk.

b) Ha senki sem kérte együtt a levest és a főételt, akkor $8 + 10 = 18$ fő ült asztalhoz. Ha minden levest evő rendelt főételt is, akkor $8 + 10 - 8 = 10$ fő ült le ebédelni a panzióban.

5027 $|C| = 13$. A szöveg alapján ismertek a következők:

$$|A| = 14, \quad |B| = 9, \quad |A \cap C| = 7, \quad |A \cap B| = 6, \quad |B \cap C| = 4,$$
$$|A \cap B \cap C| = 2, \quad |\overline{A \cup B \cup C}| = 3.$$

Írjuk fel a logikai szita-formulát az alaphalmazra kiegészítve:

$$|U| = |A \cup B \cup C| + |\overline{A \cup B \cup C}| = |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |A \cap B| - |B \cap C| +$$
$$+ |A \cap B \cap C| + |\overline{A \cup B \cup C}| = 13 + 14 + 9 - 7 - 6 - 4 + 2 + 3 = 24.$$

5028 *a)* Helyettesítsünk be $x = 1$-et: $\frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{5}{10} < 1$. Nem megoldás az $x = 1$.

b) Találgatás helyett oldjuk meg a feladatot. A közös nevező $2x + 8$, átrendezve a $\frac{x-6}{2x+8} \geq 0$ törtet kapjuk. Egy tört akkor nemnegatív, ha számlálójának és nevezőjének azonos az előjele (a számlálója lehet nulla is). Ez két esetben lehetséges:

$$x - 6 \geq 0 \ (x \geq 6) \text{ és } 2x + 8 > 0 \ (x > -4), \text{ ekkor a megoldás } x \geq 6;$$
$$x - 6 \leq 0 \ (x \leq 6) \text{ és } 2x + 8 < 0 \ (x < -4), \text{ ekkor a megoldás } x < -4.$$

Ebből látható, hogy a legkisebb pozitív megoldás az $x = 6$. Legnagyobb negatív megoldás nincs.

c) A páros számlálójú törtek egyszerűsíthetők, így nem valódiak. A törtek a $[4, 6[$-ból valók:

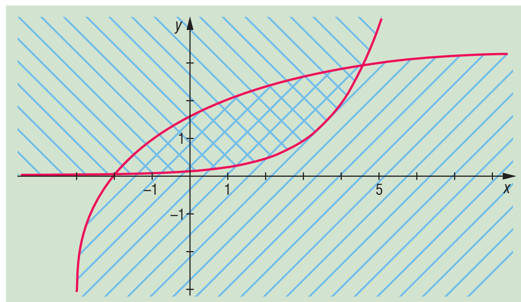
$$\pm\frac{7}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}.$$

5029 Rajzoljuk meg a transzformált függvényeket közös koordináta-rendszerben.

a) $L = ///$;

b) $M = \backslash\backslash\backslash$;

c) $L \cap M = XXX$.





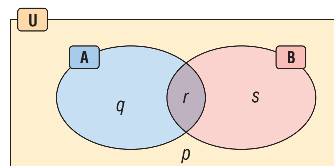
5030 Képzeljünk el egy táblázatot, melynek felső sorában felsoroljuk az U halmaz elemeit, első oszlopában pedig a feladat $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazait. Az adott elem oszlopának és az adott halmaz sorának metszetében egy X-szel jelöljük, hogy az elem beletartozik a halmazba.

Úgy kell elhelyeznünk az X jeleket, hogy pl. az $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ halmazok mindegyikében szerepeljen az n elem. Ugyanakkor $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}, A_n$ halmazok mindegyikének eleme legyen $(n-1)$, továbbá $A_1, A_2, \ldots, A_{n-3}, A_{n-1}, A_n$ halmazoknak eleme legyen $(n-2)$ stb. Így tulajdonképpen ismerjük az A_1 halmaz elemeit. Minden U-beli elem eleme, csak az 1 nem: $A_1 = \{2; 3; \ldots, n\}$.

Hasonlóan adódik ez így a többi halmazra is.

Halmaz\Elem	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
A_1		X	X		X	X	X
A_2	X		X		X	X	X
...							
A_{n-1}	X	X	X		X		X
A_n	X	X	X		X	X	

5031 Tekintsük a halmazábrát.



Írjuk fel a megadott feltételeket p, q, r, s segítségével.

$$\left.\begin{aligned} 2(q+r) &= p+q+r+s \\ 3r &= r+s \\ 10(q+r+s) &= 9(p+q+r+s) \end{aligned}\right\}$$

Ez négy ismeretlen, de csak három egyenlet. Nem tudjuk egyértelműen megoldani, de azért próbáljuk meg. Alakítsuk át az egyenleteket, a középsőből már ki van fejezve s.

$$\left.\begin{aligned} q+r &= p+s \\ 2r &= s \\ q+r+s &= 9p \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} q &= p+r \\ q+3r &= 9p \end{aligned}\right\}$$

A q ismeretlen is ki van már fejezve az első egyenletből:

$$p+4r = 9p,$$

ahonnan $r = 2p$. Ekkor viszont $q = 3p$, $s = 4p$. Mivel A, B, U egyike sem üres, a legkisebb pozitív szám, amit p helyére helyettesíthetünk, $p = 1$. Így $|A| = 5$, $|B| = 6$, $|U| = 10$.

5032 *a)* Gondoljuk meg, hogy bármely J_i halmaznak eleme a 0, de minden más elemről ki lehet mutatni, hogy előbb-utóbb már nem esnek az intervallumokba: $J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap \ldots = \{0\}$.
Ugyanis tételezzük fel, hogy valamely i-re $p\ (p > 0) \in J_i$. Bármely pozitív p-hez találunk olyan m pozitív egész értéket, amelyre $\frac{1}{m} \le p$. Ha $n > m$, akkor $p \notin J_n$. Hasonló a meggondolás, ha $p < 0$.

b) Az I_n sorozat összes eleméből alkotott metszetnek nincs közös eleme.

c) Először is $J_n \backslash I_n = \left]-\frac{1}{n}; 0\right]$. Ezen halmazoknak egyetlen közös eleme a 0, azonban más ilyen elem nincs. Ezért $J_1 \backslash I_1 \cap J_2 \backslash I_2 \cap J_3 \backslash I_3 \cap \ldots = \{0\}$.



Kijelentések, események – megoldások

5033 *a)* $A + B$ = Szép idő lesz vagy kirándulni megyek. $A \cdot B$ = Szép idő lesz és kirándulni megyek.

b) $\overline{A} \cdot B$.

c) Bármilyen, ugyanis szép idő esetén egyszerűen teljesült az implikáció. Rossz idő esetére pedig nem állítottam semmit, tehát bármit csinálhatok – kirándulhatok is – szószegés vétsége nélkül.

5034 *a)* $|A| = 10, \quad |B| = 6, \quad |C| = 4.$

b) $A \cdot B = \{6; 12; 18\}$ = hattal osztható számok;

$B + C = \{3; 5; 6; 9; 10; 12; 15; 18; 20\}$ = hárommal vagy öttel osztható számok;

$\overline{A} \cdot C = \{5; 15\}$ = öttel osztható páratlan számok.

c) $D = \{5\}$ = (olyan páratlan szám, ami hárommal nem, de öttel osztható) $= \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$.

5035 *a)* $A + B + C = \{2; 4; 6; 8\}, \quad A \cdot B \cdot C = A \cdot B \cdot \overline{C} = \overline{A} \cdot B \cdot C = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} = \varnothing, \quad B \cdot \overline{A} \cdot \overline{C} = \{6\}.$

b) $\{10\} = \overline{A + B + C}$.

5036 A helyesen kitöltött táblázat:

	A	B	C	D
Kijelentés	H	I	I	H
Megfordítása	I	H	I	H

5037 *a)* Igen. A „minden ember fenség” egy következtetés: Ha ember vagyok, akkor fenség vagyok. A második kijelentés szerint ember vagyok, így a feltétel teljesül. Amiből valóban következik, hogy fenség vagyok.

b) Nem. Példaként építsünk nádfedelet egy tízemeletes házra. Nyilván ez az épület nádfedeles, de nem tanya.

5038 *a)* Tagadás: Van olyan deltoid, amelynek átlói nem merőlegesek egymásra. Ilyen deltoid nincs, tehát az állítás igaz, a tagadás hamis.

b) Tagadás: Bármely háromszög legkisebb szöge legfeljebb 60º-os. Ez igaz, a háromszög legkisebb szöge nem lehet nagyobb, mint 60º. Ugyanis az állítás igazságát feltételezve:

$$60^\circ < \alpha < \beta < \gamma, \quad \text{így} \quad 180^\circ = 3 \cdot 60^\circ < \alpha + \beta + \gamma,$$

ami (legalábbis az euklideszi geometriai rendszerben) nem igaz, hiszen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Tehát az állítás hamis, a tagadás igaz.

c) Tagadás: Van olyan hattal osztható szám, amely nem osztható kilenccel. A tagadás igaz, például maga a 6 ilyen szám. Az állítás hamis.

d) Tagadás: Bármely pozitív egész prímtényezős felbontásában szerepel a 17. Az állítás igaz, a tagadás hamis.

e) Tagadás: Volt olyan törpe, aki magasabb volt Hófehérkénél. Bár nem tudjuk pontosan a történelmi igazságot, feltételezzük, hogy minden törpe jóval alacsonyabb volt az illető hölgynél. Tehát az állítás igaz, a tagadás hamis.

f) Tagadás: Van alkalom, hogy leírom azt: soha. Aki ezt a feladatot írásban megoldja, arra a tagadás biztosan teljesül. (Nagy valószínűséggel a többiekre is.)

g) Az állítás tagadását úgy tudjuk meggondolni, ha átfogalmazzuk: A 7-nek minden hatványa osztható 3-mal. Így már világos a tagadás: Van olyan szám, amely 7-nek hatványa és nem osztható 3-mal. Utóbbi kijelentés igaz (pl. 49) és az állítás hamis.



h) Először értelmezzük az eredeti mondatot.

Adjunk meg egy pozitív α szöget (pl. $\alpha = 1°$) és vizsgáljuk meg, mely szabályos sokszögek külső szögei kisebbek α-nál.

Bármely konvex n-szög belső szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$. A szabályos n-szög egy belső szögének nagysága: $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. A külső szög mértéke $180° - \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = \frac{360°}{n}$.

Ha most azt akarjuk, hogy ez a szám 1°-nál kisebb legyen, akkor legyen $n > 360$. Tehát pl. a 361 oldalú szabályos sokszög minden külső szöge kisebb, mint 1°. (Az $n = 360$ még éppen nem megfelelő, hiszen az állítás teljesüléséhez szigorúan kisebb kell.)

Hasonlóan általában: ha $\frac{360°}{n} < \alpha$, akkor $n > \frac{360°}{\alpha}$. Így biztosan tudunk bármely szöghöz olyan n egész számot mondani, amelynél több oldalú sokszögek külső szögei kisebbek, mint a megadott szög. Tehát az állítás igaz.

Tagadás: Létezik olyan α $(\alpha > 0)$ szög, amelyhez bárhogy is adunk meg pozitív egész n-t, van olyan n-nél több csúcsú szabályos sokszög, melynek külső szöge nagyobb vagy egyenlő, mint α.

Mivel az állítás igaz, a tagadás hamis.

Kombinatorika – megoldások

5039 $5! = 120$.

5040 $4! = 24$.

5041 $2\cdot 4! - 1 = 47$.

5042 $6\cdot 2\cdot 3! = 5! - 2\cdot 4! = 72$.

5043 $6! = 720$.

5044 $3\cdot 2 = 6$.

5045 $4\cdot 5^3 = 500$ közül $4\cdot 5^2 = 100$ osztható 5-tel.

5046 $6^3\cdot 9 = 1944$.

5047 $5\cdot 4\cdot 3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$.

5048 $\frac{30!}{(30-5)!} = 17\,100\,720$.

5049 $\binom{7}{3} = 35$.

5050 $\binom{11}{2} = 55$.

5051 $\frac{12!}{7!\cdot 4!\cdot 1!} = 3960$.



5052 $\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10.$

5053 *a)* $5!=120;$ *b)* $5!\cdot 2^5=3840;$ *c)* $10!=3\,628\,800.$

5054 *a)* $8!=40\,320;$ *b)* $\binom{90}{8}\cdot 8!\approx 3{,}13\cdot 10^{15}.$

5055 $\frac{24!}{8!\cdot 8!\cdot 8!}=9465511770.$

5056 *a)* $\frac{20!}{5!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 2!}=2793510720.$

b) A nevező csökken: $5!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 2!>5!\cdot 5!\cdot 6!\cdot 4!$

Így az érték nő $\frac{5!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 2!}{5!\cdot 5!\cdot 6!\cdot 4!}=\frac{42}{12}=3{,}5$-szeresére.

5057 $\frac{12!}{(12-7)!}=3991680.$

5058 *a)* $\frac{20!}{(20-12)!}\approx 6\cdot 10^{13};$ *b)* $3\cdot\frac{19!}{(19-11)!}\approx 9\cdot 10^{12}.$

5059 $\frac{4^{11}}{8\cdot 365\cdot 1000}\approx 1{,}44.$

5060 *a)* $10^6=1\,000\,000;$ *b)* $3^6=729;$ *c)* $3^4\cdot 4^2=1296;$

d) $\binom{6}{4}\cdot 3^4\cdot 4^2=19\,440.$

5061 $(2-a)^5=\binom{5}{0}\cdot 2^5\cdot a^0-\binom{5}{1}\cdot 2^4\cdot a^1+\binom{5}{2}\cdot 2^3\cdot a^2-\binom{5}{3}\cdot 2^2\cdot a^3+\binom{5}{4}\cdot 2^1\cdot a^4-\binom{5}{5}\cdot 2^0\cdot a^5=$

$=32-80\cdot a+80\cdot a^2-40\cdot a^3+10\cdot a^4-a^5.$

5062 Csoportosítsuk az utakat a hosszuk szerint.

a) Bármerre is megyünk az A-ból, minden út 3 hosszú, és összesen $4\cdot 3\cdot 3=36$ darab van belőle.

b) A közvetlen levelekbe 1 hosszú út visz, ebből 3 van. A következő legközelebbi levelek 3 hosszú úton érhetők el, ebből van $2\cdot 3=6.$ A legtávolabbi levelek 5 élre vannak, hozzájuk $3\cdot 3\cdot 3=27$-féleképpen juthatunk el.

c) Ebből a pontból 2, 4 vagy 6 „élnyire” találunk leveleket, rendre 2, $2\cdot 3=6$ és $3\cdot 3\cdot 3=27$ úton érhetjük el őket.

5063 A számokat az 1, 2, 3, 5, 7, 9 jegyekből állíthatjuk össze.

a) A jegyek csak úgy növekedhetnek, ha a fenti sorban írjuk őket, és az egyik számot elhagyjuk. Összesen 6 ilyen szám van.

b) Két nem prím szám van a felsoroltak között, az 1 és a 9. Kössük őket egybe, mostantól kezeljük az 19-et egyetlen számjegynek. Így 5 jegyből kell 4-jegyű számot kreálni, ráadásul úgy, hogy az 19 biztosan benne legyen. Ezt 4 helyre írhatjuk, a többi 3 helyre 4, 3, 2-féle jegyet tehetünk a maradékból. Végül az 1-et és 9-et megcserélhetjük. Tehát a lehetőségek száma $4\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 2=192.$

c) A fentiek közül minden 2-re végződő szám osztható 4-gyel. Azaz $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120.$



5064 *a)* Ekkor nagyon egyszerű dolgunk van, hiszen a 4 közül bármelyik helyre bármelyik karaktert írhatjuk a 15 lehetőségből: $15^4 = 50\,625$.

b) Vegyük az ellentétes esetet, amikor nincsenek betűk, csak az 5 számjegy szerepelhet: 5^4. Ezt kell kivonnunk az összes lehetőségből: $15^4 - 5^4 = 50\,000$.

c) Ebben az esetben egyszerűen az történik, hogy megduplázzuk a betűk számát. Azaz nem 15, hanem 25 lehetőségből választhatunk egy-egy karaktert. Az eredmény $25^4 = 390\,625$.

5065 Az adott függvény értékkészlete három érték: 0, 1 és (–1).

a) A három érték mindegyike szerepelhet a négy hely bármelyikén: 3^4.

b) Tételezzük fel, hogy a 0 szerepel kétszer, az 1 és a (–1) csupán egyszer-egyszer. A lehetőségek száma ekkor $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}$. Mivel a három érték mindegyike előfordulhat kétszer a négy helyen, ezért az eredményt meg kell szoroznunk 3-mal: $3\cdot\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = 36$.

c) A szinuszfüggvényre hagyatkozva négy helyből kettőn szerepel 0, de egymás mellett nem lehetnek. Négy lehetőségünk van:

0, 1, 0, (–1); 0, (–1), 0, 1; 1, 0, (–1), 0; (–1), 0, 1, 0.

5066 *a)* Ha sorba mentek a tanárok képein, akkor

$$22\cdot 21\cdot \ldots \cdot 11 = \frac{22!}{(22-12)!}\text{-féleképpen}$$

választhattak közülük.

b) A 14 lány mellé 8 fiúnak kellett az osztályba járnia, és a 6 férfi tanár mellett 6 nő kolléga került a tablóra. Az előző rész alapján a keresett érték:

$$\frac{14!}{(14-6)!}\cdot\frac{8!}{(8-6)!} = 4{,}36\cdot 10^{10}.$$

c) Most csak az érdekel minket, melyik tanár melyik három diákot választotta. Képzeljük úgy, hogy a tanárok sorban egymás után a tortához mennek és kiválasztanak 3-3, illetve 2-2 szeletet. Ezt összesen

$$\binom{22}{3}\cdot\binom{19}{3}\cdot\binom{16}{3}\cdot\binom{13}{3}\cdot\binom{10}{3}\cdot\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2} \approx 6\cdot 10^{15}$$

különböző módon tehetik meg.

5067 Az 500-as készlet 30%-a, azaz 150 darab plüssmaci selejtes. Jó közülük $500 - 150 = 350$ darab.

a) Ha nincs köztük selejtes, akkor mind a 20-at a jó macik közül sikerült kiválasztani $\binom{350}{20}$-féleképp.

b) A két selejtest 150 darabból, a 18 jót 350 közül választhatták az ellenőrök $\binom{150}{2}\cdot\binom{350}{18}$ különböző módon.

c) Ha legalább három selejtes van, akkor lehet $3, 4, \ldots, 20$ is. Ez elég sok eset, térjünk át a komplementer halmazra: nézzük azt, amikor csak 0, 1 vagy 2 selejt van a kiválasztott mintában. Ezt kell kivonnunk az összes lehetséges választások számából, $\binom{500}{20}$-ból. Az eredmény:

$$\binom{500}{20} - \binom{150}{0}\cdot\binom{350}{20} - \binom{150}{1}\cdot\binom{350}{19} - \binom{150}{2}\cdot\binom{350}{18}.$$



5068 *a)* Miután bárki bármikor felelhet, akár az is előfordulhat, hogy ugyanaz az óráról órára készülő diák felel 10-szer: 21^{10} a lehetőségek száma.

b) A feleletek időrendben követik egymást, így először is ki kell választanunk a 10-ből azt a 4 feleletet, amelyet a nem készülő diákoktól hallunk. Ezt $\binom{10}{4}$ módon tehetjük meg. A 4 rossz feleletet 9 fő produkálhatja, a 6 szépet pedig 21. Azaz az eredmény:

$$\binom{10}{4}\cdot 9^4\cdot 21^6.$$

c) „Legfeljebb hétszer” jelentése 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 alkalommal. Ilyen sok eseményt nem szerencsés elkezdeni összeírni, térjünk át a komplementerre: 8, 9, 10 gyenge felelőnk van. Utóbbi eset 9^{10}, előbbiek pedig *b)* esethez hasonlóan adódnak: $\binom{10}{9}\cdot 9^9\cdot 21^1$ és $\binom{10}{8}\cdot 9^8\cdot 21^2$. Ki kell vonnunk az összes esetből, azaz ha bárki akárhányszor felelhet: 30^{10} -ből.

$$30^{10}-9^{10}-\binom{10}{9}\cdot 9^9\cdot 21^1+\binom{10}{8}\cdot 9^8\cdot 21^2.$$

5069 *a)* Két szoknyát, inget és kabátot $\binom{5}{2}$, $\binom{8}{2}$, $\binom{4}{2}$-féle módon választhat Eszti. Minden ruhafélét kétféleképpen adhat a babákra: vagy az egyikre, vagy a másikra adja:

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 2^3=13440.$$

b) Állítsuk sorba a babákat, legyen egy A, egy B és egy C baba. Először is Eszti kiválaszt három szoknyát, három inget és három kabátot. Ezeket $\binom{5}{3}$, $\binom{8}{3}$, $\binom{4}{3}$-féleképpen veheti ki. Sorba rakva a három szoknyát, az A, B, C babákkal $3!=6$-féleképp párosíthatja őket. Hasonló a helyzet a többi ruhafélével is. Az eredmény:

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{4}{3}\cdot(3!)^3=483\,840.$$

5070 *a)* Ha bármelyik jelentkező reklámfilmbe kerülhet, akkor $58+42=100$ főből választunk 12-t:

$$\binom{100}{12}\approx 10^{15}.$$

b) A lányok közül kell kiválasztanunk 7-et és a fiúk közül 5-öt:

$$\binom{58}{7}\cdot\binom{42}{5}\approx 2{,}56\cdot 10^{14}.$$

c) Ha párban szerepel egy fiú és egy lány, akkor mindkét nemből ugyanannyi szereplő van, azaz 6. Az eredmény:

$$\binom{58}{6}\cdot\binom{42}{6}\approx 2{,}12\cdot 10^{14}.$$

d) Ha hármasával mutatják be a jelentkezőket, akkor 4 filmet fognak készíteni. Így vagy 4 fiú és 0 lánycsapat lesz, vagy 3 és 1, vagy 2 és 2, 3 és 1, 4 és 0. Az egyes eseteket az előzőkhöz hasonlóan számítjuk, de végül össze kell őket adnunk:

$$\binom{58}{12}\cdot\binom{42}{0}+\binom{58}{9}\cdot\binom{42}{3}+\binom{58}{6}\cdot\binom{42}{6}+\binom{58}{3}\cdot\binom{42}{9}+\binom{58}{0}\cdot\binom{42}{12}\approx 3{,}49\cdot 10^{14}.$$



5071 Téma szerint rendezni a könyveket $\frac{(15+n)!}{13!\cdot 2!\cdot n!} = 406\,980$-féle módon lehet. Egyszerűsítsünk, majd szorozzunk fel a maradék nevezővel:

$$14\cdot 15\cdot \ldots \cdot (15+n) = 813\,960\cdot n!$$

Egyszerűsítsünk újra $14\cdot 15$-tel:

$$16\cdot 17\cdot \ldots \cdot (15+n) = 3876\cdot n!$$

Mindkét oldalon szorzatok szerepelnek, bontsuk fel a 3876-ot prímtényezőkre: $3876 = 2^2\cdot 3\cdot 17\cdot 19$.

$$16\cdot 17\cdot \ldots \cdot (15+n) = 2^2\cdot 3\cdot 17\cdot 19\cdot n!$$

Hogy a $16 = 2^4$-t megkapjuk, $n > 3$ kell legyen. Ugyanakkor a bal oldalon is szerepelnie kell a 19 prímnek, ez éppen $15+4$. Ellenőrizzük le, valóban $16\cdot 17\cdot 18\cdot 19 = 3876\cdot 24$.

Tehát 4 Távol-Keletről szóló regényt kap Jani.

5072 Páratlan jegyek az 1, 3, 5, 7 és 9. Mivel hárommal osztható számokat keresünk, megkönnyíti az esetek összegyűjtését, ha nem a számokkal, hanem a 3-mal vett osztási maradékaikkal számolunk. Ezek sorban: 1, 0, 2, 1, 0.

a) Ha minden szám különböző kell legyen, akkor a négy maradék között csak egy 2-es, legfeljebb két 1-es és legfeljebb két 0 lehet. (Például 0-0-0-0 vagy 1-1-1-0 nem lehet.) A 2-es maradéknak mindenképpen szerepelnie kell, hiszen a 0-0-1-1 nem osztható 3-mal. A 2 mellé tenni kell 1-et is, a maradék kettő helyen viszont csak 0 maradék lehet. Tehát azt kell összeszámolni, hány esetet írhatunk fel a 0-0-1-2 maradékokból. A 3, 9 és 5 biztosan a számjegyek közé kerül. 1 maradékot adhat az 1 és a 7 is, itt tehát választhatunk. Vagyis ezen számok száma $2\cdot 4! = 48$.

b) Az előző gondolatot folytatva: öt lehetőségünk van a maradékokat felírni úgy, hogy a szám osztható legyen 3-mal: 0-0-0-0, 0-0-1-2, 0-1-1-1, 0-2-2-2, 1-1-2-2. Nézzük sorban az öt esetet.

0-0-0-0: Minden helyre két számjegyet, 3-at vagy 9-et írhatunk, ez $2^4 = 16$ lehetőséget jelent.

0-0-1-2: A 0 maradékok helyére a 3 vagy a 9, az 1 helyére az 1 vagy a 7 kerülhet. A 2 maradék fixen az 5 számjegyet jelenti. A maradékokat egymás között $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = 12$-féleképpen permutálhatjuk. Azon belül $2^2\cdot 2 = 8$ lehetőség van a számjegyek beírására. Összesen $12\cdot 8 = 96$.

0-1-1-1: A 0 maradék (3 vagy 9) négy helyre kerülhet (az 1 helyére továbbra is 1 vagy 7 kerül). Ezért a lehetőségek száma ebben az esetben $4\cdot 2^4 = 64$.

0-2-2-2: A 0 megint négy helyen állhat (3 vagy 9), a 2 helyére csak 5-öt írhatunk. Így $4\cdot 2 = 8$ ilyen esetünk van.

1-1-2-2: A maradékokat $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$-féleképpen írhatjuk fel. A lehetőségek száma $6\cdot 2^2 = 24$.

A kérdésre a válasz a fenti esetek összege: $16 + 96 + 64 + 8 + 24 = 208$.

5073 *a)* Jelölje a három szobát *A*, *B*, *C*. Mivel megkülönböztetjük őket, nem mindegy, hogy az *A*-ban vannak 6-an, *B*-ben 2-en és *C*-ben senki, vagy *A*-ban senki, *B*-ben 6-an és *C*-ben 2-en. A legegyszerűbb, ha az *A*-ban levők száma alapján írjuk össze a lehetőségeket.

A	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
B	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	6	5	4	3	2
C	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6

Ez harminchat lehetőség.



b) Most csak azt kell összeszámolnunk, a 8-at hányféleképp bonthatjuk három, hatnál nem nagyobb nemnegatív egész összegére.

$$8=6+2+0=6+1+1=5+3+0=5+2+1=4+4+0=$$
$$=4+3+1=4+2+2=3+3+2$$

Ez nyolc lehetőség.

Megjegyzés. Az *a)* és *b)* kérdést megválaszolhatjuk az alapján is, ha észrevesszük: a három különböző számot tartalmazó (pl. 6-2-0) formák $3!=6$ helyen fordulnak elő, a két különbözőt tartalmazókat 3 helyen találjuk meg (pl. 6-1-1), míg három egyforma nem lehet. Mindkét típusból van 4 összeg, amely kiadja az összesen $24+12=36$ oszlopot.

c) Az előző kérdésben tárgyalt esetekből indulunk ki.

Például az 5-2-1 esetben a nyolc főből ki kell választanunk ötöt az egyik, a még ágy nélkül maradt három főből kettőt a másik szobába. A harmadik szobába maradt egy fő már nem változtat a lehetőségek számán. Az összes esetet tekintve a lehetőségek száma:

$$\binom{8}{6}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{0}{0}+\binom{8}{6}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}+\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{3}\cdot\binom{0}{0}+\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{1}{1}+$$
$$+\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{0}{0}+\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{1}{1}+\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}+\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=$$
$$=28+56+56+168+70+280+420+560=1638.$$

d) Ha megkülönböztetjük a személyeket és a szobákat is, akkor az *a)* részben felírt táblázatot kell segítségül hívnunk. Azonban nem írjuk fel mind a 36 lehetőséget!

Vegyük észre, hogy bármelyik esetet tekintjük is, az egyszerűsítések miatt felírható ismétléses permutációként. Pl. a 4-3-1:

$$\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{1}{1}=\frac{8!}{4!\cdot4!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot1!}\cdot\frac{1!}{1!\cdot0!}=\frac{8!}{4!\cdot3!\cdot1!}.$$

Mivel nem számít a 4-3-1 sorrend, így a *c)* esetből és a megjegyzésben említett különböző sorrendekből megadhatjuk a megoldást:

$$3!\cdot\binom{8}{6}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{0}{0}+3\cdot\binom{8}{6}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}+3!\cdot\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{3}\cdot\binom{0}{0}+3!\cdot\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{1}{1}+$$
$$+3\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{0}{0}+3!\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{1}{1}+3\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}+3\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=$$
$$=3!\cdot(28+56+168+280)+3\cdot(56+70+420+560)=6510.$$

5074 *a)* Képzeljük el, ahogyan sorban sétálnak el a hat szoba mellett és véletlenszerűen kiválasztják a szobák lakóit. A megoldás ekkor:

$$\binom{23}{8}\cdot\binom{15}{4}\cdot\binom{11}{3}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}.$$

Ha úgy képzeljük el a dolgot, hogy a diákokat sorba állítjuk és minden szobának készítünk egy címkét annyi példányban, ahány fő befogadására képes, akkor a megoldás:

$$\frac{23!}{8!\cdot4!\cdot(3!)^3\cdot2!}$$

A két érték természetesen egyenlő. (Ezt beláthatjuk, ha kifejtjük az első formában felírtakat, majd elvégezzük az egyszerűsítéseket.)



b) Amennyiben az egyes szobákon belül megkülönböztetjük az ágyakat, akkor az első szobába betérő 8 diák $8!$, a 4 ágyasba betérők $4!$ stb. különböző módon osztozhatnak. Tehát a megoldás:

$$\frac{23!}{8!\cdot 4!\cdot (3!)^3\cdot 2!}\cdot 8!\cdot 4!\cdot (3!)^3\cdot 2! = 23!$$

c) A 10 lány mellé nem kerülhetnek fiúk, így nekik külön szobák járnak. Kétféleképpen felelhetünk meg ezen feltételnek. Vagy a 8 és a 2 ágyas szoba a lányoké, vagy két 3 és a 4 ágyas.

Ha az első verzió valósul meg, akkor a lányok $\frac{10!}{8!\cdot 2!}$ módon költözhetnek be. Ha a második, akkor $\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!}$. A fiúk az első lehetőség esetén $\frac{13!}{4!\cdot (3!)^3}$, a második esetben $\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}$ különböző úton foglalhatják el a szobákat. Az összesített eredmény:

$$\frac{10!}{8!\cdot 2!}\cdot\frac{13!}{4!\cdot (3!)^3}+\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!}\cdot\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}.$$

Arra nem tértünk ki, hogy a szobákat megkülönböztetjük-e egymástól. Az ágyak számát tekintve biztos. Ha ugyanis különbséget teszünk köztük, akkor a második esetben a lányok háromféleképpen kaphatnak meg három háromágyas szoba közül kettőt (1.-2., 1.-3., 2.-3.).

Az eredmény eképpen módosul:

$$\frac{10!}{8!\cdot 2!}\cdot\frac{13!}{4!\cdot (3!)^3}+3\cdot\frac{10!}{4!\cdot 3!\cdot 3!}\cdot\frac{13!}{8!\cdot 3!\cdot 2!}.$$

d) A *b)* pont alapján $10!\cdot 13! + 3\cdot 10!\cdot 13! = 4\cdot 10!\cdot 13!$ eredményt kapunk az egyszerűsítéseket elvégezve.

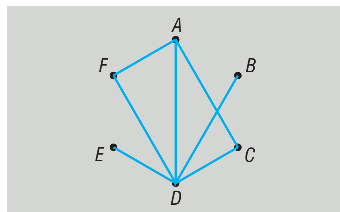
Gráfok – megoldások

5075 *a)* A lányok a pontok, az élek az üzenetváltások. A pontok fokszámai:

A: 3, B: 1, C: 2, D: 5, E: 1, F: 2.

b) A beszélgetések száma:

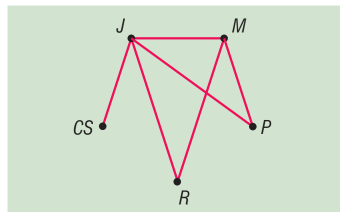
$$\frac{3+1+2+5+1+2}{2}=7.$$



5076 *a)* 6 beszélgetés történt.

b) A beszélgetések száma:

$$\frac{5\cdot 4}{2}=10.$$



5077 Az egyes pontokba még 2, 1, 1, 1, 1, 0 élnek kell csatlakozni, ami

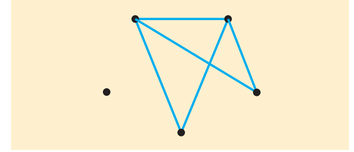
$$\frac{2+1+1+1+1+0}{2}=3$$

újabb él berajzolását jelenti. Ez meg is valósítható, mert páros sok páratlan fokú pont szerepel.

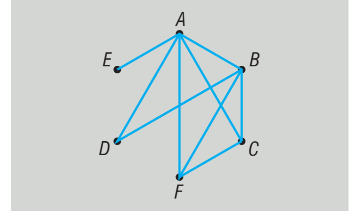


5078 *a)* A gráf az ábrán látható.

b) Nincs ilyen gráf: a 0 és 4 fokú pont kizárja egymást.



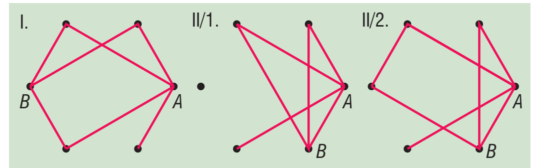
5079 Jelölje A, B, C, D, E az 5, 4, 3, 2, 1 fokú pontokat, F fokszáma nem ismert. A mindenkivel szomszédos (F fokszáma legalább 1), E csak A-val szomszédos. B nem lehet szomszédos E-vel, így mindenki mással igen (F fokszáma legalább 2). Mivel D már A-val és B-vel szomszédos, ezért mással nem lehet. C szomszédos A-val és B-vel, de D-vel és E-vel nem lehet: F-fel szomszédosnak kell lennie, vagyis F fokszáma 3.



5080 A torna végén lejátszott összes meccsek száma $\frac{8\cdot 7}{2}=28$. Eddig $\frac{8\cdot 3}{2}=12$ mérkőzés zajlott le, tehát $28-12=16$ mérkőzést láthat még a kitartó közönség.

5081 0 vagy 2. Három eset lehetséges, mindegyikben jelölje A a 4, B a 3 fokú pontot.

I. eset: A és B nem szomszédos.
Ekkor B csatlakozik A három szomszédjához (1, **2,** 2, 2, 3, 4).



II. eset: A és B szomszédok.
Ekkor vagy II/1. B csatlakozik A két szomszédjához (**0,** 1, 2, 2, 3, 4) vagy II/2. B csatlakozik a hatodik ponthoz, aminek így csatlakoznia kell egy A szomszédhoz is (1, **2,** 2, 2, 3, 4).

5082 *a)* A hat fokú pont hat másik ponthoz csatlakozik: 7 pontnak mindenképp lennie kell. És ez elég is, hiszen a többi 7 élt biztosan berajzolhatjuk a hat pont közé úgy, hogy egyszerű maradjon. A gráf legalább 7 pontú.

b) Nincs a feltételek között, hogy összefüggő legyen a gráf. Akkor vegyük a hatfokú pontot a szomszédaival egy önálló részgráfnak, a fennmaradó 7 él pedig mindig 2-2 különböző pontot kössön össze. Így összesen $7+7\cdot 2=21$ pontból fog állni a gráf. A gráf legfeljebb 21 pontú.

5083 *a)* Kettő.

b) Jelölje A azt a pontot, amelyhez 7 él csatlakozik. A gráf összefüggő, hiszen egyszerű, és az A pontja a többi 7 ponttal szomszédos. A gráf nem körmentes, mert az A-n kívüli bármely két szomszédos pont az A-val együtt kört alkot. Az állítás hamis, mert a konjunkció egyik tagja hamis.

c) 10 mezőnyjátékos van. A 10 pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{10\cdot 9}{2}=45$. Mivel most $\frac{7+5+5+4+4+4+3+2}{2}=17$ él van a gráfban, így $45-17=28$ él még berajzolható.

Legfeljebb 28 passz történhetett volna még a feltételek szerint.

5084 *a)* Mivel a gráfban 4 páratlan fokú pont van, ezért a labda játékostól játékosig való mozgása nem rajzolható le egyetlen vonallal: ekkor ugyanis pontosan két páratlan fokú pontnak kellene lennie (egy kezdő és egy végpontnak). Legalább egy játékmegszakítás (szabadrúgás, szöglet, bedobás) tehát biztosan történt.

b) Extrém esetben bármely passz után lehetett játékmegszakítás, vagyis akár 17 alkalommal is (ha az átadást kapó játékossal szemben minden esetben szabálytalankodtak).

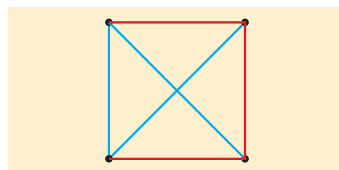


5085 „Sok” pontja nem lehet a gráfnak, mert akkor a fának kevés van, a komplementernek pedig túl sok.

$$n-1<\frac{n(n-1)}{2}-(n-1) \;\Rightarrow\; n-1<\frac{(n-2)(n-1)}{2}, \quad /:(n-1)$$

$$1<\frac{(n-2)}{2}, \quad /\cdot 2$$

$$4<n.$$



Tehát 4-nél nem lehet több pontja. 4 pontú megoldásunk van, 3 vagy 2 pontú ilyen gráf nincs. Az egyetlen gyökérpontból álló fa gráf is megoldás.

5086 *a)* A legnagyobb fokszám a 4, így az egyenlő fokszám lehet 4, 5, vagy 6.

Az első és az utolsó oszlop megvalósítható, a középső nem (páratlan sok páratlan fokú pont nem lehet).

Tehát a válasz: 6 vagy 13 élt kell berajzolni, hogy egyenlő legyen a pontok fokszáma.

Minden pont fokszáma	4	5	6
Az egyes pontoknál megjelenő újabb élvégek száma	4	5	6
	3	4	5
	2	3	4
	1	2	3
	1	2	3
	1	2	3
	0	1	2
Hiányzó fokszámok összege	12	19	26
Berajzolandó újabb élek száma	6	X	13

b) A gráfban az élek száma:

$$\frac{0+1+2+3+3+3+4}{2}=8.$$

Egy hétpontú gráfnak lehet minden pontja 2 fokú (ekkor az élek száma $(2\cdot 7):2=7$) vagy 4 fokú (ekkor $(4\cdot 7):2=14$ él).

Mivel $7<8<14$, ezért a 8 élt sehogy sem helyezhetjük át úgy, hogy minden pontba ugyanannyi él csatlakozzon.

c) Jelölje f a gráf összes pontjában elérni kívánt fokszámot. Ha n páros, akkor f tetszőleges érték lehet a $\{0; 1; \ldots, n-1\}$ halmazból. Ha n páratlan, akkor f csak páros szám lehet az előbbi halmazból. Az élek áthelyezésével akkor érhető el a kívánt helyzet, ha megfelelő számú él áll rendelkezésünkre, vagyis az élek száma felírható valamely alkalmas f-re $n\cdot\frac{f}{2}$ alakban. Ha ez megvalósul, akkor viszont el is érhető a kívánt helyzet: vegyük le a gráf összes élét és helyezzük el a kívánt alakzatban.

Tehát a feltétel szükséges és elégséges is: *egy n pontú gráf pontosan akkor alakítható át az élek áthelyezésével úgy, hogy minden pont fokszáma f legyen, ha $n\cdot\frac{f}{2}$ egész szám és ennyi darab él található benne.*

Valószínűség-számítás – megoldások

5087 Biztos esemény: az összeg nemnegatív.

Lehetetlen esemény: a szorzat 11-gyel osztható.

5088 *a)* A komplementere 10 elemi eseményből tevődik össze. Pl.: FFFI vagy IIII.

b) $AB=\{\text{IFFI; IIFF}\}$,

$\overline{A+B}=\{\text{FFFF; FFFI; FFIF; FIFF; IIIF; IFII; FIII; IIII}\}$.



c) Az eseménytér $2^4 = 16$ elemi eseményből áll.
$P(A) = 0,375$; $P(AB) = 0,125$; $P\left(\overline{A+B}\right) = 0,5$.

5089 *a)* Hétfőn $\frac{8}{10} = 0,8$; kedden $\frac{9}{12} = 0,75$; szerdán $\frac{4}{7} \approx 0,571$; csütörtökön $\frac{15}{18} \approx 0,833$; pénteken pedig ismét $\frac{20}{24} \approx 0,833$.

b) A valószínűséget nem tudjuk pontosan megadni, úgy 0,7–0,8 körül lehet. (A relatív gyakoriságok számtani átlaga 0,75, mediánjuk 0,8.)

5090 *a)* $P = 0,15$; *b)* $P = 0,15^5 \approx 0,000076$.

5091 $\frac{1}{10} = 0,1$.

5092 $\frac{3}{10} = 0,3$.

5093 $\frac{1}{6}$.

5094 $\frac{2}{5!} = \frac{1}{60}$.

5095 0,35.

5096 $\frac{7}{12}$.

5097 $\frac{25}{30} = \frac{5}{6}$.

5098 $\frac{2}{17}$.

5099 $\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$.

5100 $\frac{1}{7!}$.

5101 $\frac{1}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}$.

5102 $\frac{1}{2^5}$.

5103 $1 - \frac{2}{\pi} \approx 0,36$.



5104 $1-\dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=0,4.$

5105 $\dfrac{14}{x}=1-0,3=0,7;\quad x=20.$

5106 $\dfrac{10}{10+x}=0,4;\quad x=15.$

5107 $\dfrac{x}{12+x}=0,25;\quad x=4.$

5108 9.

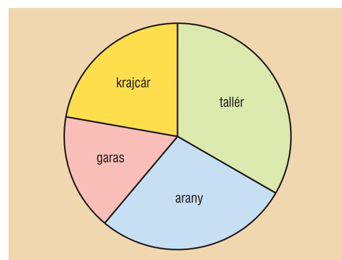
5109 A kedvező esetek száma $6!$, ennyiféleképpen következhet egymás után a kockával dobható hat darab szám.
Az összes esetek száma 6^6, hiszen bármelyik dobásra bármilyen értéket kaphatunk.

$$P=\frac{6!}{6^6}\approx 0,015.$$

5110 Az első helyre 9, a másodikra 8 és így tovább, a hetedikre 3 lehetőségünk van számjegyet írni. A kedvező esetek száma $\dfrac{9!}{(9-2)!}$. Az összes eseteket megkapjuk, ha bármelyik helyre bármelyik számjegyet írhatjuk: 9^7. Az eredmény:

$$P=\frac{\dfrac{9!}{(9-2)!}}{9^7}\approx 0,000015.$$

5111 *a)* $\dfrac{x}{5+3+4+x}=\dfrac{1}{3}$, ebből $x=6$. Az üres cellába 6-ot kell írni.



b) Az összes érmék száma 18, így egy érmére 20°-os középponti szög jut. Azaz az aranyakra 100°, a garasokra 60°, a krajcárokra 80° és a tallérokra 120°.

c) Az azonos érméket egymás között permutálva nem kapunk más elrendezést, így ismétléses permutációt kell számolnunk:

$$\frac{18!}{5!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 6!}=514\,594\,080.$$

d) $\dfrac{6}{18+x}<0,3$; innen $2<x$. Ernőnek legalább három Lajos-aranyra kell még szert tennie.

5112 *a)* 4 € veszteség úgy keletkezhet, ha a játékban nem nyernek semmit. Ez pedig akkor következik be, ha egy fejet és egy írást dobnak. Négy lehetőség van (piros, kék) érme sorrendben: (F; F), (F; I), (F; I), (I; I). Közülük kettő nem fizet semmit, tehát 0,5 valószínűséggel bukják el a játék 4 €-s árát.

b) 4 €-t akkor keresnek, ha a játékban 8 €-t nyernek. Ezt kétféleképpen érhetik el: ha Petra a két érmével (F; F)-et dob és Karola 4-est a kockával; illetve ha Petra két írást dob az érmékkel és Karola 5-öst. Ennek a valószínűsége $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$.

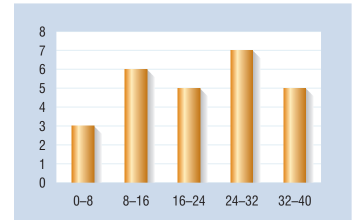


c)

Piros	Kék	1	2	3	4	5	6
fej	fej	2	4	6	8	10	12
fej	írás	0	0	0	0	0	0
írás	fej	0	0	0	0	0	0
írás	írás	4	5	6	7	8	9

d) A táblázatot átnézve a felső sorban a 6, 8, 10, 12; illetve az alsó sorban az 5, 6, 7, 8, 9 esetek azok, melyekben a lányok többet nyernek, mint a játék 4 €-s ára. Ez kilenc lehetőség, az összes esetek száma pedig 24. Azaz $\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$.

5113 *a)* Az oszlopdiagram az ábrán látható.



b) A tanulók által átlagosan gyűjtött pontok száma:

$$\frac{3\cdot 4+6\cdot 12{,}5+5\cdot 20{,}5+7\cdot 28{,}5+5\cdot 36{,}5}{26}\approx 21{,}9807,$$

tehát kerekítve 22.

c) Tizenketten írtak jó vagy jeles dolgozatot a 26 főből. A keresett valószínűség $\frac{12}{26}$.

d) Az osztály tanulói közül $\binom{26}{5}$-féleképpen lehet kiválasztani öt főt. $\binom{5}{2}$ lehetőségünk van két jeles és $\binom{7}{3}$ jó dolgozatot író tanuló kiválasztására. Az eredmény:

$$P=\frac{\binom{7}{3}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{26}{5}}=0{,}00532.$$

5114 *a)* Az azonos jegyből álló számok $q=1$ kvóciensű sorozatok: 111, 222, …, 999. Ha az első két jegy különböző, akkor a harmadik is. Ilyen szám hat darab van:

124, 139, 248, 421, 842, 931.

A mértani sorozatot alkotó jegyekből álló számok száma tehát 15.

b) Az előbbiekhez vegyük hozzá a következőket, illetve a fordítottjukat

123, 135, 147, 159, 234, 246, 258, 345, 357, 369, 456, 468, 567, 579, 678, 789.

A fentieken kívül lehetnek még 0-ra végződő számok is: 210, 420, 630, 840. Így a számtani vagy mértani sorozatot alkotó jegyekből álló háromjegyű számok száma $15+2\cdot 16+4=51$. Számtani sorozatot pedig $9+2\cdot 16+4=45$ szám számjegyei alkotnak.

$$P=\frac{45}{51}\approx 0{,}882.$$

c) Csupa különböző jegyből álló háromjegyű számok száma $9\cdot 9\cdot 8=648$ (az első helyre nem írhatunk 0-t, utána azt azonban már igen, de az első helyre írt számot már nem). A különböző, de számtani vagy mértani sorozatot adó jegyekből álló háromjegyű számok száma $51-9=42$.

$$P=1-\frac{42}{648}\approx 0{,}935.$$



5115 *a)* Ha mindkét fordulóban háromszorozunk 4-es dobással, akkor $10\,€ \cdot 3^2 = 90\,€$.

b) Legkevesebb pénzünk akkor lesz, ha minden alkalommal elveszítjük a pénzünk háromnegyedét. Egy-egy fordulóban ennek valószínűsége $\frac{1}{4}$, így három forduló alatt $\left(\frac{1}{4}\right)^3$.

c) 10 €-ból 15 € csak úgy keletkezhet, ha egyszer háromszorozunk, egyszer felezünk és egyszer nem történik a pénzzel semmi. Azonban mindegy, hogy melyik történés melyik körben esik meg. A három különböző lehetőséget $3! = 6$-féleképpen permutálhatjuk. Mivel mindegyik valószínűsége $\frac{1}{4}$, ezért a kérdezett valószínűség: $P = 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 0{,}09375$.

5116 A „legalább ötször dobunk” végtelen sok esetből áll, foglalkozzunk a komplementerével: ha vagy elsőre, vagy másodikra, harmadikra vagy negyedikre hatost dobunk. Nézzük sorban.

Elsőre dobtunk hatost:

$$P(\text{elsőre hatos}) = \frac{1}{6}.$$

Másodikra úgy dobhatunk hatost, ha elsőre mást dobtunk:

$$P(\text{másodikra hatos}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Harmadikra úgy, ha az első kettő nem hatos volt:

$$P(\text{harmadikra hatos}) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}.$$

Végül negyedikre úgy, ha előtte háromszor nem találtuk el a hatost:

$$P(\text{negyedikre hatos}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}.$$

A keresett valószínűség ezek összege:

$$P = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}5177.$$

Tehát annak nagyobb a valószínűsége, hogy az első négy dobásra sikerül a hatos.

5117 *a)* $P = \dfrac{\binom{10}{5}}{\binom{25}{5}} \approx 0{,}0047;$ *b)* $P = \dfrac{\binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} \approx 0{,}056;$

c) Figyeljük meg, hogy a csupa epres, csupa meggyes és a vegyes esetek kiadnak minden lehetséges esetet, ráadásul kizárják egymást. Így a vegyes valószínűségét megkapjuk a másik kettő összegének komplementereként:

$$P(\text{vegyesen van epres és meggyes}) = 1 - [P(\text{csak epres}) + P(\text{csak meggyes})] \approx 0{,}9393.$$

Megjegyzés: Más módon is számolhatunk, összegezve az 1 eper – 4 meggy, 2 eper – 3 meggy, 3 eper – 2 meggy, 4 eper – 1 meggy eseteket.

5118 Alkalmazzuk a valószínűség-számítás szita-formuláját a K: Kati nyer, J: Jani nyer eseményekre. A szöveg alapján $P(K) = 0{,}6$; $P(J) = 0{,}5$ és $P(KJ) = 0{,}25$. Így:

$$P(K + J) = P(K) + P(J) - P(KJ) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}85.$$



5119 A dobozban volt 50 zöld és 30 kék gyöngy. Ha legalább kettő kék, akkor lehet 2, 3, 4, 5, 6, 7 vagy 8 kék. Ez elég sok eset, lássuk a komplementerét. Ez csak két eset: 0 vagy 1 kék (és 8 vagy 7 zöld). Az összes esetek száma mindkét esetben $\binom{6}{4}$. Így a keresett valószínűség:

$$1-\left(\frac{\binom{30}{0}\cdot\binom{50}{8}}{\binom{80}{8}}+\frac{\binom{30}{1}\cdot\binom{50}{7}}{\binom{80}{8}}\right)\approx 0{,}88.$$

5120 *a)* $P=0{,}25.$ *b)* $P=0{,}25^3=0{,}015625.$

c) $P=0{,}25^2\cdot 0{,}75^3\cdot 0{,}25=(0{,}25\cdot 0{,}75)^3\approx 0{,}0066.$

d) Sajnos nem tudjuk, melyik négy kérdésre ismeri a helyes választ Károly, így elsőnek ki kell választanunk a hat kérdésből ezt a négyet $\binom{6}{4}$-féleképp (vagy éppen a kettő rosszat). Tudjuk, hogy minden jó válasznak 0,25 a valószínűsége és minden rossz válasznak 0,75. A négy helyes és kettő helytelen valószínűsége így $0{,}25^4\cdot 0{,}75^2$. Összesen:

$$P(\text{négy jó, kettő rossz})=\binom{6}{4}\cdot 0{,}25^4\cdot 0{,}75^2\approx 0{,}033.$$

Megjegyzés: A feladatban visszatevéses mintavételt alkalmazunk. A „visszatevés” itt azt jelenti, hogy többször adhat jó és rossz választ is Károly.

5121 A szabályos háromszög azonos oldalhoz tartozó nevezetes vonalai (súlyvonal, magasság, szögfelező) egybeesnek. Így beírt körének sugara megegyezik a magasság harmadával, amit Pitagorasz tételéből ki tudunk számítani: $m=\sqrt{300},\ r=\frac{10}{\sqrt{3}}$. A valószínűségek meghatározásához a területeket kell kiszámítanunk: $T_\triangle=\frac{20\sqrt{300}}{2}=100\sqrt{3},\quad T_\bigcirc=\frac{100\pi}{3}$.

a) $p=\frac{T_\bigcirc}{T_\triangle}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\approx 0{,}6046.$

b) Annak a valószínűsége, hogy nem találják el a számlapot, komplementere az előbb kapott értéknek:

$$p=\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(1-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)\approx 0{,}1445.$$

c) Már mindent tudunk, csak azt nem, hányféleképpen rakhatjuk sorba a kettő lecsúszó és a három ott ragadó dobást:

$$p=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)^3\cdot\left(1-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)^2\approx 0{,}3455.$$

5122 *a)* Minden pakliban minden típusú lapból (ász, király, hetes stb.) négy darab van. Így egy kihúzott figurás lap valószínűsége $\frac{16}{32}=0{,}5$ és egy hetes valószínűsége $\frac{4}{32}=0{,}125$. Mivel nem tudjuk, mely lapokon szerepelnek figurák, ezért a kihúzott 7-ből válasszunk ki erre a célra négyet $\binom{7}{4}$-féleképpen.

A keresett valószínűség: $P=\binom{7}{4}\cdot 0{,}5^4\cdot 0{,}125^3\approx 0{,}0043.$



b) Legfeljebb öt figura jelenthet 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 lapot. Térjünk át a komplementer „mind a hét figurás vagy egy nem az" esemény valószínűségére:

$$P(\text{legfeljebb öt}) = 1 - [P\,(\text{hét}) + P(\text{egy nem})] =$$

$$= 1 - \binom{7}{0} \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}125^0 - \binom{7}{1} \cdot 0{,}5^6 \cdot 0{,}125^1 \approx 0{,}9785.$$

5123 A szöveg szerint A-ba 12 fiú és 12 lány jár, a B-be 16 fiú és 8 lány.

a) $\frac{8}{20} = 0{,}4;$ *b)* $\frac{\binom{12}{2}}{\binom{20}{2}} \approx 0{,}35;$ *c)* $\frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{12}{1}}{\binom{20}{3}} \approx 0{,}29;$

d) $\frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{16}{1}}{\binom{28}{4}} + \frac{\binom{12}{1} \cdot \binom{16}{3}}{\binom{28}{4}} \approx 0{,}5;$

e) A következő esetek lehetségesek: 4 fő az A-ból, 3 a B-ből; 5 fő az A-ból, 2 fő a B-ből; 6 fő az A-ból, 1 fő a B-ből. (A komplementerre nem érdemes áttérni.)

$$P = \frac{\binom{24}{4} \cdot \binom{24}{3}}{\binom{48}{7}} + \frac{\binom{24}{5} \cdot \binom{24}{2}}{\binom{48}{7}} + \frac{\binom{24}{6} \cdot \binom{24}{1}}{\binom{48}{7}} + \frac{\binom{24}{7} \cdot \binom{24}{0}}{\binom{48}{7}} = 0{,}5.$$

5124 *a)* Ha minden kérdést passzol valaki és még szerencséje sincs, akkor négy alkalommal osztják el hattal az éppen aktuális pontjainak számát. $1296 : 6^4 = 1$, azaz egyetlen pont a megszerezhető legkevesebb. A maximális pontszámot akkor éri el a játékos, ha minden esetben meg tudja háromszorozni pontjainak számát: $1296 \cdot 3^4 = 104\,976$. Ehhez szerencsésen kell dobnia, és a választ is tudnia kell mind a négy kérdésre.

b) A maximális ponthoz ismerni kell a helyes válaszokat, és négy alkalommal kell dobni 5-öst vagy 6-ost. Ennek valószínűsége $\left(\frac{2}{6}\right)^4 \approx 0{,}0123$. A minimális pontszámhoz $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}482$ valószínűséggel jutunk, ha mindig passzolunk, és nem dobunk 6-ost.

c) 5832 pontot akkor ér el egy játékos, amennyiben kiinduló pontszámát 4,5-del szorozza meg, $5832 : 1296 = 4{,}5$. Gondoljuk át, milyen együtthatók módosíthatják a pontszámokat!

Ha tudja a választ, akkor az A vagy B lehetőséget választhatja. A dobástól függően 3, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{1}{2}$ a szorzótényező. Amennyiben kihagyja a kérdést, akkor vagy nem változik a pont, vagy hatoda lesz: 1, $\frac{1}{6}$ a szorzó.

A 4,5 szorzótényezőt ezekből kétféleképpen kaphatjuk meg: $4{,}5 = 3^3 \cdot \frac{1}{6} = 3^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$. (A feltétel szerint ha megpróbál válaszolni a kérdésre a játékos, tudja a választ.) Azaz vagy

– három A lehetőséget választ, dobása 5 vagy 6 és egy kérdést passzol, de nem dob 6-ost, vagy

– kétszer választ A-t (dobása 5 vagy 6), egyszer B-t (dobása 1, 2 vagy 3), és egy kérdést nem tud, de 6-ost dob.



Az első változat négyféleképp történhet meg attól függően, melyik kérdést passzolja. Ennek valószínűsége a feltételek mellett:

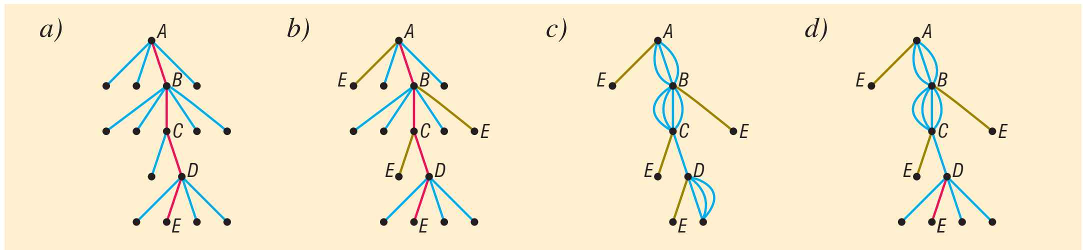
$$4\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\approx 0{,}123.$$

A második eset $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}=12$-féleképp valósulhat meg:

$$12\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\approx 0{,}111.$$

Az eredmény a kettő összege, $p=0{,}234$.

5125 A legjobb, ha gráfok segítségével tekintjük át Kornélia barangolását az egyes esetekben.



a) Az első esetben az A oldal négy hiperhivatkozásából egy mutat B-re, B öt linkjéből egy mutat C-re és így tovább egészen E-ig. A Nelli által bejárt utat a piros vonal mutatja. A keresett valószínűség az egyes lapok választási valószínűségeinek szorzata, vagyis

$$P=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=0{,}00625.$$

b) Ebben az esetben A-ról közvetlenül is elérheti E-t $\frac{1}{4}$ valószínűséggel, illetve ugyanekkora valószínűséggel továbbléphet B-re. B-ről $\frac{1}{5}$ valószínűséggel jut E-re vagy ugyanennyi eséllyel megy tovább C-re és így tovább. A keresett valószínűség pedig

$$P=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=0{,}33125.$$

c) Az előző esethez képest annyi változást tapasztalunk, hogy az A oldalról ugyan most is $\frac{1}{4}$ valószínűséggel jut Kornélia E-re, ám minden más utat választva B-re jut $\frac{3}{4}$ valószínűséggel. Hasonló a helyzet a B lapon: $\frac{1}{5}$ valószínűséggel kattint E-re és $\frac{4}{5}$ valószínűséggel C-re. A valószínűség:

$$P=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=0{,}775.$$

d) A kérdés ebben az esetben az, hogy mekkora valószínűséggel nem talál Kornélia a női magazin E oldalára. Az A oldalon három, B-n négy, C-n egy és D-n három hiperhivatkozásra is kattinthatunk, hogy elkerüljük E-t. Tehát

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=0{,}225.$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a *c)* és *d)* eset gráfjában látható különbség a kérdések megválaszolásában nem jelent eltérést. Mindegy, hogy a D oldalról mennyi „nem E" helyre juthat. Így világos, hogy a *c)* és *d)* részben kapott valószínűségek összege miért 1 (komplementer események).



Statisztika – megoldások

5126 A minta terjedelme 12.
A három kategória:

$$0-4, \quad 4-8, \quad 8-12.$$

A gyakorisági táblázat:

Kategória	Gyakoriság	Relatív gyakoriság
Alacsony	8	0,40
Közepes	7	0,35
Magas	5	0,25
Összesen	**20**	**1**

5127 *a)* A 6 elemű minta rangsorban: 2, 4, 4, 7, 8, 11.

$$Me = Q_2 = \frac{r_3 + r_4}{2}, \quad Q_1 = r_2, \quad Q_3 = r_5.$$

b) A 7 elemű minta rangsora: 7, 11, 12, 13, 15, 16, 20.

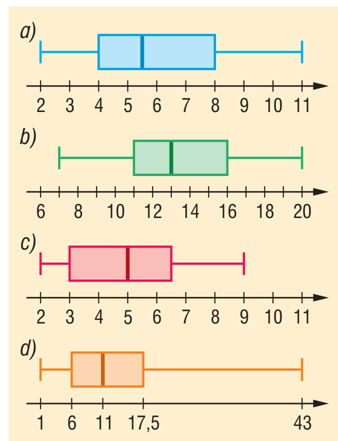
$$Me = Q_2 = r_4, \quad Q_1 = r_2, \quad Q_3 = r_5.$$

c) A 8 elemű minta rangsora: 2, 3, 3, 5, 5, 6, 7, 9.

$$Me = Q_2 = \frac{r_4 + r_5}{2}, \quad Q_1 = \frac{r_2 + r_3}{2}, \quad Q_3 = \frac{r_6 + r_7}{2}.$$

d) A 9 elemű minta rangsora: 1, 4, 8, 11, 11, 11, 15, 20, 43.

$$Me = Q_2 = r_5, \quad Q_1 = \frac{r_2 + r_3}{2}, \quad Q_3 = \frac{r_7 + r_8}{2}.$$



Ezek alapján a mintákat jellemző középértékek:

Minta	Átlag	Módusz(ok)	Alsó kvartilis	Medián	Felső kvartilis
a)	6	4	4	5,5	8
b)	13,43	–	11	13	16
c)	5	3 és 5	3	5	6,5
d)	13,78	11	6	11	17,5

5128 *a)* Az 5127/*a* minta terjedelme $11-2=9$. Szórása:

$$s = \sqrt{\frac{(2-6)^2 + 2\cdot(4-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2}{6}} = 3.$$

Az 5127/*c* minta terjedelme $9-2=7$. Szórása:

$$s = \sqrt{\frac{(2-5)^2 + 2\cdot(4-5)^2 + 2\cdot(5-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2}{6}} = \sqrt{4{,}75} \approx 2{,}18.$$

b) Az 5127/*a* minta mediántól való abszolút átlagos eltérése:

$$AAE = \frac{|2-5{,}5| + 2\cdot|4-5{,}5| + |7-5{,}5| + |8-5{,}5| + |11-5{,}5|}{6} \approx 2{,}67.$$

Az 5127/*c* minta mediántól való abszolút átlagos eltérése:

$$AAE = \frac{|2-5| + 2\cdot|4-5| + 2\cdot|5-5| + |6-5| + |7-5| + |9-5|}{6} = \frac{14}{8} = 1{,}75.$$



5129 *a)* A megoldáshoz kördiagramot (vagy *sávdiagramot*) készítünk, mert ezen jól látjuk az egyes kategóriák mekkora „szeletet” tesznek ki az egészből.

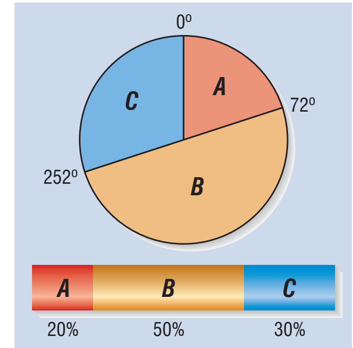
A relatív gyakoriságok sorban:

$$0,2; \quad 0,4; \quad 0,3;$$

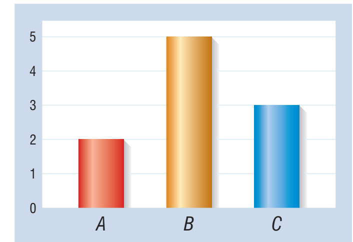
így a kördiagramban a kategóriákhoz tartozó középponti szögek rendre

$$0,2 \cdot 360° = 72°, \quad 0,5 \cdot 360° = 180° \quad \text{és} \quad 0,3 \cdot 360° = 108°.$$

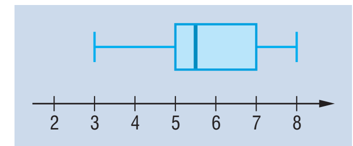
(Sávdiagram esetén a sáv hosszát szorozzuk a relatív gyakoriságokkal.)



b) A megoldáshoz oszlopdiagramot készítünk, mert az oszlopok egymáshoz viszonyított magasságait első ránézésre átlátjuk. A vízszintes tengelyen a kategóriákat, a függőlegesen pedig a gyakoriságokat ábrázoljuk.



c) A megoldáshoz dobozdiagramot készítünk. Ehhez szükségünk van a legkisebb (3), legnagyobb (8) elemre, illetve a kvartilisekre ($Q_1 = 5$; $Q_2 = 5,5$; $Q_3 = 7$). A kész diagramról leolvasható, hogy az adatok legalább fele 5 és 7 közé esik (azon belül az 5-höz közelebb), a szélső értékek pedig a 3 és a 8.



5130 Átlagot az osztályközepek alapján tudunk becsülni. Ezek a következők:

$$\frac{4+0}{2} = 2, \quad \frac{9+5}{2} = 7, \quad \frac{14+10}{2} = 12.$$

A súlyozott átlag a minta becsült átlaga:

$$\frac{7 \cdot 2 + 11 \cdot 7 + 2 \cdot 12}{20} = 5,75.$$

5131 *a)* A közösség egyetlen móduszát a *középkorúak* alkotják.

A *fiatalok* másfélszer annyian vannak a közösségben, mint az *aggkorúak.*

Mivel itt látunk értékeket, az osztályközök segítségével becslést adhatunk az átlagéletkorra:

$$\frac{6 \cdot 15 + 10 \cdot 45 + 4 \cdot 80}{20} = 43.$$

b) A középkorúak a minta felét teszik ki. A medián értéke is ebben a kategóriában van.

c) A közösség legfiatalabb tagja is már 10 éves, a legidősebb pedig nagyjából 87-88 éves.

A minta terjedelme kb. $87 - 10 = 77$ év.

A közösség legalább fele 20 és kb. 58-59 év közötti, az emberek negyede kb. 48-49 és 58-59 közötti.

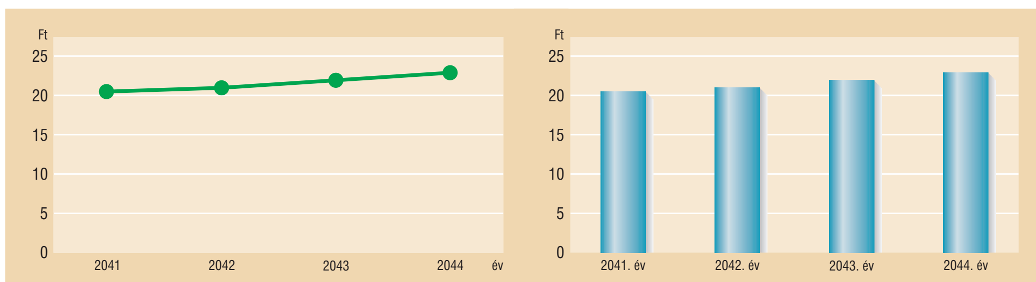


5132 *a)* Az (1) diagram készítője az y tengely maximumának megnövelésével „elbagatellizálja" a növekedést: azt szeretné láttatni, hogy ezekben az években a körte ára gyakorlatilag változatlan.

A (2) és (3) diagram készítői azt szeretnék bemutatni, hogy a körte a 2040-es évek elején nagyon drágulni fog. Ehhez az y tengely minimumát közel választják a legkisebb értékhez. A (3) készítője még csak nem is az éveket tüntette fel a vízszintes tengelyen.

A (4) diagram készítője teljesen hibásan ábrázolta kördiagramon az időbeli folyamatot, ráadásul 2041-et vette „előre": így az tűnik a legnagyobbnak, holott az a legkisebb érték!

b) Időbeli folyamatot helyesen ábrázolni alapvetően oszlop-, vagy vonaldiagrammal lehet, megfelelően megválasztva a tengelyeken az egységeket. Így reálisan látjuk a növekedés mértékét. Például:



5133 Az átlag jelentése, hogy lecserélve az adatokat erre az értékre, az összérték változatlan marad. Tehát ha a lányok, illetve a fiúk egymás fejére állnának, akkor $20 \cdot 166$ és $10 \cdot 175$ cm magasak lennének. Vagyis az osztály átlagmagassága:

$$\frac{20 \cdot 166 + 10 \cdot 175}{30} = 169.$$

5134 Jelölje f a fiúk számát, ekkor a lányok száma $3f$, az egész osztályba $4f$ tanuló jár. Jelölje y a lányok átlagmagasságát, ekkor a fiúké $y + 10$. Felírva az osztály átlagát:

$$\frac{f \cdot (y+10) + 3f \cdot y}{4f} = 170.$$

Egyszerűsítsünk f-fel és szorozzunk fel 4-gyel:

$$y + 10 + 3y = 4y + 10 = 680.$$

Innen a lányok átlagmagassága $y = 167{,}5$ cm.

5135 *a)* A kezdő munkavállaló *valószínűleg* olyan munkakörbe kerül, amiben *valószínűleg* a cégnél a legtöbben dolgoznak. Tehát érdemes a B céget választania, mert ott a fizetések módusza nagyobb.

b) Aki már rendelkezik hosszabb gyakorlattal, az *valószínűleg* már magasabb besorolásba kerül. Az A cégnél a medián közelebb van az átlaghoz, a módusz viszont távolabb van tőle, tehát többen vannak az átlag körül vagy az felett.

c) Hosszú távon *valószínűleg* a B cégnél éri meg dolgozni: mivel itt nagyobb a fizetések terjedelme, ezért itt magasabb a vezető beosztásban dolgozók fizetése (*valószínűleg* a kezdő fizetések mindkét helyen nagyjából ugyanakkorák).

5136 *a)* Ilyen ok lehet:

(1) gyorsan pénzre van szükségünk;

(2) nem annyira sietünk, de szeretnénk egy nagyobb összeget;

(3) a lehető legtöbb pénzt szeretnénk, amit aztán nem is használunk fel azonnal.



b) A kettő közül a *B* autót érdemes meghirdetnünk a minimumár közelében: mivel hasonlóan népszerűek, hasonló valószínűséggel viszik el az alacsony árfekvésűeket, viszont ezért többet kapunk, mint az *A*-ért.

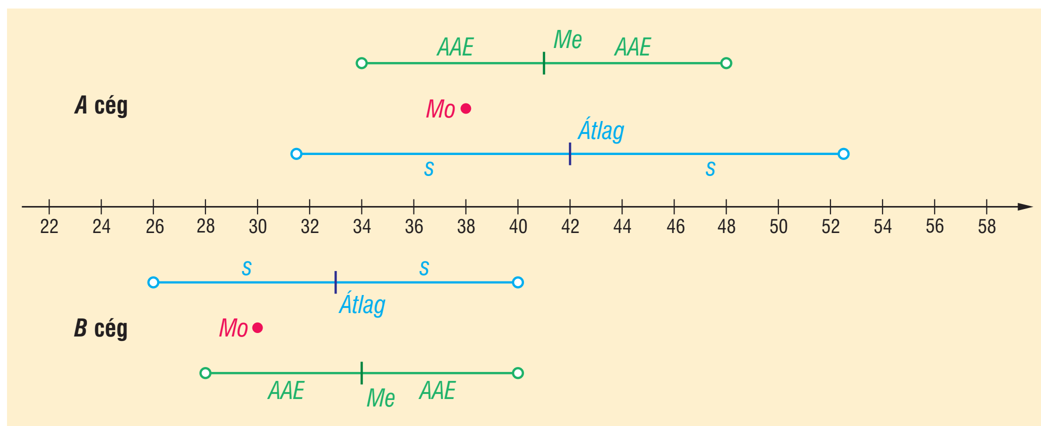
Az *A* autót érdemes meghirdetnünk a felső kvartilis és a medián között: az autók egy jó részét ott hirdetik, előbb-utóbb a miénk is gazdára talál.

Dönthetünk érzelmi alapon, a maximum mindkét típusnál egyenlő: bármelyik autót meghirdethetjük.

Megjegyzés: A használt autók ára erősen függ az elhasználódás mértékétől. Egy bontószökevényt nem lehet a maximum közelében eladni, és egy valóban jó állapotú autót sem fognak meghirdetni nagyon olcsón.

5137 *a)* A szórás és az *AAE* értékei között egyik esetben sincs kiugró eltérés. Az *A* cégnél az átlag, a módusz és a medián is „együtt” mozog. Azonban a *B*-nél míg az átlag és a módusz nem tér el nagyon, addig a medián az átlagtól több mint egy szórásnyit eltér: ez az elgépelt adat. Ha csak egy jegyet ütöttek félre, akkor a helyes adat a 34.

b) Ábrázoljuk egy számegyenesen a megadott számokat! A *B* cégnél 30 évnél fiatalabbak is dolgoznak szép számmal, míg az *A*-nál szinte mindenki több 10 éves tapasztalattal rendelkezik. A *B* cég alkalmazottjai nagyjából 10 évvel fiatalabbak az *A* cég dolgozóinál.



Az *A* dolgozóinak fele szinte mindenkinél idősebb a *B* cégben.

Az *A*-nál medián < átlag, ezért az idősebb 50% korban jobban „széthúz”: nagy valószínűséggel találunk nyugdíjkorhatárhoz közel esőket, pályakezdőt szinte biztosan nem. A *B*-nél fordítva van: átlag < medián, így a fiatalabb 50% szóródik jobban szét: valószínűleg sok pályakezdőt alkalmaznak (korban lefelé itt nem tudunk olyan sokat eltávolodni, mint a másiknál felfelé, ezért a számuk kell, hogy nagyobb legyen), és szinte biztos, hogy nincsenek a nyugdíjkorhatárt még csak megközelítők sem.

5138 Mivel hét elemről van szó, ezért a rangsorba állított $r_1, \ldots, r_7$ elemekre:

$$r_2 = Q_1 = 12, \quad r_4 = Q_2 = 14, \quad r_6 = Q_3 = 20.$$

Ha az egyetlen módusz háromszor fordul elő, akkor $r_5 = r_7 = 20$.

A terjedelem miatt $r_1 = 20 - 14 = 6$.

Már csak az a kérdés, hogy r_3 értéke mi lehet. Ezt a többi adat és az átlag ismeretében ki tudjuk számítani: $r_3 = 13$.

Egy *lehetséges* minta: 6, 12, 13, 14, 20, 20, 20.



Van-e másik megoldás?

Ha kétszer fordul elő az egyetlen módusz, akkor vagy (1) $r_5 = r_6 = 20$, vagy (2) $r_6 = r_7 = 20$.

Az (1) esetben $r_7 \geq 21$, aminél a terjedelem miatt $r_1 \geq 7$. Így az átlag változatlanságához legalább 2-vel kellene csökkenteni a többi adatot, de mivel a többi már adott, ezért csak r_3 változhatna. Ám a módusz miatt $12 < r_3 < 14$, tehát ez nem lehetséges.

A (2) esetben a minta nagy része a terjedelem és a módusz miatt rögzített: 6, 12, 13, 14, r_5, 20, 20. Azonban az átlag miatt $r_5 = 20$, tehát nem kapunk új, a feltételeket kielégítő mintát most sem.

A válasz tehát igen, *egyértelműen* meghatározzák a feltételek a mintát.

5139 A minta mediánja 101, így a tőle vett eltérések abszolútértékei $101 - x$, 15, 15, $y - 101$. Ezeknek összege $4 \cdot 20 = 80$, tehát $y - x = 50$, vagyis $y = 50 + x$.

A szórásnégyzet 441. A minta átlaga:

$$\frac{x + 86 + 116 + 50 + x}{4} = \frac{2x + 252}{4} = 0,5x + 63.$$

Írjuk fel a szórásnégyzetet és alakítsuk át:

$$\frac{[x - (0,5x + 63)]^2 + [86 - (0,5x + 63)]^2 + [116 - (0,5x + 63)]^2 + [50 + x - (0,5x + 63)]^2}{4} = 441,$$

$$(0,5x - 63)^2 + (23 - 0,5x)^2 + (53 - 0,5x)^2 + (0,5x - 13)^2 = 1764,$$

$$x^2 - 152x + 7476 = 1764.$$

Az $x^2 - 152x + 5712 = 0$ egyenlet megoldásai: $x_1 = 84$ és $x_2 = 68$. Hozzájuk tartozik $y_1 = 134$, $y_2 = 118$.

Nagyságrendileg ($x \leq 86$, $116 \leq y$) megfelelnek, ellenőrizzük őket! A két minta mediánja megegyezik.

Az első minta 84, 86, 116, 134. Átlaga 105, a mintaelemek átlagtól való eltérései –21, –19, 11, 29, mediántól való eltéréseinek abszolút értékei pedig 17, 15, 15, 33.

A második minta 68, 86, 116, 118. Átlaga 97, az átlagtól való eltérések –29, –11, 19, 21, a mediántól való eltérések abszolút értéke 33, 15, 15, 17.

Mivel az eltérések egyenlők, így a szórásuk és abszolút átlagos eltérésük is egyenlő.



ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET – ÖSSZEFOGLALÁS

Számok és műveletek – megoldások

5140 Egy lehetséges megoldás:

a) $20+7-3-4-11=9$; *b)* $13+9+6-5-13=10$;
c) $1+2\cdot3+4-5=6$; *d)* $5+4\cdot3-2\cdot1=15$;
e) $5\cdot6-7\cdot8-9=-35$; *f)* $10\cdot3:6+4\cdot5=25$.

5141 *a)* $[1;2]$; *b)* $]-2;3[$; *c)* $[-4;2]$; *d)* $]2;4]$;
e) $\{\}$; *f)* $[1;8[$; *g)* $]-2;3[$; *h)* $]-3;7]$;
i) $[-3;5]$; *j)* $\{\}$; *k)* $[2;4]\cup]7;12]$; *l)* $[-4;2[$.

5142 Például: $\frac{1}{33}=\frac{4}{132}<\frac{5}{132}<\frac{6}{132}<\frac{7}{132}<\frac{8}{132}=\frac{2}{33}$.

5143 Mivel $\frac{1}{33}=0{,}03030303\ldots$ és $\frac{1}{32}=0{,}03125$, megfelel például:

$$a=0{,}0304050607\ldots,\quad b=0{,}03040040004\ldots,\quad c=0{,}0306789101112\ldots$$

5144 A gondolt számok legyenek x és y, ahol $x>y$. Felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned}x-y&=8\\x&=2y+2\end{aligned}\right\},\quad \text{amiből}\quad y=6\quad \text{és}\quad x=14.$$

A két szám összege: 20.

5145 *a)* Számtani közép: $\frac{2+8}{2}=5$, mértani közép: $\sqrt{2\cdot8}=4$.

b) Számtani közép: $\frac{17}{2}$, mértani közép: 4.

c) Számtani közép: 10, mértani közép: 8.

d) Számtani közép: 2, mértani közép: 2.

5146 *a)* $\frac{4+b}{2}=6$, $b=8$; *b)* $b=6$; *c)* $b=20$; *d)* $b=9$;

e) $b=\frac{25}{4}$; *f)* $b=36$.

5147 *a)* $\frac{21}{5}=4{,}2$, a keresett jegy 0; *b)* $\frac{35}{6}=5{,}8\dot{3}$, a keresett jegy 3;

c) $\frac{13}{7}=1{,}\dot{8}5714\dot{2}$, és $2010=6\cdot335$, a keresett jegy 2;

d) $\frac{7}{17}=0{,}\dot{4}11764705883352\dot{9}$, és $2010=16\cdot125+10$, a keresett jegy 8.



5148 *a)* 12 csomag.

b) 6 napra elegendő.

5149 $4 + 90 \cdot 2 + 288 \cdot 3 = 1048$ számjegyet írtak le.

Első jegyként 10 db, második jegyként $9 + 10 + 10 = 29$ db, harmadik jegyként $10 + 9 = 19$, tehát összesen 58-szor írták le az 5-öst.

5150 *a)* Hamis, például $15 : 5 = 3$.

b) Hamis, a 0-nak nem létezik reciproka.

c) Igaz, például $(-5) \cdot (-7) = 35$.

d) Hamis, gondoljunk a tizedes tört alakra.

e) Igaz, például π.

f) Hamis, például $\sqrt{64} = 8$ és $\sqrt[3]{64} = 4$.

5151 Mivel minden második szám páros, a nullák számát a számok prímtényezős felbontásában szereplő ötösök száma határozza meg:

$$5,\quad 10 = 5 \cdot 2,\quad 15 = 5 \cdot 3,\quad 20 = 5 \cdot 2^2,\quad 25 = 5^2,\quad 30 = 5 \cdot 3 \cdot 2,$$
$$35 = 5 \cdot 7,\quad 40 = 5 \cdot 2^3,\quad 45 = 5 \cdot 3^2,\quad 50 = 5^2 \cdot 2,\quad 55 = 5 \cdot 11.$$

Mivel a szorzat prímtényezőként 13 darab ötöst tartalmaz, ezért 13 nullára végződik.

5152 Akkor tartalmazza a legkevesebb jegyet, ha a lehető legtöbb 9-es szerepel benne. A keresett szám 39999…99, tehát összesen 223 darab 9-est tartalmaz.

5153 Ha a lehető legkevesebb jegyet akarjuk felhasználni:

$$2000 = 2^4 \cdot 5^3 = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5,$$

a másodikból adódik a kisebb szám: 25 558.

5154 *a)* $\frac{100}{73} = 1{,}3698$, tehát 37%-kal kell felemelni az árat.

b) $0{,}73 \cdot 0{,}7 = 0{,}511$, tehát 51,1% lesz.

c) $0{,}73 \cdot 1{,}45 = 1{,}0585$, tehát 105,85%-a lesz az ár az akció előtti árnak.

5155 Mindkét alkalommal a $75 + 60 - 100 = 35\%$ volt jelen.

Csak az első színházlátogatáson 40%, csak a másodikon 25% vett részt.



5156 36% az 54 ember, a teljes létszám 150 fő.

5157 *a)* 198 400 Ft; *b)* 61,29%; *c)* 163,16%.

5158 *a)* $\frac{11}{9}$; *b)* 2; *c)* $\frac{215}{99}$; *d)* $\frac{593}{1110}$.

5159 *a)* $1623 \cdot 623 - 623^2 = 623 \cdot (1623 - 623) = 623\,000$;

b) $1956^2 - 956^2 = (1956 - 956) \cdot (1956 + 956) = 2\,912\,000$;

c) $\frac{314^2 - 196}{328} = \frac{(314 + 14) \cdot (314 - 14)}{328} = 300$.



Számelmélet, oszthatóság – megoldások

5160 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Igaz.

5161 *a)* 15-tel való oszthatóság:

(1) szükséges, de nem elegendő feltétel például:

– a számjegyek összege osztható legyen 3-mal;

– 0-ra vagy 5-re végződjön az adott szám.

(2) elegendő, de nem szükséges feltétel: az adott szám osztható legyen 30-cal.

(3) szükséges és elegendő feltétel: osztható legyen 3-mal és 5-tel is.

b) 45-tel való oszthatóság:

(1) szükséges, de nem elegendő feltétel: az adott szám 0-ra vagy 5-re végződjön.

(2) elegendő, de nem szükséges feltétel: az adott szám osztható legyen 90-nel.

(3) szükséges és elegendő feltétel: a számjegyek összege osztható legyen 9-cel, és 0-ra vagy 5-re végződjön az adott szám.

c) 12-vel való oszthatóság:

(1) szükséges, de nem elegendő feltétel: az utolsó 2 számjegyből álló kétjegyű szám osztható legyen 4-gyel.

(2) elegendő, de nem szükséges feltétel: az adott szám osztható legyen 36-tal.

(3) szükséges és elegendő feltétel: a számjegyek összege osztható legyen 3-mal, és az utolsó 2 számjegyből álló kétjegyű szám osztható legyen 4-gyel.

5162 *a)* Minden olyan pozitív egész, mely a 15-höz relatív prím: $a \neq 3k$, $a \neq 5l$, $k, l \in \mathbb{Z}^+$.

b) $a = 24;\ 72;\ 120;\ \ldots$ 24 páratlan számú pozitív többszöröse.

c) $a = 20$ vagy $a = 60$.

d) $a = 3;\ 6;\ 12;\ 24;\ 48$.

5163 Határozzuk meg a számláló és a nevező legnagyobb közös osztóját.

a) $(126; 294) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42,\quad \dfrac{126}{294} = \dfrac{(2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot 3}{(2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot 7} = \dfrac{3}{7};$

b) $\dfrac{30}{49};$ *c)* $\dfrac{19}{23};$ *d)* $\dfrac{9}{64};$ *e)* $\dfrac{5}{6};$ *f)* $\dfrac{128}{3}.$

5164 *a)* Keressük [60; 72] legkisebb közös többszörösét, ezért prímtényezős bontásukat alkalmazzuk:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,\quad 72 = 3^2 \cdot 2^3,\quad [60; 72] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360.$$

Így az eredeti kifejezés átalakítható:

$$\frac{7}{2^2 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{5}{3^2 \cdot 2^3} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} - \frac{5 \cdot 5}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{42}{360} - \frac{25}{360} = \frac{17}{360}.$$

b) Az *a)* feladathoz hasonló eljárással: $[14; 5; 21] = 210$.

Az eredeti kifejezés átalakítása:

$$\frac{3}{2 \cdot 7} - \frac{2}{5} + \frac{8}{3 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{8 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{41}{210}.$$



5165 *a)* A esetén: □ bármilyen természetes szám.

B esetén: Az egyik jel helyére pl. □ 2 többszörösei kell, hogy kerüljenek, így a másik jel helyére bármely természetes szám kerülhet.

C esetén: Az egyik jel (pl. △) helyére 3 többszörösei kerülnek, a másik jel helyére bármilyen természetes szám kerülhet.

b) A esetén: □ helyére 5 többszörösei kell, hogy kerüljenek.

B esetén: Az egyik jel helyére 2 többszörösei, a másik jel helyére bármely természetes szám kerülhet.

C esetén: Mindkét jel helyére bármely természetes szám írható.

5166 *a)* $11 \cdot 2 \cdot 5$-szöröse; *b)* $2 \cdot 13 \cdot 5$-szöröse; *c)* $11 \cdot 2$-szerese; *d)* $2 \cdot 5$-szöröse;
e) 11-szerese; *f)* 1-szerese; *g)* $11 \cdot 5$-szöröse; *h)* $13 \cdot 5$-szöröse.

5167 Prímtényezős bontásból eredve: $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$, a kitevők eggyel növelt szorzata adja a pozitív osztók számát: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ pozitív osztója van a 60-nak.

Ellenőrzés felsorolással: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60.

5168 *a)* 39; *b)* 46; *c)* 322.

5169 *a)* 10111101100_2; *b)* 113230_4; *c)* 22031_5.

5170 *a)* $a = 0$ vagy $a = 8$;

b) Ha $x = 0$, akkor y lehetséges értékei: $y = 1;\ 4;\ 7$.
Ha $x = 5$, akkor y lehetséges értékei: $y = 2;\ 5;\ 8$.

c) Ha $a = 0$, akkor b lehetséges értékei: $b = 0;\ 3;\ 6;\ 9$.
Ha $a = 4$, akkor b lehetséges értékei: $b = 2;\ 5;\ 8$.
Ha $a = 8$, akkor b lehetséges értékei: $b = 1;\ 4;\ 7$.

5171 Mivel a legkisebb ötjegyű szám: $10\,000 = 19 \cdot 526 + 6$, ezért a megfelelő szám a $10\,005$.

5172 Relatív prímek: 297 és 800, illetve 297 és 560.
Van három olyan szám, például: $(210; 297; 560) = 1$; $(210; 297; 800) = 1$; $(297; 560; 800) = 1$.

5173 Minden más prím ötszöröse páratlan, ahhoz egyet adva páros, összetett számot kapunk, tehát nincs más a feltételnek megfelelő prímszám.

5174 A 28-nak a 28-adik hatványával osztható.

5175 *a)* A kitevők párosak, tehát négyzetszám.

b) Van páratlan kitevő, tehát nem négyzetszám.

c) $8^{42} \cdot 9^7 \cdot 25^9 = 2^{126} \cdot 3^{14} \cdot 5^{18}$, tehát négyzetszám.

5176 *a)* A szám osztható 3-mal.

b) A szám osztható 3-mal.

c) A szám osztható 5-tel.

5177 *a)* A szám páros és osztható 5-tel, tehát 0-ra végződik.

b) A szorzat páratlan és osztható 5-tel, tehát 5-re végződik.

c) Az első hét prímszám között a 2 és az 5 is szerepel, tehát 0-ra végződik.



5178 Ha $a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 51$, akkor $a_1 + d = 17$. Mivel mindhárom tag prímszám, a következő megoldások lehetségesek:

$a_1 = 11$, ekkor $d = 6$, vagy $a_1 = 5$, ekkor $d = 12$, vagy $a_1 = 3$, ekkor $d = 14$.

5179 *a)* $10^{53} + 8 = 1\underbrace{0000\ldots0}_{53\text{ db}} + 8 = 1\underbrace{000\ldots0}_{53\text{ db}}8$. A számjegyek összege 9, tehát osztható 9-cel.

b) $10^{10} - 4 = 1\underbrace{000\ldots0}_{10\text{ db}}$

$-\quad 4$

$\underbrace{99\ldots9}_{9\text{ db}}6$. A számjegyek összege osztható 3-mal, tehát $10^{10} - 4$ osztható 3-mal.

c) lásd a *b)* feladatot: $10^{10} - 4$ osztható 3-mal és $10^{10} - 4$ páros, ezért osztható 2-vel is. Ebből következik, hogy a szám osztható 6-tal.

5180 *a)* Az utolsó jegy 0, a szám osztható 5-tel és 2-vel.

b) A szám csak 9-es és 3-as jegyeket tartalmaz, összegük osztható 3-mal, a szám is osztható 3-mal.

c) A szám utolsó három jegye 872, ezért osztható 8-cal.

5181 Anna 20 percenként, Bea 25 percenként ér fel. Mivel [20; 25] = 100, ezért legközelebb 10 óra 10 perckor fognak találkozni.

5182 Mivel $15 = 3 \cdot 5$ és $1350 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, a következő számpárok felelnek meg:

a	$3 \cdot 5 = 15$	$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$	$3^3 \cdot 5 = 135$	$2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 270$
b	$2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 1350$	$3^3 \cdot 5^2 = 675$	$2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 150$	$3 \cdot 5^2 = 75$

5183 Jövőre Félix $3p$ éves lesz, és tudjuk, hogy $21 \le 3p \le 71$, ezért $7 \le p \le 23$. A szóba jöhető prímek háromszorosait vizsgálva Félix életkora idén 38 év lehet.

5184 Az első szám az adott időszakban 10, a második pedig 01-től 59-ig bármi lehet. A 10-hez relatív prím minden olyan szám, amely nem osztható sem 2-vel sem 5-tel, ezek második jegye 1; 3; 7 vagy 9.

1-től 59-ig 24 ilyen szám van. Tehát a valószínűség: $\dfrac{24}{59} \approx 0{,}4$.

5185 Ha a szám osztható 10-zel, akkor osztható 2-vel és 5-tel. Ha 10 darab osztója van, a prímtényezős felbontása lehet p_1^9 vagy $p_1 \cdot p_2^4$. Az első típus nem jöhet szóba, mert 2 és 5 is osztója.
A második típusból a legkisebb: $5 \cdot 2^4 = 80$.

5186 $302 = 6 + 5a + 4a^2$ egyenlet pozitív egész megoldása: $a = 8$.

5187 $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$.

5188 Az átalakítást a következő módon végezzük:

$$A = \frac{n-2}{n+3} = \frac{n+3-5}{n+3} = 1 - \frac{5}{n+3}.$$

5 osztói: ± 1 és ± 5, így

$n + 3 = 1$ esetén: $n = -2$ és $A = -4$;
$n + 3 = 5$ esetén: $n = 2$ és $A = 0$;
$n + 3 = -1$ esetén: $n = -4$ és $A = 6$;
$n + 3 = -5$ esetén: $n = -8$ és $A = 2$.



5189 *a)* $\frac{2n+10}{n+1} = \frac{2\cdot(n+1)+8}{n+1} = 2 + \frac{8}{n+1}$, n lehetséges értékei: $n = 0;\ 1;\ 3;\ 7.$

b) $\frac{3n+5}{n-5} = \frac{3\cdot(n-5)+20}{n-5} = 3 + \frac{20}{n-5}$, n lehetséges értékei: $n = 6;\ 7;\ 9;\ 10;\ 15;\ 25.$

5190 $11a - 12b = 4(2a - 5b) + 3a + 8b$, ezért osztható 29-cel.

5191 Mivel $(x; y) = 5$, ezért $x = 5m$ és $y = 5n$, ahol $(m; n) = 1$. Így $x + y = 5m + 5n = 200$, amiből $m + n = 40$.

Mivel $(m; n) = 1$, ezért a megfelelő számpárok:

$$(1; 39),\ (3; 37),\ (7; 33),\ (9; 31),\ (11; 29),\ (13; 27),\ (17; 23),\ (19; 21),\ (21; 19),$$
$$(23; 17),\ (27; 13),\ (29; 11),\ (31; 9),\ (33; 7),\ (37; 3)\ \text{és}\ (39; 1).$$

Tehát 16 megfelelő számpár van.

5192 Ha $x = 0$, nem lehet, mert $2^5 = 32$ nem felel meg.

Ha $x \geq 1$, a bal oldal osztható 9-cel, tehát $\overline{259x}$ is osztható 9-cel, ez csak $x = 2$ esetén teljesül. Ez valóban megoldás, mert $2^5 \cdot 9^2 = 2592$.

5193 Legyen a 2^{2010} számjegyeinek száma x, az 5^{2010} számjegyeinek száma y, ami azt jelenti, hogy:

$$10^{x-1} < 2^{2010} < 10^x - 1, \quad \text{illetve} \quad 10^{y-1} < 5^{2010} < 10^y - 1.$$

Összeszorozva a két egyenlőtlenséget:

$$10^{x+y-2} < 2^{2010} \cdot 5^{2010} < (10^x - 1)(10^y - 1).$$

A jobb oldal:

$$(10^x - 1)(10^y - 1) = 10^{x+y} - 10^x - 10^y + 1 < 10^{x+y} - 1.$$

Tehát:

$$10^{x+y-2} < 10^{2010} < 10^{x+y} - 1,$$

az első tag $x + y - 1$ jegyű, a harmadik tag $x + y$ jegyű, amiből következik, hogy $x + y - 1 = 2010$, tehát $x + y = 2011$.

A számjegyek számának összege 2011.

5194 Akkor kapunk prímszámot, ha az egyik tényező 1, a másik pedig prím.

I. eset:

$|n^3 - 63| = 1$, ha $n^3 - 63 = -1$, akkor n nem egész,
ha $n^3 - 63 = 1$, akkor $n = 4$, de $|n^2 - 65| = 49$ nem prím.

II. eset:

$|n^2 - 65| = 1$, ha $n^2 - 65 = 1$, akkor n nem egész,
ha $n^2 - 65 = -1$, akkor $n = 8$, ekkor $|n^3 - 63| = 449$ prím,
$n = -8$, ekkor $|n^3 - 63| = 575$ nem prím.

Tehát $n = 8$ esetén lesz a szorzat értéke prímszám.

5195 Használjuk fel, hogy

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)\left(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 + \ldots + b^{2k}\right).$$

Állítsuk párokba az összeg tagjait:

$$1^{2011} + 2010^{2011},\quad 2^{2011} + 2009^{2011},\quad \ldots\ \text{és így tovább.}$$

Mivel az alapok összegével, 2011-gyel minden összeg, valamint a kimaradó, utolsó tag is osztható, ezért az állítás igaz.



Hatvány, gyök, logaritmus – megoldások

5196 *a)* $16^{-2}\cdot 128^3=2^{-8}\cdot 2^{21}=2^{13}$; *b)* $\sqrt{1024}\cdot 64^{-\frac{1}{3}}=2^5\cdot 2^{-2}=2^3$;

c) $\dfrac{32^3}{\sqrt[3]{512^5}}=\dfrac{2^{15}}{2^{15}}=1=2^0$; *d)* $\dfrac{\sqrt[4]{256^{-3}}\cdot 4^{-1}}{\sqrt[3]{8^{-7}}\cdot 2^{-5}}=\dfrac{2^{-6}\cdot 2^{-2}}{2^{-7}\cdot 2^{-5}}=2^4$.

5197 *a)* $2^{27}\cdot 5^5\cdot 7^4$; *b)* $2^7\cdot 7^{-2}\cdot 5^{-7}$; *c)* 3; *d)* $5^3\cdot 3^8\cdot 2^{-2}$.

5198 *a)* 2; *b)* 7^6; *c)* 1; *d)* $\dfrac{5}{2}$.

5199 *a)* $\dfrac{4+6}{2^4}\cdot\dfrac{2^6}{5}=2^3=8$; *b)* 54; *c)* 3; *d)* 2;

e) 35.

5200 *a)* $\sqrt[24]{a^{29}}$; *b)* $\sqrt[30]{\dfrac{a^9}{b^8}}$; *c)* $\sqrt[30]{\dfrac{2}{5}}$; *d)* 3.

5201 *a)* $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; *b)* $21+9\sqrt{7}$; *c)* 10.

d) Egyszerűsítés, a nevezők gyöktelenítése, összevonás és a nevezetes azonosságok alkalmazása után:

$$\left[7\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)+6\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\right]\cdot\left(13\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)=1177.$$

e) A *d)* feladathoz hasonlóan:

$$\left(\frac{13}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}-\frac{6}{2\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)}\right)\cdot\left(5\sqrt{8}-8\sqrt{7}\right)=2\left(5\sqrt{8}+8\sqrt{7}\right)\cdot\left(5\sqrt{8}-8\sqrt{7}\right)=-496.$$

5202 *a)* $x>\dfrac{3}{4}$; *b)* $-\dfrac{1}{5}<x<\dfrac{2}{3}$; *c)* $x<-3$ vagy $\dfrac{5}{2}<x$;

d) $x>\dfrac{3}{7},\quad x\neq 1$; *e)* $3<x<7,\quad x\neq 4$; *f)* $\{\}$.

5203 *a)* $\log_{25}\left(\dfrac{1}{5}\right)=-\dfrac{1}{2}\ <\ 3^{-\log_3 7}=\dfrac{1}{7}\ <\ \log_6\sqrt[3]{6}=\dfrac{1}{3}\ <\ 4^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$;

b) $\sqrt[5]{-32}=-2\ <\ 5^{1-\log_5 8}=\dfrac{5}{8}\ <\ 9^{\sin\frac{\pi}{6}}=3\ <\ \log_3 81=4$;

c) $\log_{11}\left(\dfrac{\sqrt{11}}{\sqrt[4]{11}}\right)=\dfrac{1}{4}\ <\ \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}\right)^{-2}=\dfrac{1}{3}\ <\ 13^{\log_8 1}=1\ <\ 100^{\lg 2}=4$.

5204 *a)* $-\dfrac{4}{3}$; *b)* -12; *c)* $-\dfrac{24}{5}$; *d)* -2; *e)* -2; *f)* $-\dfrac{1}{2}$;

g) -6; *h)* $\dfrac{5}{2}$; *i)* $\dfrac{4}{3}$; *j)* -3; *k)* -10; *l)* 9;



m) 0; *n)* $-\frac{1}{42}$; *o)* -3; *p)* $-\frac{2}{7}$; *q)* $-\frac{3}{40}$; *r)* $-\frac{1}{4}$;

s) $-\frac{7}{6}$; *t)* $\frac{5}{12}$; *u)* 0.

5205 *a)* $x=\sqrt{8}$; *b)* $x=64$; *c)* $x=\frac{1}{3}$; *d)* $x=3^{-5}$;

e) $x=3^{-5}$; *f)* 2^{-36}; *g)* 5; *h)* $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\sqrt{\frac{1}{5}}$;

i) $2^{-5}=\frac{1}{32}$; *j)* 3; *k)* $2^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; *l)* 3.

5206 *a)* $2^{-11}\cdot 5^{-5}\cdot a^{28}\cdot b^{-9}$; *b)* $a^{\frac{83}{24}}$.

5207 *a)* 3; *b)* $\sqrt{\left(\sqrt{57}+\sqrt{48}\right)\cdot\left(\sqrt{57}-\sqrt{48}\right)}=\sqrt{9}=3$;

c) 2; *d)* $10\sqrt{2}+14$;

e) $\sqrt{27}-\sqrt{2}+\sqrt{27}+\sqrt{2}+2\sqrt{\left(\sqrt{27}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{27}+\sqrt{2}\right)}=2\sqrt{27}+2\sqrt{25}=6\sqrt{3}+10$;

f) 7;

g) $\left(9\sqrt{3}-15\sqrt{2}+10\sqrt{2}+16\sqrt{3}\right)\cdot\left(15\sqrt{3}+14\sqrt{2}+12\sqrt{3}-9\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)=$
$=\left(25\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)\cdot\left(25\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)=625\cdot 3-25\cdot 2=1825$;

h) $8\sqrt{3x}+20\sqrt{3x}-10\sqrt{3x}-4\sqrt{3x}=14\sqrt{3x}$;

i) $\left(7\sqrt{5}+7\sqrt{5}+7\sqrt{7}-5\sqrt{5}\right)\cdot\left(9\sqrt{5}-7\sqrt{7}\right)=\left(9\sqrt{5}+7\sqrt{7}\right)\cdot\left(9\sqrt{5}-7\sqrt{7}\right)=81\cdot 5-49\cdot 7=62$;

j) $\left(4\sqrt[4]{5}-3\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{2}+3\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(5\sqrt[4]{5}-4\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=$
$=\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt[4]{25}-\sqrt[4]{4}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)=3$;

k) $\left(3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{5}+4\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}\right)=\left(7\sqrt[3]{3}-7\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}\right)=$
$=7\cdot\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 5}+\sqrt[3]{5^2}\right)$;
a^3-b^3 azonossággal: $7(3-5)=7(-2)=-14$.

5208 *a)* $\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}=|1+\sqrt{5}|+|1-\sqrt{5}|=2\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=|1+\sqrt{3}|-|1-\sqrt{3}|=2$.

5209 *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Hamis.

5210 *a)* $\log_{64}(\log_2 16\cdot\log_5 25)=\log_{64}(4\cdot 2)=\frac{1}{2}$; *b)* $\lg\left(25^{\log_5 2}\cdot 4^{\log_2 5}\right)=\lg(4\cdot 25)=2$;

c) $\log_9\left(4^{\log_{16}25}-7^{\log_{49}16}\right)=\log_9(5-4)=0$;

d) $(\log_{20}4+\log_{20}5)^{\log_4 27}=(\log_{20}20)^{\log_4 27}=1^{\log_4 27}=1$.



5211 *a)* 135; *b)* 30; *c)* 20; *d)* $\frac{9}{4}$;

e) $16^{\log_4 2} = \left(4^{\log_4 2}\right)^2 = 2^2 = 4$;

f) $2^{3-\log_2 3} = \frac{2^3}{2^{\log_2 3}} = \frac{8}{3}$;

g) $5^{3-\log_5 4} = \frac{5^3}{5^{\log_5 4}} = \frac{125}{4}$;

h) $10^{1-\lg 3} = \frac{10}{10^{\lg 3}} = \frac{10}{3}$;

i) $16^{\log_4 5} = \left(4^2\right)^{\log_4 5} = \left(4^{\log_4 5}\right)^2 = 5^2 = 25$;

j) $\sqrt{7}^{\log_{49} 2} = \sqrt[4]{\left[\left(\sqrt{7}\right)^4\right]^{\log_{49} 2}} = \sqrt[4]{49^{\log_{49} 2}} = \sqrt[4]{2}$;

k) $16^{\log_2 3} = \left(2^4\right)^{\log_2 3} = \left(2^{\log_2 3}\right)^4 = 3^4 = 81$;

l) $64^{\log_{\sqrt{2}} 2} = \left(\sqrt{2}^{12}\right)^{\log_{\sqrt{2}} 2} = \left(\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 2}\right)^{12} = 2^{12} = 4096$;

m) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5} = \left(2^{-3}\right)^{\log_2 5} = \left(2^{\log_2 5}\right)^{-3} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$;

n) $\frac{1}{10^{\lg 2}} + 2^2 \cdot 2^{\log_4 9} = \frac{1}{2} + 4\sqrt{4^{\log_4 9}} = \frac{1}{2} + 4\sqrt{9} = \frac{1}{2} + 12 = \frac{25}{2}$;

o) $\frac{\left(2^3\right)^{\log_4 3}}{\left(2^3\right)^{\log_2 3}} = \frac{\left(2^{\log_4 3}\right)^3}{\left(2^{\log_2 3}\right)^3} = \frac{\left(\sqrt{4^{\log_4 3}}\right)^3}{3^3} = \frac{\sqrt{3}^3}{27} = \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{9}$;

p) $\frac{8^{\log_{64} 9}}{8^{\log_{\sqrt{8}} 5}} = \frac{\sqrt{64^{\log_{64} 9}}}{\left(\sqrt{8}^{\log_{\sqrt{8}} 5}\right)^2} = \frac{\sqrt{9}}{5^2} = \frac{3}{25}$;

q) $\sqrt{10^{6+\lg 36}} = \sqrt{10^6} \cdot \sqrt{10^{\lg 36}} = 10^3 \cdot \sqrt{36} = 6000$;

r) $19 \cdot 19^{\frac{1}{2}\log_{19} 36} = 19 \cdot \left(19^{\log_{19} 36}\right)^{\frac{1}{2}} = 19 \cdot 36^{\frac{1}{2}} = 19\sqrt{36} = 114$;

s) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{10^3} = 20$;

t) $\left(5^2\right)^{\log_5 2} \cdot 25 = \left(5^{\log_5 2}\right)^2 \cdot 25 = 4 \cdot 25 = 100$;

u) Az értelmezési tartományon: $\frac{\sqrt[3]{p^9}}{\sqrt[3]{p^{\log_p 8}}} = \frac{p^3}{2}$;

v) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^{\log_2 5}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(2^{\log_2 5}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$;

w) $\frac{1}{10^{\lg 2}} + \sqrt{9}^{\log_9 16} - \left(3^{\log_3 2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(9^{\log_9 16}\right)^{\frac{1}{2}} - 2^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{16} - 4 = \frac{1}{2}$.

5212 *a)* $\left(16^{\log_2 3}\right)^{15} = 81^{15} = 3^{60} = \underline{9^{30}}$ $\boxed{<}$ $4^{15} \cdot 5^{30} = \underline{10^{30}}$;

b) $(\log_8 2)^{60} = \left(\frac{1}{3}\right)^{60} = \underline{3^{-60}}$ $\boxed{=}$ $32^{-12\cdot\log_2 3} = 2^{-60\cdot\log_2 3} = \underline{3^{-60}}$;

c) $7 \cdot (\lg 2 - \lg 5) = 7 \cdot \lg\left(\frac{2}{5}\right) = \underline{\lg\left(\frac{2^7}{5^7}\right)}$ $\boxed{<}$ $\lg 128 + \lg 5^{-5} = \lg\left(2^7 \cdot 5^{-5}\right) = \underline{\lg\left(\frac{2^7}{5^5}\right)}$;



d) $\sqrt{48}=4\sqrt{3}=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=\underline{\sqrt{12}+2\sqrt{3}}\ \boxed{<}\ -\dfrac{5}{\sqrt{12}-\sqrt{17}}=\sqrt{17}+\sqrt{12}=\underline{\sqrt{17}+2\sqrt{3}}$;

e) a bal oldal: $\dfrac{60}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{60\cdot\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{18-3}=12\sqrt{2}+4\sqrt{3}=\underline{7\sqrt{2}+5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}$,

a jobb oldal: $\dfrac{50}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{50\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{12-2}=10\sqrt{3}+5\sqrt{2}=\underline{6\sqrt{3}+5\sqrt{2}+4\sqrt{3}}$, ez a nagyobb;

f) $\dfrac{1}{2^{10}}+\dfrac{1}{3^5\cdot 2^9}=\dfrac{245}{2^{10}\cdot 3^5}=\underline{\dfrac{490}{2^{11}\cdot 3^5}}\ \boxed{<}\ \dfrac{1}{3^4\cdot 2^3}-\dfrac{1}{2^{11}\cdot 3^4}=\dfrac{255}{2^{11}\cdot 3^4}=\underline{\dfrac{765}{2^{11}\cdot 3^5}}$;

g) $\dfrac{10^{-6}:10^{10}}{10^3:10^4}=\dfrac{10^{-16}}{10^{-1}}=\underline{10^{-15}}\ \boxed{>}\ \dfrac{1}{\dfrac{1}{10^{-3}\cdot 10^{-20}}}=\underline{10^{-23}}$.

5213 *a)* $3{,}5\cdot 10^{-1}$; *b)* $2{,}79\cdot 10^3$.

5214 *a)* $\dfrac{\sqrt{a}\left(2\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}{\left(2\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(2\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}\cdot\dfrac{3\left(2\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)}{2\sqrt{a}}=\dfrac{3}{2}$; *b)* $\dfrac{5}{5\left(\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)}{10\left(\sqrt{x}-3\sqrt{y}\right)}=\dfrac{1}{10}$;

c) $\dfrac{\left(\sqrt{x}-5\right)\left(\sqrt{x}+6\right)}{\left(\sqrt{x}+5\right)\left(\sqrt{x}-5\right)}:\dfrac{2\sqrt{x}+12}{\sqrt{x}+5}=\dfrac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+5}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+5}{2\left(\sqrt{x}+6\right)}=\dfrac{1}{2}$.

5215 *a)* A teljes lakosság éves energiaszükséglete $8{,}5\cdot 10^{15}$ J, ennek 1%-a: $8{,}5\cdot 10^{13}$ J. Egy turbina 365 nap alatt $40000\cdot 9\cdot 3600\cdot 365=4{,}73\cdot 10^{11}$ J energiát ad. A két érték hányadosa: 179,7, tehát 180 szélturbina megépítésére van szükség.

b) A teljes lakosság éves energiaszükséglete $8{,}5\cdot 10^{15}$ J, ennek 82%-a: $6{,}97\cdot 10^{15}$ J.

Mivel egy 1 m^2 területű napkollektor $1800\cdot 0{,}70=1260$ W teljesítményt nyújt, ezért 365 nap alatt $1260\cdot 11\cdot 3600\cdot 365=1{,}82\cdot 10^{10}$ J energiát ad. A két érték hányadosa: $3{,}83\cdot 10^5$ m^2, tehát ekkora területű napkollektorokra van szükség. ($3{,}83\cdot 10^5$ m^2 $=0{,}383$ km^2.)

5216 Az $1\,000\,000=100\,000\cdot 1{,}06^x$ egyenlet megoldása: $x=\dfrac{1}{\lg 1{,}06}\approx 39{,}5$. A gyermek 40 éves korára éri el a betét az 1 000 000 forintot.

5217 Átírva 10-es alapú logaritmusra:

$$\frac{\lg 3}{\lg 2}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 4}\cdot\ldots\cdot\frac{\lg(n+1)}{\lg n}=7,$$

egyszerűsítések után: $\dfrac{\lg(n+1)}{\lg 2}=7$, amiből $\lg(n+1)=\lg 2^7$, tehát $n=127$.

5218 Írjuk át a gyököket törtkitevős hatványra, majd alkalmazzuk a logaritmus azonosságait:

$$\log_{\frac{1}{5}}\log_5\sqrt[5^n]{\sqrt[5^{n-1}]{\ldots\sqrt[25]{\sqrt[5]{5}}}}=\log_{\frac{1}{5}}\log_5\left[\left(\left(\left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{25}}\ldots\right)\right)^{\frac{1}{5^{n-1}}}\right]^{\frac{1}{5^n}}=\log_{\frac{1}{5}}\log_5 5^{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{25}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{5^{n-1}}\cdot\frac{1}{5^n}}=$$

$$=\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{25}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{5^{n-1}}\cdot\frac{1}{5^n}\right)=\log_{\frac{1}{5}}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]=1+2+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$



Műveletek racionális kifejezésekkel – megoldások

5219 *a)* $f(x) = -30x - 34$, behelyettesítve: $f\left(-\frac{7}{3}\right) = 36$;

b) $f(x) = -24x + 120$, behelyettesítve: $f\left(-\frac{7}{3}\right) = 176$;

c) $f(x) = 102x + 5$, behelyettesítve: $f\left(-\frac{7}{3}\right) = -233$.

5220 *a)* Igaz, mert $16a^2 - 24ab + 9b^2 = (4a - 3b)^2$.

b) Nem, mert $4a - 3b = -5$ is lehet.

5221 *a)* $(7 - 5a)(7 + 5a)$;
b) $b(10b + 9)(10b - 9)$;
c) $(c - 12)^2$;
d) $(20 - d)^2$;
e) $5(e - 6)^2$;
f) $f(7 - 4f)^2$.

5222 *a)* $\left(6p^2 + q^2\right)^2$;
b) $(p - q)^2$ vagy $(q - p)^2$;
c) $-(p + 1)^2$;
d) $-(a + 3)^2$;
e) $3a(b + 1)^2$;
f) $(a - 2b)^3$;
g) $(9m + z)(-m - 9z)$;
h) $(m + z - p)(m + z + p)$;
i) $-2m^3z^3(z + 2m)$;
j) $(b - m)(a + k)$;
k) $(m - k)(5a + 1)$.

5223 *a)* $(a - 3)(a + 7)$;
b) $(2b + 5)(b + 3)$;
c) $(4c - 1)(5c - 2)$;
d) $d(6d + 7)(7d + 6)$.

5224 Használjuk a gyöktényezős összefüggést: $a(x - x_1)(x - x_2)$.

a) $\dfrac{2\left(a + \frac{3}{2}\right)\cdot(a + 2)}{-2\left(a + \frac{3}{2}\right)\cdot(a - 4)} = \dfrac{a + 2}{4 - a}$;
b) $\dfrac{(b - 7)\cdot(b - 2)}{6(b + 1)\cdot(b - 2)} = \dfrac{b - 7}{6(b + 1)}$.

5225 *a)* Értelmezés: $a \neq 0$, egyszerűsítés után: $a - 4$;

b) Értelmezés: $b \neq 2$, egyszerűsítés után: $2b$;

c) Értelmezés: $c \neq 4$, egyszerűsítés után: c^3;

d) Értelmezés: $d \neq -7$, egyszerűsítés után: $d - 7$;

e) Értelmezés: $e \neq 12$ és $e \neq -12$, egyszerűsítés után: $\dfrac{1}{e + 12}$;

f) Értelmezés: $f \neq 10$, egyszerűsítés után: $\dfrac{f}{f - 10}$;

g) Értelmezés: $g \neq -6$, egyszerűsítés után: $\dfrac{g - 6}{g + 6}$.

5226 $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - 2x\cdot\dfrac{1}{x} = 47$.



5227

	Értelmezési tartomány	A művelet eredménye
a)	$a \in \mathbb{R},\quad a \neq -\frac{1}{3},\quad a \neq \frac{1}{3}$	$\frac{a}{3a-1}$
b)	$b \in \mathbb{R},\quad b \neq -\frac{3}{2},\quad b \neq 0,\quad b \neq \frac{3}{2}$	$\frac{2b+3}{5b}$
c)	$c \in \mathbb{R},\quad c \neq -5,\quad c \neq 0,\quad c \neq 5$	1
d)	$d \in \mathbb{R},\quad d \neq -2,\quad d \neq 0$	$d-2$
e)	$e \in \mathbb{R},\quad e \neq -3,\quad e \neq -2,\quad e \neq -\frac{3}{2},\quad e \neq 0,\quad e \neq \frac{4}{3}$	$\frac{(e-1)\cdot(e+2)}{e^2\cdot(e+3)}$
f)	$f \in \mathbb{R},\quad f \neq -\frac{1}{2},\quad f \neq 4$	$3\cdot\left(\frac{2f+1}{f-4}\right)^2$
g)	$g \in \mathbb{R},\quad g \neq 3,\quad g \neq -3,\quad g \neq 0,\quad g \neq 5,\quad g \neq -5$	$\frac{g^2}{(g+3)(g-5)}$
h)	$g, h \in \mathbb{R},\quad g, h \neq 0,\quad h \neq -g$	$\frac{g-h}{2}$
i)	$i \in \mathbb{R},\quad i \neq -3,\quad i \neq -\frac{3}{4}$	$\frac{2(i+3)}{3(i^2-3i+9)}$
j)	$i, j \in \mathbb{R},\quad i \neq -j$	$\frac{5(i-j)}{4(i+j)}$

5228

	Értelmezési tartomány	A művelet eredménye
a)	$x \in \mathbb{R},\quad x \neq -\frac{3}{2},\quad x \neq \frac{3}{2}$	$\frac{6}{9-4x^2}$
b)	$x \in \mathbb{R},\quad x \neq -2,\quad x \neq 2$	$\frac{8x}{4-x^2}$
c)	$a \in \mathbb{R},\quad a \neq \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
d)	$b \in \mathbb{R},\quad b \neq -\frac{5}{2}$	$\frac{b}{10b+25}$
e)	$c \in \mathbb{R},\quad c \neq -6,\quad c \neq 6$	$\frac{2}{c-6}$



	Értelmezési tartomány	A művelet eredménye
f)	$d \in \mathbb{R},\quad d \neq -10,\quad d \neq 10$	-1
g)	$e \in \mathbb{R},\quad e \neq -3,\quad e \neq 3$	$\frac{5\left(e+\frac{16}{5}\right)(e-3)}{2(e+3)(e-3)} = \frac{5e+16}{2e+6}$
h)	$f \in \mathbb{R},\quad f \neq -3$	$\frac{-5}{(f+3)^2}$
i)	$g \in \mathbb{R},\quad g \neq -5,\quad g \neq 2$	$\frac{1}{2-g}$
j)	$j \in \mathbb{R},\quad j \neq -2,\quad j \neq 2$	$\frac{j^2-20j+8}{(2-j)^2\cdot(2+j)}$

5229 *a)* $\frac{9a^2-4b^2}{30a+20b} = \frac{(3a+2b)(3a-2b)}{10(3a+2b)} = \frac{1}{2}$;

b) $\frac{15a^3}{9a^5-12a^4b+4a^3b^2} = \frac{15a^3}{a^3\cdot\left(9a^2-12\cdot ab+4b^2\right)} = \frac{15a^3}{a^3\cdot(3a-2b)^2} = \frac{3}{5}$.

5230 *a)* $\frac{16-2x}{(2-x)(2+x)} = -\frac{6}{21} = -\frac{2}{7}$; *b)* $\frac{6x-2}{5x-2} = \frac{28}{23}$.

5231 Ha $a+b+c=0$, akkor $c=-a-b$. Írjuk ezt be a kifejezésbe:

$$a^3+a^2\cdot(-a-b)-ab(-a-b)+b^2\cdot(-a-b)+b^3 =$$
$$= a^3-a^3-a^2b+a^2b+ab^2-ab^2-b^3+b^3 = 0.$$

5232 A feltételből: $x^2z+y^2z=y^2x+z^2x$, átrendezve: $xz(x-z)=y^2\cdot(x-z)$, mivel $x\neq z$, ezért $xz=y^2$, ami annyit jelent, hogy $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$.

5233 Alakítsuk át a kifejezést:

$$\left(\frac{k}{3}-\frac{9}{k^2}\right):\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{k^2}+\frac{1}{k}\right) = \frac{k^3-27}{3k^2}:\frac{k^2+9+3k}{3k^2} = \frac{k^3-27}{k^2+3k+9} = \frac{(k-3)(k^2+3k+9)}{k^2+3k+9} = k-3,$$

ezért ha $k\in\mathbb{Z}^+ \;\Rightarrow\; (k-3)\in\mathbb{Z}$.

Egyenletek, egyenlőtlenségek – megoldások

5234 *a)* $x=26$; *b)* $x=65$; *c)* $x=\frac{27}{11}$; *d)* nincs megoldás;

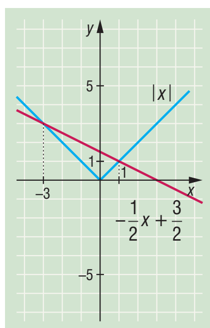
e) $x=\frac{6}{25}$; *f)* $x=\frac{3}{8}$; *g)* -22; *h)* $\frac{25}{12}$;

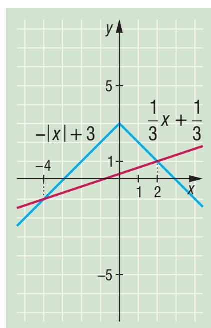


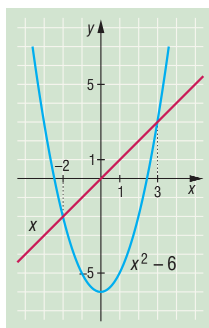
i) $x_1 = 0$ vagy $x_2 = -1$ vagy $x_3 = \frac{2}{3}$ vagy $x_4 = 4$; *j)* $x = \frac{16}{25}$;

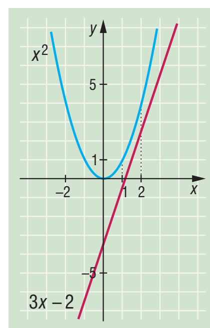
k) $x_1 = -4$ vagy $x_2 = -2$; *l)* $x \neq 15$; $x_1 = 0$ vagy $x_2 = -7$ vagy $x_3 = \frac{1}{2}$.

5235 *a)* $x_1 = -3$, $x_2 = 1$; *b)* $x_1 = -4$, $x_2 = 2$; *c)* $x_1 = -2$, $x_2 = 3$; *d)* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.









5236 *a)* $x_1 = -3$, $x_2 = 4$; *b)* $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{6}{5}$; *c)* $x_1 = \frac{68}{21}$, $x_2 = \frac{46}{21}$.

5237 *a)* $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{5}{7}$;

b) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = -1$;

c) $x_1 = \frac{11}{10}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$;

d) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{7}{5}$;

e) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$; $x_1 = 7$, $x_2 = 3$;

f) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$; $x_1 = 0$, $x_2 = -4$;

g) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; $x_1 = 2$, $x_2 = -6$;

h) $x_1 = 0$, $x_2 = 9$;

i) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{4}$;

j) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$;

k) $x_1 = 0$, $x_2 = -10$;

l) $x_1 = 2$, $x_2 = -4$;

m) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$; azonosság;

n) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$; $x = 5$;

o) az egyenlet alaphalmaza: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

5238 *a)* Például: $x^2 - 2x - 15 = 0$;

b) például: $15x^2 + 7x - 2 = 0$;

c) a két gyök 2 és 8, tehát például: $x^2 - 10x + 16 = 0$;

d) a másik gyök: $x_2 = 3 + \sqrt{7}$, tehát például: $x^2 - 6x + 2 = 0$.



5239

	Az egyenlet			Az egyenlet	
	alaphalmaza	megoldása		alaphalmaza	megoldása
a)	$x \geq \frac{3}{5}$	$x = \frac{7}{5}$	*b)*	$x \leq \frac{8}{3}$	$x = -\frac{8}{3}$
c)	$x < 0$ vagy $x \geq \frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{7}$	*d)*	$\varnothing$	nincs
e)	$x \geq \frac{5}{7}$	$x = 4$	*f)*	$x \geq \frac{1}{2}$	nincs
g)	$x \in \mathbb{R}$	$x_1 = 6, \quad x_2 = -6$	*h)*	$x \geq \frac{3}{8}$	$x = \frac{5}{8}$
i)	$x \in \mathbb{R}$	$x = -4$	*j)*	$\varnothing$	nincs
k)	$x \leq 20$	$x = 20$	*l)*	$x \in \mathbb{R}$	$x = -2$ és $y = -\frac{2}{3}$
m)	$y \geq 1$	$x = \frac{5}{3}$	*n)*	$-5 \leq x \leq 5$	$x = 4$

5240 *a)* $x = 5$; *b)* $x = \frac{11}{4}$; *c)* $x = \frac{18}{13}$; *d)* 26; *e)* $x = \frac{2}{5}$; *f)* $x = 3$; *g)* $x = 1$; *h)* $x = \frac{9}{2}$; *i)* $x = \frac{16}{5}$; *j)* $x = -3$; *k)* $x = -\frac{1}{6}$; *l)* $x = 4$; *m)* $x = \frac{7}{2}$.

5241

	Az egyenlet		
	alaphalmaza	kapott gyök(ök)	megoldása
a)	$x > -\frac{1}{2}$	$x = 40$	$x = 40$
b)	$x > -\frac{1}{4}$	$x = -\frac{1}{5}$	$x = -\frac{1}{5}$
c)	$\varnothing$	nincs	nincs
d)	$x > 4$	$x > 4$	$x > 4$
e)	$x > \frac{1}{2}, \quad x \neq 1$	$x = 3$	$x = 3$

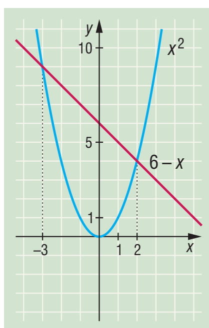


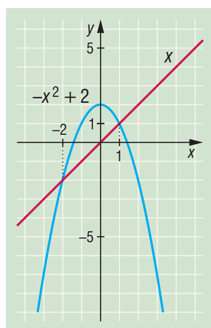
	Az egyenlet		
	alaphalmaza	**kapott gyök(ök)**	**megoldása**
f)	$x > 2, \quad x \neq 3$	$x_1 = 0, \quad x_2 = 5$	$x = 5$
g)	$x > \frac{2}{3}$	$x_1 = 2, \quad x_2 = 1$	$x_1 = 2, \quad x_2 = 1$
h)	$x > 4$	$x_1 = 7, \quad x_2 = -1$	$x = 7$
i)	$x > \frac{2}{7}$	$x = 6$	$x = 6$

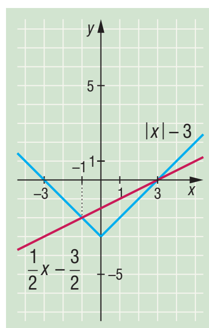
5242 *a)* $x_1 = \frac{4\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{3}$; *b)* $x_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{4\pi}{3}$; *c)* $x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}$;

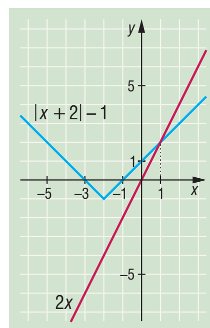
d) $x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{7\pi}{6}$; *e)* $x_1 = \frac{\pi}{32}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{32}$; *f)* $x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{7\pi}{30}$.

5243 *a)* $x \leq -3$ vagy $2 \leq x$; *b)* $-2 \leq x \leq 1$; ***c)*** $-1 < x < 3$; ***d)*** $x \leq 1$.









5244 *a)* $[-2; \infty[$; *b)* $\left]-\infty; -\frac{11}{9}\right]$; *c)* $\left]\frac{19}{4}; \infty\right[$;

d) $\left]-\infty; -\frac{13}{8}\right[$; *e)* $\left]-\infty; \frac{1}{6}\right[$; *f)* $\left]-\frac{7}{13}; \infty\right[$;

g) $]-1; 4[$; ***h)*** $\left]-\infty; -\frac{8}{7}\right] \cup \left[\frac{10}{7}; \infty\right[$.

5245 *a)* $x \geq \frac{11}{3}$; *b)* $x > -\frac{2}{5}$; *c)* $x \leq \frac{17}{8}$;

d) $x < -\frac{3}{2}$; *e)* $x \leq \frac{5}{2}$; *f)* $x > \frac{2}{3}$;

g) $-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$; *h)* $x \geq -2$; *i)* $x < 1$.



5246

	Az egyenlőtlenség			Az egyenlőtlenség	
	alaphalmaza	megoldása		alaphalmaza	megoldása
a)	$x>0$	$x\ge 10\,000$	*b)*	$x>0$	$x>\frac{1}{5}$
c)	$x>0$	$0<x\le\sqrt{7}$	*d)*	$x<10$	$x<9{,}5$
e)	$x<-5$ vagy $x>5$	$x\ge\sqrt{26}$ vagy $x\le-\sqrt{26}$	*f)*	$x>\frac{3}{5}$	$x\ge 6$
g)	$x>\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}<x<\frac{6}{5}$	*h)*	$x>\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}<x\le\frac{6}{5}$
i)	$x<-3$ vagy $x>3$	$-2<x<-\sqrt{3}$ vagy $\sqrt{3}<x<2$			

5247 *a)* Eredetileg 36 darabot vitt ki a piacra.
b) 5 darabot adott Mari néninek.

5248 A gondolt szám legyen x. Ekkor a kapott számok: $8+x$, $5+x$, $3+x$. A gondolt szám az 1.

5249 A $3x+5x=200$ egyenlet alapján a számok: 75 és 125.

5250 A $7(x-6)=4x-6$ egyenlet alapján a fiú 12 éves, az apa pedig 48.

5251 A táblázat segítségével a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\left.\begin{aligned} x-4&=6(y-4)\\ x+5&=3(y+5)\end{aligned}\right\},$$

amiből kapjuk, hogy $x=40$ és $y=10$.
Tehát Szonja most 10 éves, az anyukája pedig 40.

Időpont	Anya	Szonja
4 éve	$x-4$	$y-4$
most	x	y
5 év múlva	$x+5$	$y+5$

5252 *a)* 4 évvel ezelőtt volt Móricka anyukája 4-szer annyi idős, mint ő (mert ekkor ő 8, anyukája pedig 32 éves volt).
b) 12 év múlva lesz Móricka anyukája 2-szer annyi idős, mint a fia. Ekkor életkoruk 24 és 48 év lesz.

5253 Ha a számjegyek x és $10-x$, a $10x+(10-x)-72=10(10-x)+x$ egyenlet alapján a keresett szám 91.

5254 A gondolt szám a 63.

5255 A $31x+12=32(x-1)-4$ egyenlet megoldásából: 48 sort jelölt ki, és 1500 facsemetét fog elültetni.

5256 Ha a számok $x+100$ és x, akkor a $4=\dfrac{x+100-4}{x}$ egyenlet alapján a két szám 132 és 32.

5257 48 nap alatt végez 5 munkás napi 3 óra munkával.

5258 Még 5 órát kell Andrásnak egyedül dolgoznia.

5259 2 g szükséges a 92%-os kénsavból.



5260 *a)* 17 órakor találkoznak.

b) Bálint 8 km-t, Gábor 4 km-t tett meg a találkozásukig.

5261 *a)* Mivel a tehervonat 5 órakor indult, és 4 óra 48 percet töltött úton, 9 óra 48 perckor érte utol az IC, mert az 8 órakor indult, de csak 1 óra 48 percet töltött úton.

b) 144 km-t tettek meg találkozásukig.

5262 Ha tegnap x km-t futott: $x-7=\frac{x+3}{3}$, amiből adódik, hogy tegnap 12 km-t, ma 15 km-t futott.

5263 *a)* Az $\frac{x}{5}+\frac{x}{8}=1$ egyenlet megoldása: $x=\frac{40}{13}$. Körülbelül 9 óra 5 perckor végeznek.

b) Az $\frac{1,5}{8}+\frac{x}{5}=1$ egyenlet megoldása: $x=\frac{32,5}{8}$. Körülbelül 10 óra 4 perckor végez az újabb gép a takarítással.

c) Az $\frac{2}{5}+\frac{x}{8}=1$ egyenlet megoldása: $x=4,8$. Pontosan 10 óra 48 perckor végeznek.

5264 *a)* 40 km.

b) A kerékpárosoknak elég délután fél háromkor elindulni.

5265 *a)* Az $52x=28(x+3)$ egyenlet megoldásából: 3,5 liter alkoholra van szükség. (➡)

b) Az $52\cdot 3=(x+3)\cdot 30$ egyenlet megoldásából: 2,2 liter tiszta víz kell.

c) Az $52x=3\cdot 28$ egyenlet megoldásából: 1,62 liter alkohol és 1,38 liter víz összekeverése lesz megfelelő.

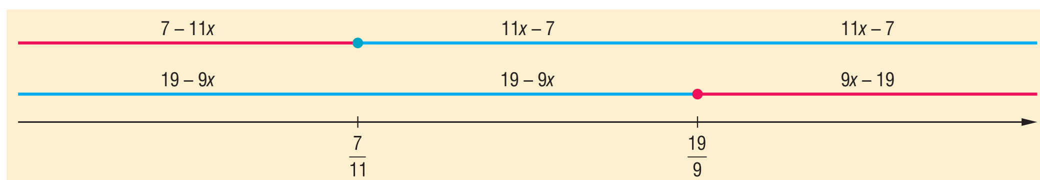
	%	Liter	Σ
Alkohol	52	x	$52x$
Víz	0	3	0
Keverék	28	$x+3$	$28(x+3)$

5266 Csak az lehet, hogy az alap $3x$, a szár $7x$, ekkor a kerület $17x=221$. Innen a háromszög alapja 39 cm, a szára 91 cm.

5267 *a)* Az abszolút érték értelmezése alapján:

$$|11x-7|=\begin{cases}11x-7, & \text{ha} \quad 11x-7\ge 0, \quad \text{azaz} \quad x\ge \frac{7}{11},\\ 7-11x, & \text{ha} \quad 11x-7<0, \quad \text{azaz} \quad x<\frac{7}{11};\end{cases}$$

$$|19-9x|=\begin{cases}19-9x, & \text{ha} \quad 19-9x\ge 0, \quad \text{azaz} \quad \frac{19}{9}>x,\\ 9x-19, & \text{ha} \quad 19-9x<0, \quad \text{azaz} \quad \frac{19}{9}\le x.\end{cases}$$





Ha $x < \frac{7}{11}$, akkor $7 - 11x = 19 - 9x \Rightarrow x = -6$;

Ha $\frac{7}{11} \le x < \frac{19}{9}$, akkor $11x - 7 = 19 - 9x \Rightarrow x = 1{,}3$;

Ha $x \ge \frac{19}{9}$, akkor $11x - 7 = 9x - 19 \Rightarrow x = -6$, ami nem felel meg a feltételnek.

Az egyenlet megoldása: $x_1 = -6$, $x_2 = 1{,}3$.

	A vizsgált tartomány	**Az egyenlet**	
		alakja, gyöke	**megoldása**
b)	$x < -\frac{26}{3}$	$14 - 3x = -3x - 26$, nincs gyök	nincs
	$-\frac{26}{3} \le x < \frac{14}{3}$	$14 - 3x = 3x + 26 \Rightarrow x = -2$	$x = -2$
	$x \ge \frac{14}{3}$	$3x - 14 = 3x + 26$, nincs gyök	nincs
c)	$x \ge -\frac{13}{5}$	$5x + 13 = \frac{x+65}{5} \Rightarrow x = 0$	$x_1 = 0$
	$x < -\frac{13}{5}$	$-5x - 13 = \frac{x+65}{5} \Rightarrow x = -5$	$x_2 = -5$
d)	$x \ge \frac{3}{2}$	$2x - 3 = -9 - 8x \Rightarrow x = -0{,}6$	nincs
	$x < \frac{3}{2}$	$-2x + 3 = -9 - 8x \Rightarrow x = -2$	$x = -2$
e)	$x \ge \frac{11}{4}$	$4x - 11 = 2x - 7 \Rightarrow x = 2$	nincs
	$x < \frac{11}{4}$	$-4x + 11 = 2x - 7 \Rightarrow x = 3$	nincs
f)	$x < -\frac{1}{3}$	$-x + 2 - 3x - 1 = 5 \Rightarrow x = -1$	$x_1 = -1$
	$-\frac{1}{3} \le x < 2$	$-x + 2 + 3x + 1 = 5 \Rightarrow x = 1$	$x_2 = 1$
	$2 \le x$	$x - 2 + 3x + 1 = 5 \Rightarrow x = 1{,}5$	nincs



	A vizsgált tartomány	Az egyenlet alakja, gyöke	Az egyenlet megoldása
g)	$x < -2$	$-x - 2 + 5 - x = 10 \Rightarrow x = -3{,}5$	$x_1 = -3{,}5$
	$-2 \le x < 5$	$x + 2 + 5 - x = 10$, nincs gyök	nincs
	$x \ge 5$	$x + 2 + x - 5 = 10 \Rightarrow x = 6{,}5$	$x_2 = 6{,}5$
h)	$x < 3$	$3 - x - (4 - x) = 2x + 1 \Rightarrow x = -1$	$x = -1$
	$3 \le x < 4$	$x - 3 - (4 - x) = 2x + 1$, nincs gyök	nincs
	$x \ge 4$	$x - 3 - (x - 4) = 2x + 1 \Rightarrow x = 0$	nincs
i)	$x \ge 0$	$5x + 13 = \frac{x + 65}{5} \Rightarrow x = 0$	$x = 0$
	$x < 0$	$5x + 13 = \frac{-x + 65}{5} \Rightarrow x = 0$	nincs
j)	$x \ge 0$	$5x + 13 = \frac{x + 89}{5} \Rightarrow x = 1$	$x = 1$
	$x < 0$	$5x + 13 = \frac{-x + 89}{5} \Rightarrow x = \frac{12}{13}$	nincs
k)	$x < 0$	$3(5 - x) + (-x) = 25 \Rightarrow x = -2{,}5$	$x_1 = -2{,}5$
	$0 \le x < 5$	$3(5 - x) + x = 25 \Rightarrow x = -5$	nincs
	$x \ge 5$	$3(x - 5) + x = 25 \Rightarrow x = 10$	$x_2 = 10$
l)	$\lvert x - 1 \rvert - 6 = 5$	$\lvert x - 1 \rvert = 11 \Rightarrow x = 12$ vagy $x = -10$	$x_1 = 12$, $x_2 = -10$
	$\lvert x - 1 \rvert - 6 = -5$	$\lvert x - 1 \rvert = 1 \Rightarrow x = 2$ vagy $x = 0$	$x_3 = 2$, $x_4 = 0$



5268 *a)* Behelyettesítve x értékét, a $2a^2 - 16a + 24 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek megoldásai: $a_1 = 2,\ a_2 = 6$.

b) Az egyenlet diszkriminánsa: $D = 9a^2 - 4(2a^2 - a - 1) = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2 \ge 0$. Tehát minden valós paraméter érték esetén lesz valós megoldása az egyenletnek.

5269 *a)* Egy oldalra rendezve és kiemelve: $(x + 1)[2(2x + 1)(2x + 3) - (x + 2)(x + 3)] = 0$.

Ebből $(x + 1)(7x^2 + 11x) = 0$, megoldásai: $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -\frac{11}{7}$.

b) Az egyenlet alaphalmaza: $x \le -8$ vagy $x \ge 4$.

Megoldások: $x_1 = -8,\ x_2 = 4$, illetve az $x^2 - 3x - 10 = 0$ egyenletből: $x_3 = 5$ (az $x_4 = -2$ nem felel meg a feltételeknek).

c) Az $x - 2 = a$ jelölést bevezetve az $a^2 - 5a + 6 = 0$ egyenlethez jutunk, melynek gyökei: $a_1 = 3$, $a_2 = 2$. Ebből: $x_1 = 5,\ x_2 = 4$.

d) A *c)* feladathoz hasonlóan az $x^2 + x = a$ jelölést bevezetve: $a^2 - 2a - 24 = 0$. Ennek gyökei: $a_1 = 6,\ a_2 = -4$. Ebből:

vagy $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -3$,

vagy $x^2 + x + 4 = 0$, nincs megoldás.

e) Az $x^2 + x + 1 = a$ jelölést bevezetve: $a(a + 1) - 30 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 30 = 0$. Az egyenlet gyökei: $a_1 = 5,\ a_2 = -6$, amiből:

vagy $x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$,

vagy $x^2 + x + 7 = 0$, nincs megoldás.

5270 *a)* Az $\frac{n(n-3)}{2} = 252$ egyenlet megoldásai: $n_1 = 24,\ n_2 = -21$. A sokszögnek 24 oldala van.

b) Az $\frac{n(n-3)}{2} = n + 250$ egyenlet megoldásai: $n_1 = 25,\ n_2 = -20$. A sokszögnek 25 oldala van.

c) Az $\frac{n(n-1)}{2} = 465$ egyenlet megoldásai: $n_1 = 31,\ n_2 = -30$. A sokszögnek 31 oldala van.

5271

	A vizsgált tartomány	**Az egyenlet**	
		átrendezésének módja, gyöke	**megoldása**
a)	$x \ge -\frac{3}{2}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 3,\ \ x_2 = -1$	$x = 3$
b)	$x \le \frac{4}{5}$	négyzetre emelés után: $x_1 = -1,\ \ x_2 = \frac{4}{9}$	$x = \frac{4}{9}$
c)	$x \ge \frac{4}{13}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 8,\ \ x_2 = 1$	$x_1 = 8,\ \ x_2 = 1$
d)	$x \ge -\frac{9}{7}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 0,\ \ x_2 = 4{,}75$	$x = 4{,}75$
e)	$x \ge \frac{7}{4}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 4,\ \ x_2 = 2$	nincs



	A vizsgált tartomány	Az egyenlet átrendezésének módja, gyöke	Az egyenlet megoldása
f)	$x \geq -\frac{1}{8}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$	$x = 0$
g)	$x > 3$	beszorzás és négyzetre emelés után: $x_1 = 4$, $x_2 = 12$	$x = 12$
h)	$x \leq -3$ vagy $x \geq \frac{1}{2}$	négyzetre emelés után: $x_1 = 1$, $x_2 = -4$	$x = 1$
i)	$x \in \mathbb{R}$	a gyökvonások elvégzése után: $\lvert x-3\rvert + \lvert x+4\rvert = 11$, amiből $x_1 = -6$, $x_2 = 5$	$x_1 = -6$, $x_2 = 5$
j)	$x \geq 4$	két négyzetre emelés után: $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{13}{3}$	$x = 5$
k)	$x \geq 0$	átszorozva és rendezve: $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = -1$	nincs
l)	$x > 3$	beszorzás és rendezés után: $x_1 = 7$, $x_2 = -1$	$x = 7$
m)	$x \geq 0$	a $\sqrt{x} = a$ új változó bevezetésével: $x = 16$	$x = 16$
n)	$-5 < x \leq 4$	átszorzás és négyzetre emelés után: $x_1 = 3$, $x_2 = -4$	$x_1 = 3$, $x_2 = -4$

5272 *a)* $x = 0$;

b) $x = 4$;

c) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -4$;

d) $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = 3$;

e) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$;

f) $x_1 = 2$; $x_2 = -4$;

g) $x = \frac{1}{2}$;

h) $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{3}{2}$;

i) $x = \frac{1}{6}$;

j) $x = \frac{1}{3}$;

k) $x = 1$;

l) alaphalmaz: $x \geq 0$; $x_1 = 0$, $x_2 \approx 0{,}4$;

m) alaphalmaz: $x \geq 0$; $x_1 = \frac{1}{16}$, $x_2 = 0$;

n) $x = \frac{7}{2}$;

o) alaphalmaz: $x \geq -1$; $x = -\frac{8}{9}$;

p) $x = 2$.



5273 *a)* Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{7}{5}$. Az $\frac{5x-7}{3x+9} = 9$ egyenlet gyöke: $x = -4$, ez nem megoldás.

b) Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{1}{2}$. A $\frac{3x^2+8}{2x-1} = 5x+6$ egyenlet gyökei: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Csak az $x = 1$ megoldása az eredeti egyenletnek.

c) Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{3}{2}$. A $(2x+3)^2 = (4x+1)(2x-3)$ egyenlet gyökei: $x_1 = 6$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Csak az $x = 6$ megoldása az eredeti egyenletnek.

d) Az egyenlet alaphalmaza: $\frac{11}{3} < x < 14$. A $14 - x = \frac{(2x-4)^2}{3x-11}$ egyenlet gyökei: $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{34}{7}$. Mindkettő megoldása az eredeti egyenletnek.

e) Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{14}{9}$. A $(9x-14)(3x+10) = 100$ egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{20}{9}$, $x_2 = -4$. Csak az $x = \frac{20}{9}$ megoldása az eredeti egyenletnek.

f) Az egyenlet alaphalmaza: $x > -\frac{8}{23}$. A $\frac{23x+8}{(4x+4)^2} = \frac{1}{4}$ egyenlet gyökei: $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{1}{4}$. Mindkettő megoldása az eredeti egyenletnek.

g) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 0$. A $\lg x$-re másodfokú egyenletből $\lg x_1 = 3$, $\lg x_2 = -1$, a megoldások: $x_1 = 1000$, $x_2 = 0{,}1$.

h) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 0$, $x \neq 0{,}1$, $x \neq 10^5$. A $\lg x$-re másodfokú egyenletből $\lg x_1 = 3$, $\lg x_2 = 2$, a megoldások: $x_1 = 1000$, $x_2 = 100$.

i) Az egyenlet alaphalmaza: $x > -1$; $x \neq 0$. A logaritmus definíciója alapján $2x^2 + 1 = (x+1)^2$, aminek gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$. Csak az $x = 2$ megoldás.

j) Az egyenlet alaphalmaza: $x > \frac{1}{2}$, $x \neq 1$. A logaritmus azonosságait felhasználva kapjuk a $6x^2 - 23x - 35 = 0$ egyenletet, amelynek gyökei: $x_1 = 5$, $x_2 = -\frac{7}{6}$. Csak az $x = 5$ megoldás.

k) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 2$. A megoldás $x = 4$.

l) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 0$, $x \neq 1$. A megoldás $x = 2$.

m) Az egyenlet alaphalmaza: $x > -2$. A megoldás $x = 1$.

n) Az egyenlet alaphalmaza: $x > 4$. A megoldás $x = 8$.

5274 *a)* Az első egyenlet gyökei: $x_1 = 8$, $x_2 = 2$; a második egyenleté: $x_1 = 8$, $x_2 = -3$. Mindkét egyenletnek megoldása: $x = 8$.

b) Az első egyenlet értelmezési tartománya: $x > 0$, gyökei: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, de csak az első felel meg. A második egyenlet gyökei: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$. Mindkét egyenlet megoldása: $x = \frac{3}{2}$.

5275 *a)* $x_1 = \pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{2}$;

b) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2\pi}{3}$;

c) $x_1 = \frac{5\pi}{12}$, $x_2 = -\frac{7\pi}{12}$;

d) $x_1 = \frac{2\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$, $x_3 = -\frac{\pi}{3}$, $x_4 = -\frac{5\pi}{6}$;



e) $x_1 = \frac{\pi}{12}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4}$, $x_3 = \frac{3\pi}{4}$;

f) $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{18}$;

g) $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{5\pi}{12}$;

h) $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{9}$.

5276 *a)* $x_1 = -\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{2\pi}{9} + l \cdot \frac{2\pi}{3}$, $k, l \in \mathbb{Z}$;

b) $x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $x_2 = \frac{7\pi}{12} + l \cdot \frac{\pi}{2}$, $k, l \in \mathbb{Z}$;

c) $x = \frac{7\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

d) $x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

e) $x = \frac{7\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

f) $x_1 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$;

g) $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$;

h) $x = k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5277 *a)* A másodfokú egyenletből $\sin x = 1$, azaz $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
vagy $\sin x = -\frac{1}{2}$, amiből $x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

b) A másodfokú egyenletből $\cos x = \sqrt{3}$, aminek nincs megoldása;
vagy $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, amiből $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

c) Mivel $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, a másodfokú egyenletből $\cos x = 1$, azaz $x_1 = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
vagy $\cos x = \frac{1}{2}$, amiből $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

d) Mivel $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, a másodfokú egyenletből $\sin x = 4$, aminek nincs megoldása;
vagy $\sin x = \frac{1}{2}$, amiből $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

e) Az egyenlet alaphalmaza: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Beszorzás és szorzattá alakítás után $\sin x = 0$, amiből $x_1 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
vagy $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, amiből $x_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{4} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

f) Az egyenlet alaphalmaza: $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Beszorzás és szorzattá alakítás után $\sin x = 0$, amiből $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
vagy $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, amiből $x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

g) Az egyenlet alaphalmaza: $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Átszorzás és az $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ helyettesítés után $\cos^2 x - \cos x = 0$, amiből $\cos x \cdot (\cos x - 1) = 0$.
Ez két esetben teljesül: ha $\cos x = 0$ vagy $\cos x = 1$.
Ha $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, de az értelmezési tartomány miatt $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Ha $\cos x = 1 \Rightarrow x_2 = 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$.



h) A $\cos^3 x - \cos^2 x = 0$ egyenletből kiemeléssel kapjuk: $\cos^2 x \cdot (\cos x - 1) = 0$, ami teljesül, ha $\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ vagy $\cos x = 1 \Rightarrow x_2 = 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

i) Ha $\cos x \neq 0$, leoszthatunk vele, így:

$$\frac{1}{3} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{3} = \mathrm{tg}^2 x \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = |\mathrm{tg}\, x|,$$

ami csak akkor teljesül, ha $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ vagy $x_2 = \frac{5\pi}{6} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

Megjegyzés: Ha $\cos x = 0$, akkor $\sin x = 0$-nak is teljesülni kellene, ez pedig nem lehetséges.

j) Kéttényezős szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Ekkor $\cos x = 0$ vagy $\mathrm{tg}\, x = 0$. A $\mathrm{tg}\, x$ miatt az alaphalmaz: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Ha $\cos x = 0$, akkor $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, nem teljesülhet, ha $\mathrm{tg}\, x = 0$, akkor $x = l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$, ez jó megoldás.

k) Mivel $\cos x \neq 0$, mert ekkor $\sin x = 0$ kellene, hogy legyen, de ez nem lehetséges, ezért: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Osszuk el az egyenletet $\cos^2 x$-szel: $\mathrm{tg}^2 x + 3 \cdot \mathrm{tg}\, x - 4 = 0$ egyenletet kapjuk, amiből $\mathrm{tg}\, x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, vagy $\mathrm{tg}\, x = -4 \Rightarrow x_2 \approx -1{,}33 + l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$.

l) Az egyenlet alaphalmaza: $\mathrm{ctg}\, x$ miatt $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
A bal oldalon a $\mathrm{ctg}^2 x$, a jobb oldalon pedig a 3 kiemelése után: $\mathrm{ctg}^2 x(1 + \mathrm{ctg}\, x) = 3(1 + \mathrm{ctg}\, x)$.
Szorzattá alakítás után: $(\mathrm{ctg}^2 x - 3)(1 + \mathrm{ctg}\, x) = 0$. Ha a szorzat első tagja 0, akkor:

$$\mathrm{ctg}\, x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ és } x_2 = \frac{5\pi}{6} + l\pi,\ l \in \mathbb{Z};$$

ha a második tagja 0, akkor:

$$\mathrm{ctg}\, x = -1 \Rightarrow x_3 = -\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

5278 *a)* $x \in \left]3; +\infty\right]$;

b) $x \in \left]-\frac{1}{2}; \infty\right[$;

c) $x \in \left]-\frac{7}{2}; \frac{3}{5}\right[$;

d) $x \in \left]-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup \left]\frac{3}{8}; \infty\right[$;

e) $x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup \left]3; \infty\right[$;

f) $x \in \left[-10; \frac{3}{2}\right[$;

g) $x \in \left]-\infty; -9\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; \infty\right[$;

h) $x \in \left]-1; \frac{1}{3}\right[$.

5279 *a)* $x \in \left]-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{3}; \infty\right[$;

b) $x \in \left[\frac{6}{11}; \frac{4}{5}\right]$;

c) $x \in \left]-\infty; \frac{16}{7}\right]$;

d) $x \in \mathbb{R}$.



5280 *a)* $x \in \left]-\infty; -3\right[\cup \left]2; \infty\right[$; *b)* $x \in \left]-\frac{5}{3}; \frac{3}{2}\right[$;

c) $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{4}; \infty\right[$; *d)* $x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 3\right[$;

e) $x \in \left]-4; 1\right[$; *f)* $x \in \left]-2; -\frac{2}{3}\right] \cup \left]\frac{5}{2}; \infty\right[$;

g) $x \in \left[-\frac{5}{3}; -1\right[\cup \left]7; \infty\right[$; *h)* $x \in \left[-2; 0\right[\cup \left[6; \infty\right[$;

i) $x \in \left]-\infty; -4\right[\cup \left]-4; 4\right[$; *j)* $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[2; 3\right[\cup \left]5; \infty\right[$;

k) $x \in \left[-5; -3\right[\cup \left]4; 6\right]$; *l)* $x \in \left]-\infty; -3\right] \cup \left]-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \cup \left]5; \infty\right[$;

m) $x \in \left]-\infty; 1\right[\cup \left[\frac{7}{3}; 3\right[$; *n)* $x \in \left]-\infty; -4\right[\cup \left[-1; 1\right[\cup \left[2; \infty\right]$;

o) $x \in \left]1; \frac{5}{3}\right[\cup \left]2; 3\right[$;

5281 *a)* Az egyenlőtlenség megoldása: $-\frac{1}{4} < x < \frac{11}{3}$, a keresett halmaz: {0; 1; 2; 3}.

b) Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{3}{4} \le x \le 8$, a keresett halmaz: {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}.

5282 A $100 < \frac{n(n-3)}{2} < 200$ egyenlőtlenség-rendszer első része: $0 < n^2 - 3n - 200$, ennek megoldása: $n < -12{,}72$ vagy $n > 15{,}72$.

A második egyenlőtlenség: $n^2 - 3n - 400 < 0$, ennek megoldása: $-18{,}56 < n < 21{,}56$.

A pozitív számok halmazán az egyenlőtlenségek közös megoldása: $15{,}72 < n < 21{,}56$.

A lehetséges sokszögek és a keresett szögek nagysága:

Oldalszám	16	17	18	19	20	21
Szögek nagysága	157,5°	≈ 158,82°	160°	≈ 161,05°	162°	≈ 162,86°

5283 *a)* $x \in \left[\frac{9}{5}; \infty\right[$; *b)* $x \in \left[-19; \infty\right[$;

c) $x \in \left]-\infty; -2\right] \cup \left[\frac{5}{2}; \infty\right[$; *d)* $x \in \left]\frac{3+\lg 5}{7}; \infty\right[$.

e) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > \frac{3}{7}$. A megoldás: $\frac{3}{7} < x < \frac{8}{3}$.

f) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > 1$. A megoldás: $x > 1$.

g) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > \frac{4}{3}$. A megoldás: $\frac{4}{3} < x \le 2$.

h) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > 2$. A megoldás: $x \ge 3$.



i) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > 4\frac{1}{4}$. A megoldás: $x > 6$.

j) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $x > 4$, $x \neq 5$. A megoldás: $x > 5$.

k) Megoldás: $-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$.

l) Az egyenlőtlenség alaphalmaza: $\frac{1}{3} < x < 3$. A megoldás: $\frac{1}{3} < x \leq 1$.

m) Megoldás: $x > -1$.

n) Megoldás: $0 < x < 1$.

5284 *a)* Az egyenlőtlenség megoldása $-\frac{1}{3} \leq x \leq 4$, az adott intervallumon: $2 \leq x \leq 4$.

b) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $x > \frac{7}{5}$. A logaritmus azonosságait felhasználva a $2x^2 - 17x + 21 < 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, ennek megoldása: $\frac{3}{2} < x < 7$, ami benne van az értelmezési tartományban. Az adott intervallumon a megoldás: $2 \leq x \leq 5$.

5285 *a)* $x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$;

b) $x \in \left[0; \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$;

c) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$;

d) $x \in \left[0; \frac{19\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{23\pi}{24}; \frac{43\pi}{24}\right] \cup \left[\frac{47\pi}{24}; 2\pi\right]$;

5286 Minden feladatnál használjuk a Viète-formulákat.

a) Kérdés $x_1^2 + x_2^2$ értéke. Használjuk fel, hogy $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Ekkor a Viète-formulákkal nyert $x_1 + x_2 = 11$ és $x_1x_2 = 3$ helyettesítése után $121 - 2 \cdot 3 = 115$-öt kapunk eredményül.

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$ és $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$. Az $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ szorzattá alakítása után helyettesítéssel kapjuk az eredményt:

$$x_1x_2(x_1 + x_2) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{15}{4}.$$

c) Kérdés $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ értéke. Ezt átalakítva kapjuk (lásd *b)* feladat):

$$\frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{5}{2} : \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{5}{7}.$$

d) Alkalmasan válasszuk másik gyökként az első konjugáltját: $x_2 = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$. Ekkor:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{6}{2} \quad \text{és} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2},$$

amiből leolvashatjuk, hogy $a = 2$, $b = -6$, $c = 1$.

Helyettesítés után a keresett másodfokú egyenlet: $2x^2 - 6x + 1 = 0$.



5287 *a)* Legyen $a = x^2 - 3x - 15$, az $a + 2 - \frac{15}{a} = 0$ egyenlet megoldásai: $a_1 = -5$, $a_2 = 3$.

Visszahelyettesítve az $x^2 - 3x - 10 = 0$ és $x^2 - 3x - 18 = 0$ egyenleteket kapjuk. Ezek megoldásai: $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ és $x_3 = 6$, $x_4 = -3$.

b) Csoportosítsuk a tagokat:

$$\left(x - 2\cdot\sqrt{x-1}\right) + \left(2y - 2\cdot\sqrt{2y-1}\right) + \left(3z - 2\cdot\sqrt{3z-1}\right) = 0.$$

Mindegyik zárójelben egy-egy teljes négyzet áll:

$$\left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{2y-1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{3z-1} - 1\right)^2 = 0.$$

A bal oldal értékkészlete miatt a megoldás: $x = 2$, $y = 1$, $z = \frac{2}{3}$.

c) Értelmezés: $-1 \le x \le 1$, $x \ne 0$. A jobb oldal ilyen x-ek esetén: $13 \le 14 - \sqrt{1 - x^2} \le 14$.

A bal oldal $7\left(x + \frac{1}{x}\right)$, csak akkor van megoldás, ha $x > 0$. Ekkor viszont $7\left(x + \frac{1}{x}\right) \ge 14$.

Csak akkor van megoldás, ha mindkét oldal 14-gyel egyenlő, tehát $x = 1$.

d) Értelmezés: $x < 3$ vagy $x > 5$. Vezessünk be új változót, legyen $y = \log_3(x^2 - 8x + 15)$. Ekkor az egyenlet: $y^2 - (\log_3 35 + 1)y + \log_3 35 = 0$, megoldásai: $y_1 = 1$, $y_2 = \log_3 35$. Ezekből $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ és $x_3 = -2$, $x_4 = 10$. Mindegyik megoldása az egyenletnek.

5288 Ha $x = 1$, akkor $y = 1$. Ha $x = 2$, nincs megoldás. Ha $x = 3$, akkor $y = 3$. Ha $x = 4$, nincs megoldás. Ha $x \ge 5$, akkor $x!$ nullára végződik, tehát az $1! + 2! + 3! + \ldots + x!$ összeg 3-ra végződik, ami nem lehet egy négyzetszám utolsó jegye.

Tehát a megoldás: $x = 1$, $y = 1$ és $x = 3$, $y = 3$.

Egyenletrendszerek – megoldások

5289 A keresett számok: 33; 8; 14.

5290 *a)* $x = -2$, $y = -7$;

b) $x = 5$, $y = \frac{1}{3}$;

c) $x = \frac{2}{5}$, $y = -3$;

d) $x = \frac{5}{2}$, $y = -\frac{7}{3}$;

e) $x = -\frac{1}{5}$, $y = -\frac{9}{5}$;

f) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$;

g) $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{2}$;

h) $x = 0$, $y = \frac{5}{3}$;

i) $x_1 = 4$, $y_1 = 8$, $x_2 = 8$, $y_2 = 4$;

j) $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $x_2 = \frac{11}{5}$, $y_2 = -\frac{2}{5}$;

k) $x = 1$, $y = 2$;

l) $x_1 = 2$, $y_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = 4$;

m) $x = 4$, $y = \frac{1}{2}$;

n) $x = 10$, $y = 100$;

o) $x = 4$, $y = 8$.



5291 Ha a meggy ára x, a cseresznye ára y, akkor a $\left.\begin{array}{r}3x+5y=1980\\5x+3y=1860\end{array}\right\}$ egyenletrendszert kell megoldanunk: $x=210,\ y=270.$

Tehát a meggy ára 210 Ft/kg, a cseresznye ára 270 Ft/kg.

5292 A következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left.\begin{array}{r}x=y+40\\ \frac{1}{5}\cdot(x+y)=40\end{array}\right\}.$$

Ennek megoldásából a személyautó sebessége 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a kamioné 80 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

5293 Az $\left.\begin{array}{r}y=19x+5\\y+30=21x+9\end{array}\right\}$ egyenletrendszert megoldva: $x=13,\ y=252.$

Tehát a 252-t és a 282-t osztottuk, és a hányados mindkét esetben 13.

5294 *a)* Az első egyenletet szorzattá alakítjuk:

$$(x+y)(x-y)+(x-y)=20 \;\Rightarrow\; (x-y)(x+y+1)=20 \;\Rightarrow\; x-y=4.$$

Ezt megoldva az $x+y=4$ egyenlettel, adódik a megoldás: $x=4$ és $y=0$.

b) $x_1=\frac{1}{2},\quad y_1=-3$ és $x_2=-1,\quad y_2=\frac{3}{2}.$

c) $x_1=17,\quad y_1=2$ és $x_2=-39{,}4,\quad y_2=-35{,}6.$

d) A második egyenletet 2-vel szorozva, majd hozzáadva az első egyenlethez:

$$(x+y)^2=9,\quad \text{amiből}\quad |x+y|=3.$$

Ebből a következő egyenletrendszerekhez jutunk:

$$\left.\begin{array}{r}x+y=3\\xy=2\end{array}\right\}\quad \text{és}\quad \left.\begin{array}{r}x+y=-3\\xy=2\end{array}\right\}.$$

Az első egyenletrendszerből: $x_1=1,\ y_1=2$ és $x_2=2,\ y_2=1$; a második egyenletrendszerből: $x_3=-2,\ y_3=-1$ és $x_4=-1,\ y_4=-2.$

e) $x_1=3,\quad y_1=12,\quad x_2=-3,\quad y_2=-12,\quad x_3=6\sqrt{2},\quad y_3=3\sqrt{2},\quad x_4=-6\sqrt{2},\quad y_4=-3\sqrt{2}.$

f) Helyettesítsük az $y-4=a$ és $x+1=b$ változókat. Az így kapott

$$\left.\begin{array}{r}\frac{a}{b}=3\\ab=12\end{array}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai: $a_1=6,\ b_1=2$ és $a_2=-6,\ b_2=-2.$ Ebből a megoldásokra adódik: $x_1=1,\ y_1=10$ és $x_2=-3,\ y_2=-2.$

g) $x_1=7,\quad y_1=-5,\quad x_2=\frac{4}{3},\quad y_2=-\frac{11}{9}.$

h) Átalakítva az egyenleteket, azt kapjuk, hogy:

$$\left.\begin{array}{r}xy(x-y)=-12\\xy+(x-y)=4\end{array}\right\}.$$



Vezessük be az $xy = a$ és $x - y = b$ változókat. Ekkor:

$$\left.\begin{aligned} ab &= -12 \\ a + b &= 4 \end{aligned}\right\},$$

ennek a megoldásai: $a_1 = 6$, $b_1 = -2$ és $a_2 = -2$, $b_2 = 6$. Ebből a megoldásokra adódik:

$$x_1 = \sqrt{7} - 1,\quad y_1 = \sqrt{7} + 1;\qquad x_2 = -1 - \sqrt{7},\quad y_2 = 1 - \sqrt{7};$$
$$x_3 = \sqrt{7} + 3,\quad y_3 = \sqrt{7} - 3;\qquad x_4 = 3 - \sqrt{7},\quad y_4 = -3 - \sqrt{7}.$$

5295 *a)* $x = 5$, $y = -1$.

b) $x = 3$, $y = 5$.

c) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $x > -1$, $y > 3$. Gyökei: $x_1 = 2$, $y_1 = 7$; $x_2 = -3{,}4$, $y_2 = -2$, de csak az első számpár a megoldás.

d) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $x > 0$, $y > 0$. Megoldás: $x = 27$, $y = 512$.

e) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $x > 0$, $y > 0$, $x + y > 1$. Megoldás: $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$.

f) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $x > y$ és $x > -y$ és $x^2 + y^2 > 13$. Megoldás: $x = 8$, $y = 7$.

g) Az egyenletrendszer alaphalmaza: $3x > y$. Megoldás: $x_1 = \frac{2}{3}$, $y_1 = -8$; $x_2 = -3$, $y_2 = -19$.

h) Megoldás: $x = -2$, $y_1 = \frac{1}{400}$.

5296 Legyenek a befogók a és b. A következő egyenletrendszer írható fel:

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 39^2 \\ \frac{ab}{2} &= 270 \end{aligned}\right\}.$$

Ennek pozitív megoldásai a befogók: 15 cm és 36 cm.

5297 Ha a négyzetek oldala x és y, akkor az $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 724 \\ 3x + 3y + x - y &= 116 \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer írható fel.

A megoldások: $x_1 = 26{,}4$, $y_1 = 5{,}2$ és $x_2 = 20$, $y_2 = 18$, az első esetben nem érdemes földterületekről beszélni.

5298 *a)* Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = 7$, $y_1 = 1$ és $x_2 = 3$, $y_2 = 4$.

A két pont: $A(7; 1)$, $B(3; 4)$, távolságuk 5 egység.

b) Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1 = 4$, $y_1 = 1$ és $x_2 = 6$, $y_2 = -3$.

A két pont: $P(4; 1)$, $Q(6; -3)$, távolságuk $PQ = \sqrt{20}$ egység.

5299 A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 2010 \\ x &= 9y + 9 \\ z &= 9y + 82 \end{aligned}\right\}.$$

A keresett számok: $x = 918$, $y = 101$ és $z = 991$.



5300 Összeadva a két egyenletet: $(x+y)^2=16$. Ha $x+y=4$, akkor az $x(x+6y)=27$ egyenletbe helyettesítve az $5x^2-24x+27=0$ egyenletet kapjuk, hogy $x_1=3$, $y_1=1$ és $x_2=\frac{9}{5}$, $y_2=\frac{11}{5}$.

Ha $x+y=-4$, akkor az $5x^2+24x+27=0$ egyenlethez jutunk, amiből $x_1=-3$, $y_1=-1$ és $x_2=-\frac{9}{5}$, $y_2=-\frac{11}{5}$.

5301 Ha a fiúk száma x és a lábméretük átlaga y, akkor $xy+(x+8)(y-4)=39{,}5(2x+8)$, átrendezve és szorzattá alakítva:

$$2xy+8y-83x-348=0,$$
$$2y(x+4)-83(x+4)=16,$$
$$(2y-83)(x+4)=16.$$

Mivel az első tényező páratlan, csak a $2y-83=1$, $x+4=16$ ad megoldást: $x=12$ és $y=42$. Tehát 20 lány és 12 fiú jár az osztályba.

5302 Értelmezés: $y,\ z\neq 0$. Kivonva egymásból a két egyenletet: $-\frac{2}{y}+\frac{2x}{z}=0$, amiből $z=xy$ $(x\neq 0)$. Visszahelyettesítve: $\frac{x-1}{y}+\frac{x+1}{xy}=1$. Átalakítás és rendezés után $x^2+1=xy$, amiből $y=x+\frac{1}{x}$.

Mivel az egész számok halmazán keressük, a megoldás: $x_1=1$ vagy $x_2=-1$.

A megoldások: $(1;\,2;\,2)$ és $(-1;\,-2;\,2)$.

5303 Értelmezés: $x,\ y,\ z\neq 0$. A harmadik egyenlet a közös nevezőre hozás után:

$$\frac{x^2+xy+xz+yz}{xyz}=0,$$
$$\frac{(x+y)\cdot(x+z)}{xyz}=0.$$

Ez csak akkor lehetséges, ha a számláló 0, amiből két eset adódik.

I. eset: $x=-y$.

A második egyenletbe helyettesítve: $z^{2011}=2^{2011}$, tehát $z=2$. Az első egyenletbe mindkét eredményt beírva: $2y^4+2^4=178$, amiből $y_1=3$, $y_2=-3$ és $x_1=-3$, $x_2=3$.

II. eset: $x=-z$.

A fenti módszert alkalmazva ezúttal azt kapjuk, hogy $y=2$. Ekkor a megoldások: $z_1=3$, $z_2=-3$ és $x_1=-3$, $x_2=3$.

Tehát az egyenletrendszer megoldásai a $(-3;\,3;\,2)$, $(3;\,-3;\,2)$, $(-3;\,2;\,3)$, $(3;\,2;\,-3)$ számhármasok.



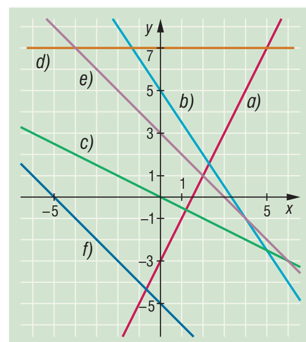
FÜGGVÉNYEK – ÖSSZEFOGLALÁS

A függvény fogalma, grafikonja, egyszerű tulajdonságai – megoldások

5304 A függvények grafikonjai az ábrán láthatóak. (➡)

Megjegyzés: Az *e)* feladatban előbb átalakítást végzünk:

$$x \mapsto \frac{6}{2} - \frac{2x}{2} \quad \Rightarrow \quad x \mapsto 3 - x \quad \Rightarrow \quad x \mapsto -x + 3.$$



5305 *a)* c; *b)* d; *c)* $e \parallel f$; *d)* d.

5306 *a)* A lineáris függvények általános hozzárendelési szabálya: $x \mapsto mx + b$, vagy másként: $y = mx + b$. Behelyettesítve az $A(3; 1)$, $B(-1; 3)$ koordinátákat x, y helyére:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 3m + b \\ 3 &= -m + b \end{aligned}\right\}, \quad \text{amiből} \quad b = \frac{5}{2} \quad \text{és} \quad m = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{a hozzárendelési szabály: } y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

b) Az *a)* feladathoz hasonlóan:

$$b = -2 \quad \text{és} \quad m = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x - 2.$$

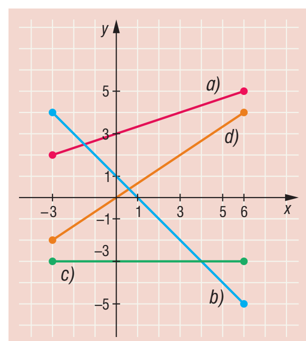
c) $y = 3$; *d)* $y = -3x$; *e)* c; *f)* d; *g)* b; *h)* a, d.

5307 *a)* $x \mapsto 5x + 2$; *b)* $x = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$; *c)* $x = -\frac{1}{4}x + 4$; *d)* $x \mapsto 5$.

5308 *a)* Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$, $y \in [2; 5]$.
Zérushely: nincs.
Monotonitás: $m > 0$, $m = \frac{1}{3}$, szigorúan monoton növekvő.

b) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$, $y \in [-5; 4]$.
Zérushely: $x = 1$.
Monotonitás: $m < 0$, $m = -1$ szigorúan monoton csökkenő.

c) Értékkészlet: $y = -3$.
Zérushely: nincs.
Monotonitás: $m = 0$, konstans, így monoton nő, vagy monoton csökken (de nem szigorú értelemben).





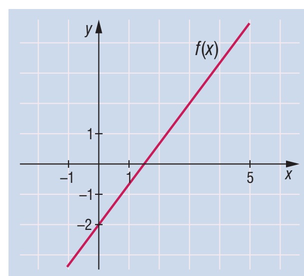
d) Értékkészlet: $y \in \mathbb{R}$, $y \in [-2; 4]$.
Zérushely: $x = 0$, egyenes arányosság függvény.
Monotonitás: $m > 0$ $\left(m = \frac{2}{3}\right)$, szigorúan monoton növekvő.

5309 *a)* $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$;

b) $\frac{8+12}{-4} = -5$;

c) $x = 3$, mert: $-\frac{4}{3} \cdot 3 + 4 = 0$.

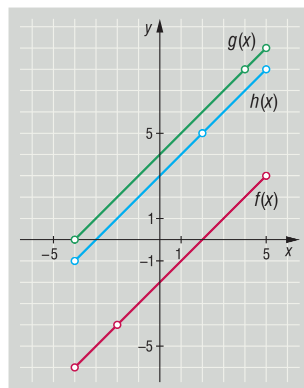
5310 $f(x) = \frac{4}{3}x - 2$.
Az y tengelyt a $\frac{4}{3} \cdot 0 - 2 = -2$-ből eredő $(0; -2)$ pontban;
az x tengelyt pedig a $\frac{4}{3}x - 2 = 0$-ból eredő $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ pontban metszi a függvény. (➡)



5311 A, D és E illeszkedik $f(x)$-re;
B, C, D és F illeszkedik $g(x)$-re.

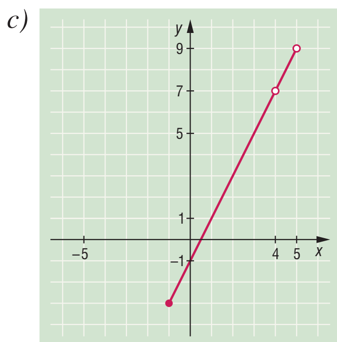
5312 $f(x) = x - 2$, ha $x \neq -2$;
$g(x) = x + 4$, ha $x \neq 4$;
$h(x) = x + 3$, ha $x \neq 2$.

$f(x) > 0$, ha $x \in]2; 5[$;
$g(x) > 0$, ha $x \in]-4; 4[\cup]4; 5[$;
$h(x) > 0$, ha $x \in]-3; 2[\cup]2; 5[$.

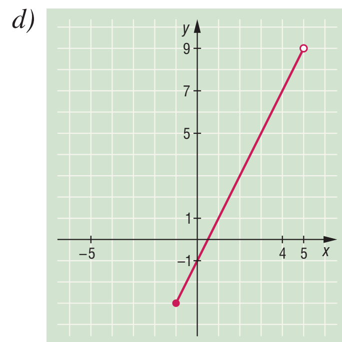


5313 *a)* $x \neq 4$.
Értelmezési tartomány:
$x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$.
b) Értelmezési tartomány:
$x \in \mathbb{R}$.
c) Értékkészlet ($y \in \mathbb{R}$):
$y \in [-3; 7[\cup]7; 9[$.
d) Értékkészlet ($y \in \mathbb{R}$):
$y \in [-3; 9[$.

c)

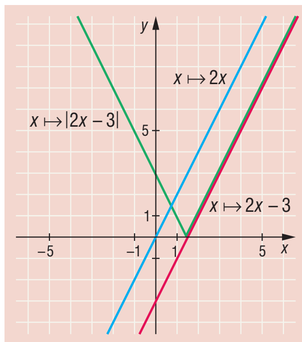


d)

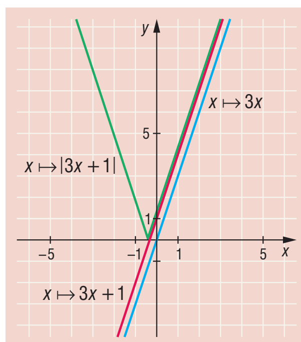




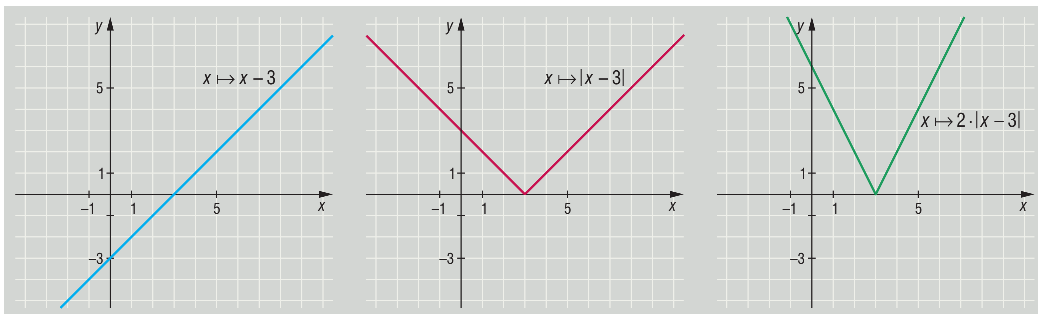
5314 *a)*



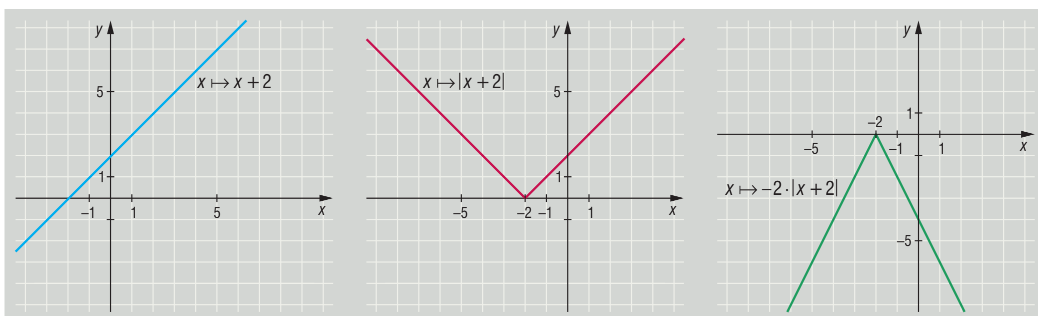
b)



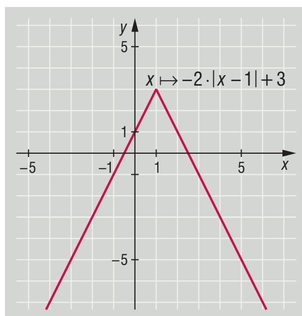
5315 *a)*



b)



c)





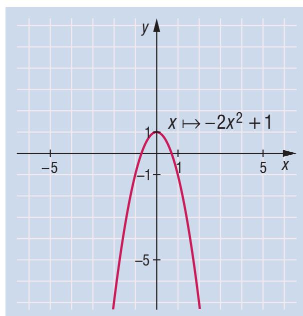
5316 *a)* A függvény hozzárendelési szabálya: $f(x) = -(x-2)^2 + 4$.

b) A $]4; 5[$ intervallumon.

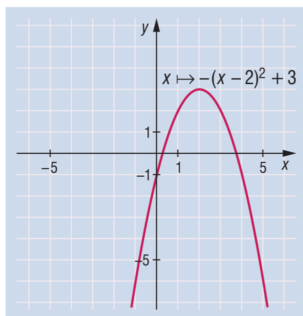
c) A függvény a $[0; 2]$ intervallumon szigorúan monoton nő.

d) A függvénynek két zérushelye van: $x = 0$ és $x = 4$.

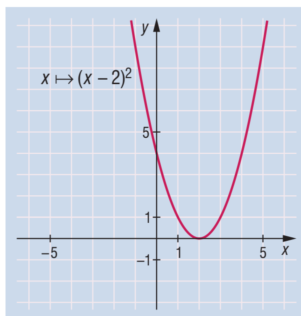
5317 *a)*



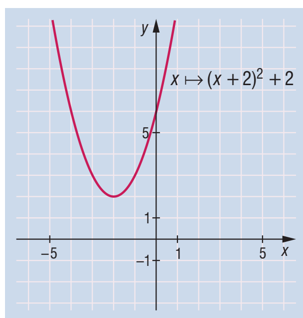
b)



c)



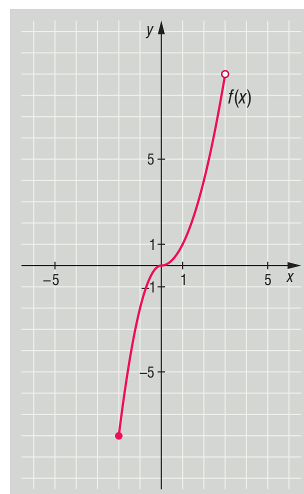
d)



5318 Értékkészlet: $y \in [-8; 9[$.

Zérushely: $x = 0$.

Az értelmezési tartományon szigorúan monoton növekvő.





5319 *a)* $f(x) = -1$ akkor, ha

$$-1 = (x-4)^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad 1 = (x-4)^2,$$

amiből $x_1 = 5,\ x_2 = 3$.

Tehát $f(5) = -1$ és $f(3) = -1$.

$g(x) = -1$ akkor, ha

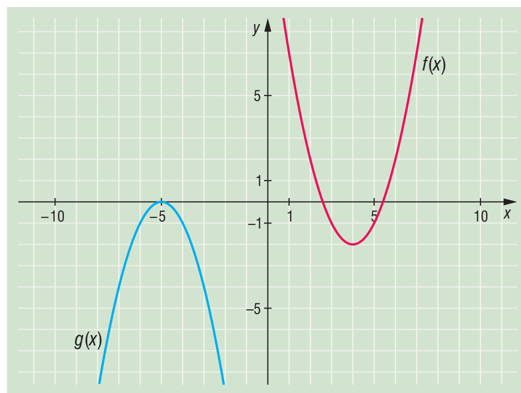
$$-1 = -(x+5)^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -4,\ x_2 = -6.$$

Tehát $g(-4) = -1$ és $g(-6) = -1$.

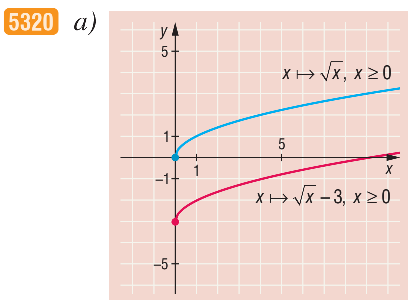
b) A, C és D illeszkedik f-re;

B és E illeszkedik g-re;

F egyik grafikonra sem illeszkedik.

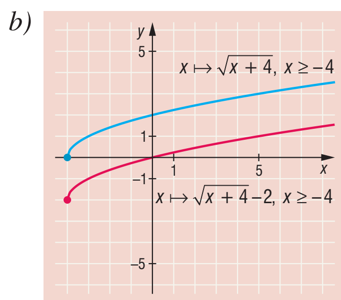


5320 *a)*



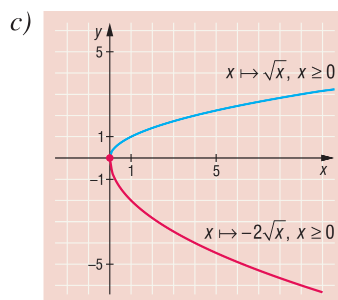
Ért. tartomány: $x \geq 0$.

b)



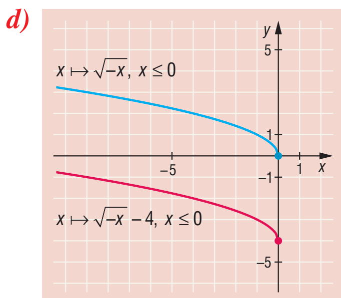
Ért. tartomány: $x \geq -4$.

c)



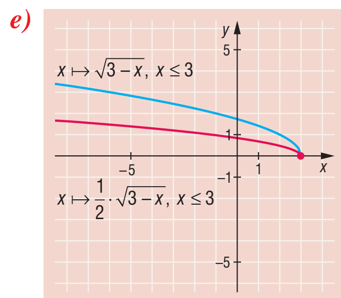
Ért. tartomány: $x \geq 0$.

d)



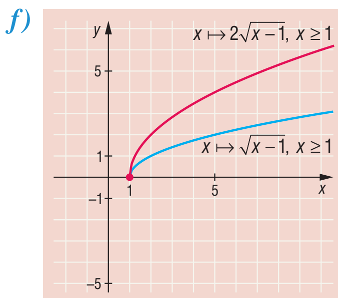
Ért. tartomány: $x \leq 0$.

e)



Ért. tartomány: $x \leq 3$.

f)

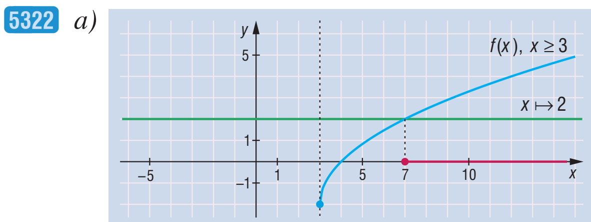


Ért. tartomány: $x \geq 1$.

5321 *a)* A négyzetgyökfüggvény grafikonját eltoltuk az x tengely mentén jobbra 1 egységgel, majd tükröztük az x tengelyre, ezután kétszeresére „nyújtottuk” az y tengely mentén, végül 1 egységgel felfelé toltuk az y tengely mentén.

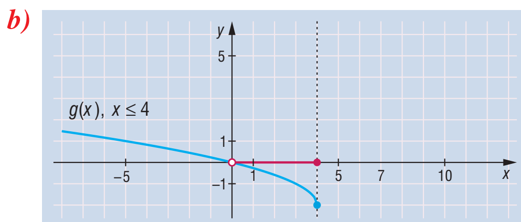
b) A kapott függvény hozzárendelési szabálya: $x \mapsto -2 \cdot \sqrt{x-1} + 1$.

5322 *a)*



$f(x) \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x \in [7; \infty[$.

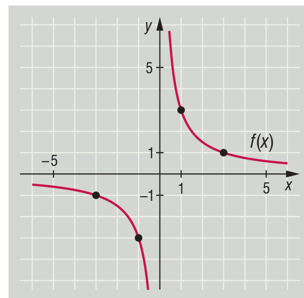
b)



$g(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \,]0; 4]$.

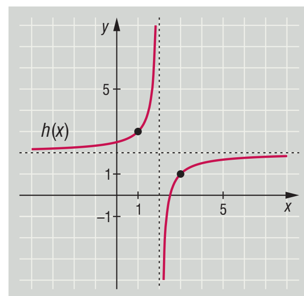


5323 *a)* $f(x) = 3 \cdot \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$; igen, fordított arányosság.



b) $g(x) = \frac{5}{2} - x$; lineáris függvény.

c) $h(x) = -\frac{1}{x-2} + 2$ $(x \neq 2)$; lineáris törtfüggvény.



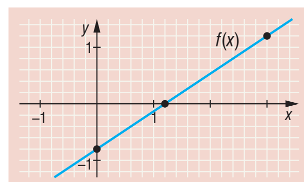
d) $i(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x+3}$; ha $x \neq -3$ $\Rightarrow$ $i(x) = x - 3$; lineáris függvény $(x \neq -3)$.

e) $j(x) = \frac{2(x-2)}{3(x-2)}$; ha $x \neq 2$ $\Rightarrow$ $j(x) = \frac{2}{3}$; lineáris függvény, konstans $(x \neq 2)$.

5324 *a)* (4); maximum helye: $x = 2$; maximum értéke: $y = 3$;
b) (4); minimum helye: $x = -1$; minimum értéke: $y = -1$;
c) (3); minimum helye: $x = 2$; minimum értéke: $y = 0$.

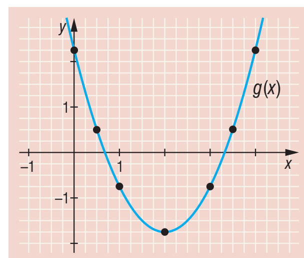
5325 *a)* $(-3; 2)$, $(-6; 4)$, $(0; 0)$; *b)* $(2; 6)$, $(0; 0)$, $(4; 4)$;
c) $(7; 6)$, $(0; 1)$, $(21; 16)$; *d)* $(12; 3)$, $(4; 1)$, $(39; 6)$.

5326 *a)* $A\left(\frac{1}{5}; -\frac{2}{3}\right)$, $B\left(-\frac{6}{5}; -\frac{8}{5}\right)$, $C\left(\frac{6}{5}; 0\right)$;



b) $A_1\left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $B_1\left(4; \frac{9}{4}\right)$, $C\left(-1; \frac{29}{4}\right)$,

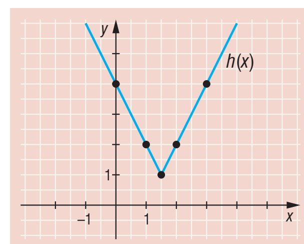
$A_2\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $B_2\left(0; \frac{9}{4}\right)$;



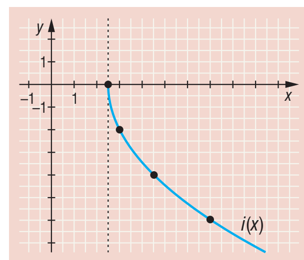


c) $A\left(-\frac{1}{2}; 5\right)$, $B_1\left(-\frac{1}{2}; 5\right)$, $C\left(\frac{3}{2}; 1\right)$,

$B_2\left(\frac{7}{2}; 5\right)$;



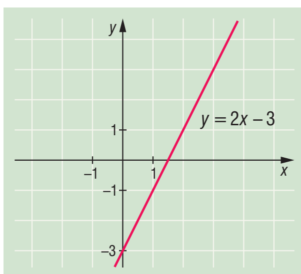
d) $A\left(\frac{1}{2}; \text{nincs megoldás}\right)$, $B(7; -6)$, $C\left(\frac{9}{2}; -4\right)$.



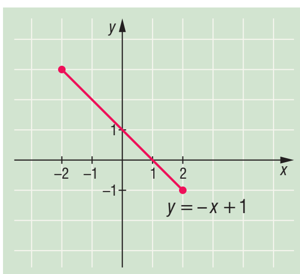
5327 *a)* *g*; *b)* *i*; *c)* *h*; *d)* *f*.

5328 *a)* *g*; *b)* *f*; *c)* *h*; *d)* *i*.

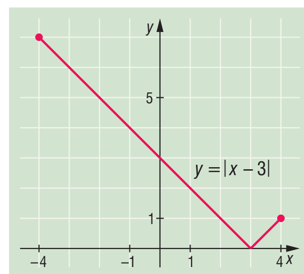
5329 *a)*



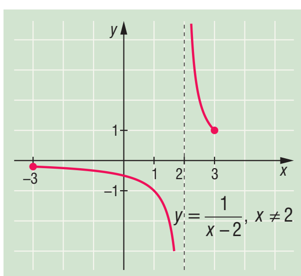
b)



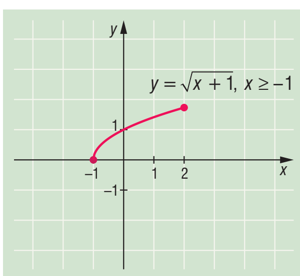
c)



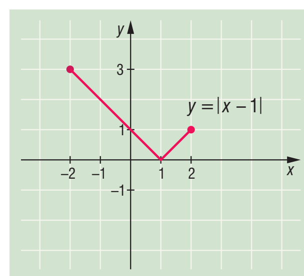
d)



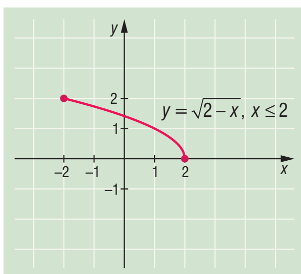
e)



f)

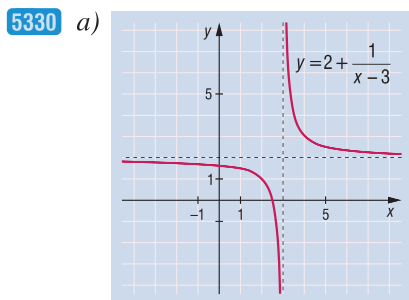


g)

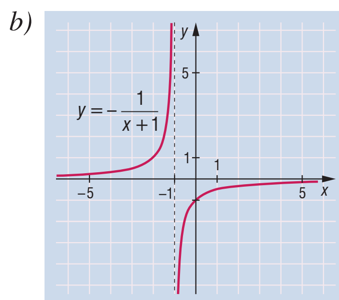




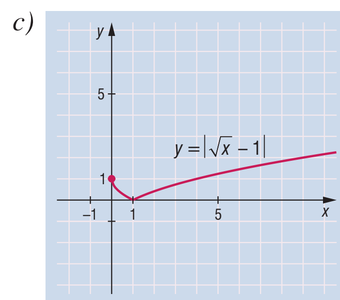
5330 *a)*



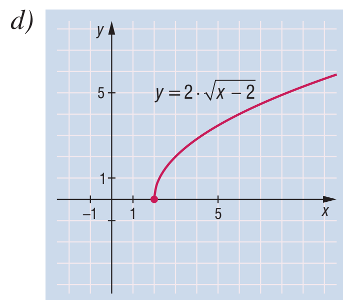
b)



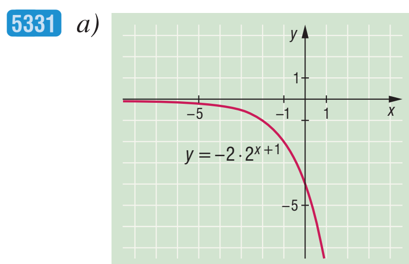
c)



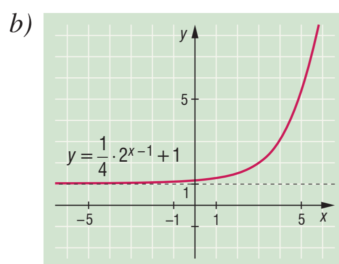
d)



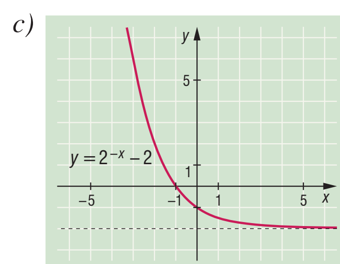
5331 *a)*



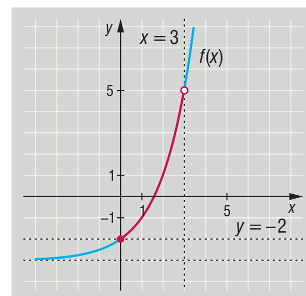
b)



c)



5332 Megoldás: $0 \le x < 3$; $-2 \le y < 5$.



5333 *a)* Mivel:

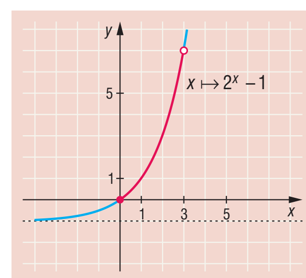
$$x = 3,\ y = 7 \ \Rightarrow\ y = a^x - 1 \ \Rightarrow\ 7 = a^3 - 1 \ \Rightarrow\ a = 2,$$

a függvény hozzárendelési szabálya:

$$x \mapsto 2^x - 1.$$

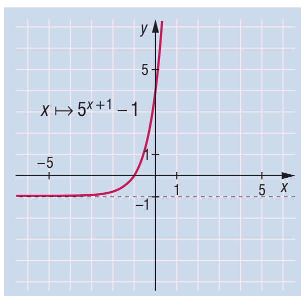
b) Értékkészlet: $y \in [0; 7[$.

c) Értékkészlet: $y \in [1; 7]$.

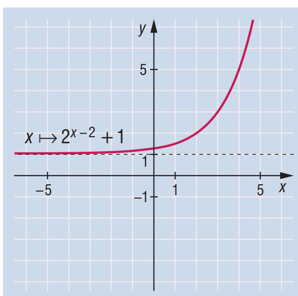




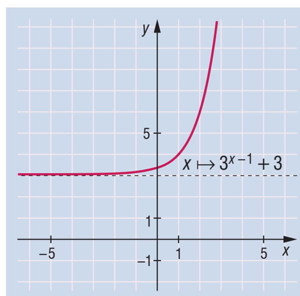
5334 *a)*



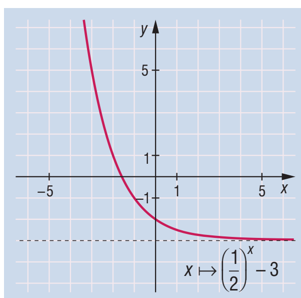
b)



c)



d)



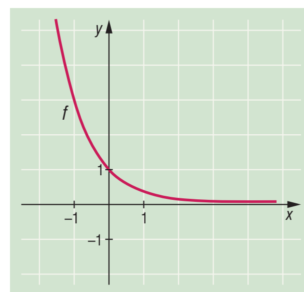
5335 *a)* A grafikon alapján: $a^{-1} = 3$, amiből $a = \frac{1}{3}$.

b) $x \mapsto -\left(\frac{1}{3}\right)^x$;

c) $x \mapsto 3^x$;

d) $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$;

e) $x \mapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$.



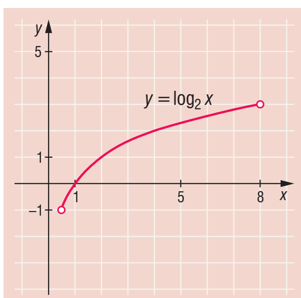
5336 *a)* Behelyettesítve a (9; 2) pontpárt az $y = \log_a x$ hozzárendelésbe, mivel $a > 0$, ezért $a = 3$ adódik. A keresett hozzárendelési szabály: $x \mapsto \log_3 x$.

b) $f(3) = 1$;

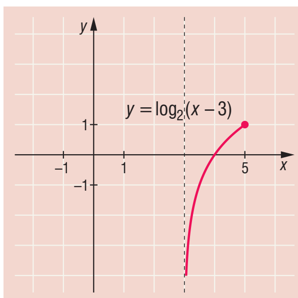
$f(-1)$ nincs értelmezve;

$f(1) = 0$.

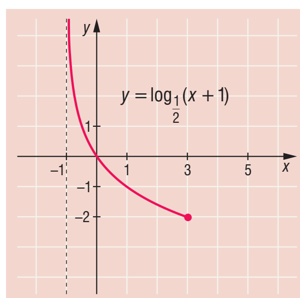
5337 *a)*



b)



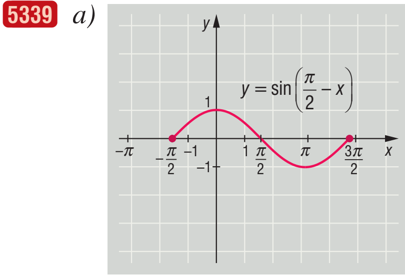
c)



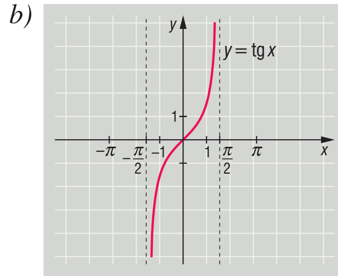


5338 *a)* i; *b)* h; *c)* g; *d)* f.

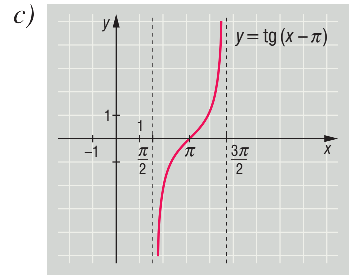
5339 *a)*



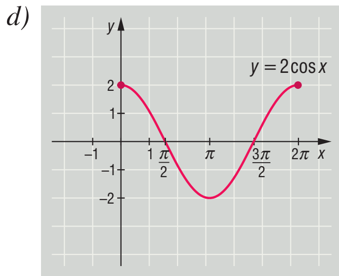
b)



c)



d)



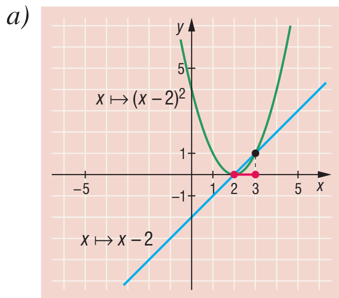
5340 $f\colon x \mapsto -\cos x, \quad x \in [-\pi; \pi];$

$g\colon x \mapsto -\sin x, \quad x \in [-\pi; \pi];$

$h\colon x \mapsto |2\sin x|, \quad x \in [-\pi; \pi].$

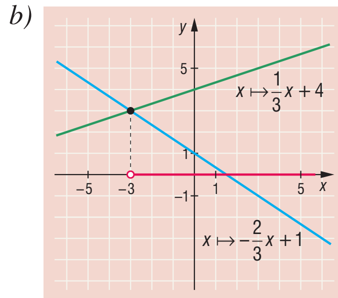
5341 Az *a)* feladat egyenlőtlenségének bal oldalát átalakíthatjuk: $3x - 6 - 2x + 4 = x - 2$.

a)



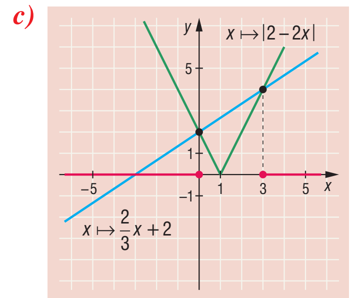
$x \in [2; 3]$;

b)



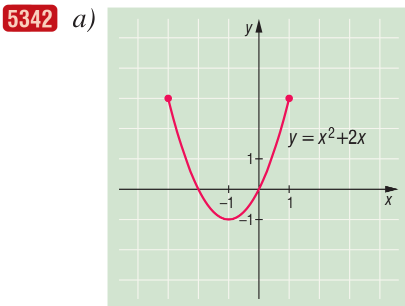
$x \in \,]-3; \infty[$;

c)

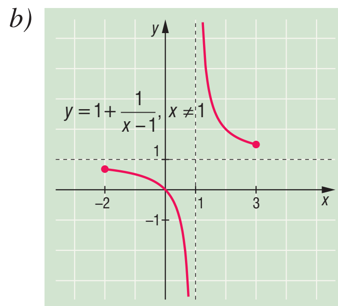


c) $x \in \,]-\infty; 0] \cup [3. \infty[$.

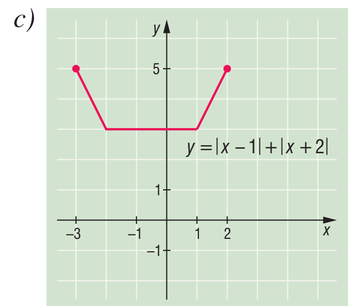
5342 *a)*



b)

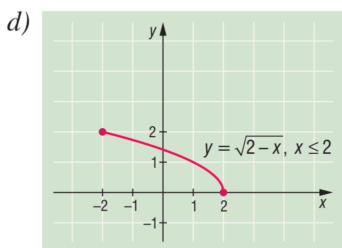


c)

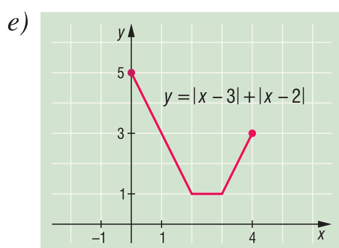




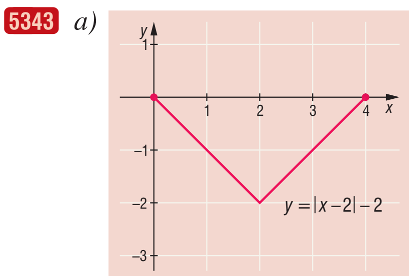
d)



e)

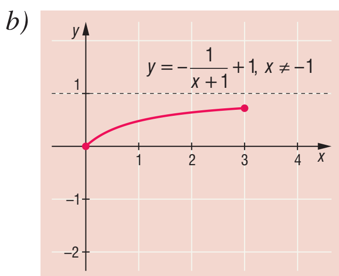


5343 *a)*



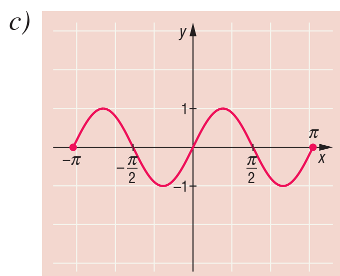
$x_1=0,\quad x_2=4;$

b)



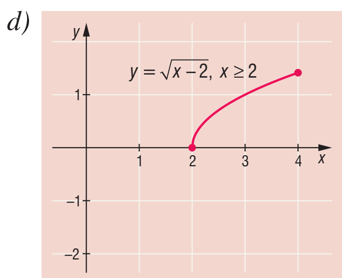
$x=0;$

c)



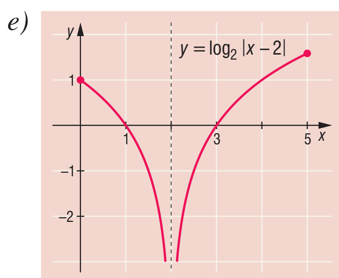
$x=-\pi,\ -\frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi;$

d)



$x=2;$

e)



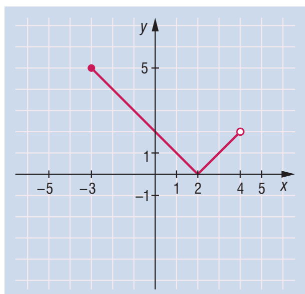
$x_1=1,\quad x_2=3.$

5344 *a)* f; *b)* h; *c)* g; *d)* i.

5345 *a)* h; *b)* f; *c)* i; *d)* g.

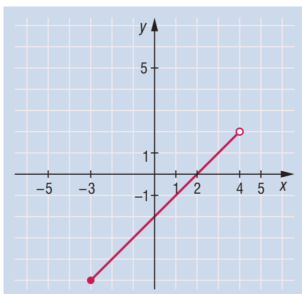
5346 Az *a)* feladat kifejezését átalakíthatjuk: $\left(\sqrt{x-2}\right)^2=|x-2|$.

a) Ért. tartomány: $x\in\mathbb{R}$.



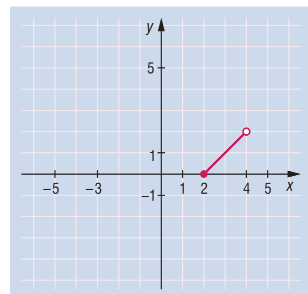
Értékkészlet: $y\in[0;5]$.

b) Ért. tartomány: $x\in\mathbb{R}$.



Értékkészlet: $y\in[-5;2[$.

c) Ért. tartomány: $x\ge 2,\ x\in\mathbb{R}$.



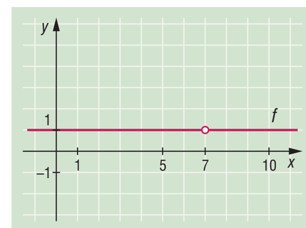
Értékkészlet: $y\in[0;2[$.



5347 *a)* $x \neq 7$.

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

Értékkészlet: $y = 1$.



b) $x \neq 7$.

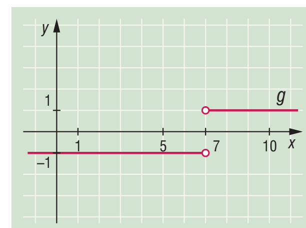
$$|x-7| = \begin{cases} x-7, & \text{ha} \quad x \geq 7, \\ 7-x, & \text{ha} \quad x < 7, \end{cases}$$

ezért

$$g(x) = \frac{|x-7|}{x-7} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x > 7, \\ -1, & \text{ha} \quad x < 7. \end{cases}$$

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

Értékkészlet: $y = 1$ és $y = -1$.

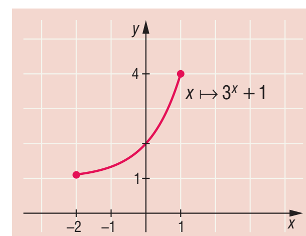


5348 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$.

b) Mivel $3^x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$. Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Értékkészlet:

$$y \in \left[\frac{10}{9}; 4\right].$$

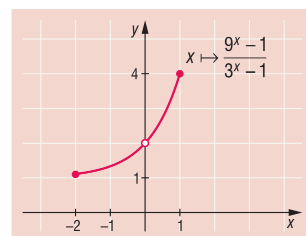


d) Értékkészlet:

$$y \in \left[\frac{10}{9}; 2\right[\cup \left]2; 4\right].$$

Ez felírható a következő alakban is:

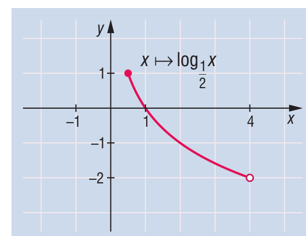
$$y \in \left[\frac{10}{9}; 4\right] \setminus \{2\}.$$



5349 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

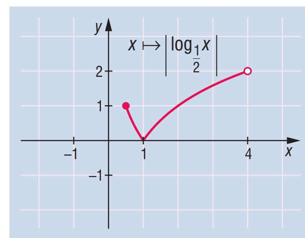
b) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

c) Értékkészlet: $y \in \left]-2; 1\right]$.





d) Értékkészlet: $y \in [0; 2[$.

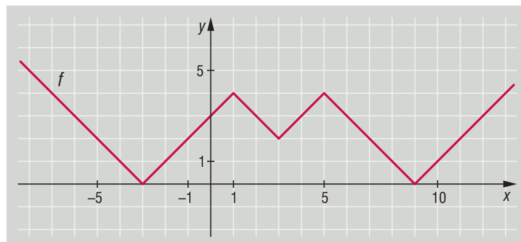


5350 *a)* Zérushelyek: $x_1 = -3$ és $x_2 = 9$.

b) $x = -4$, $x = -2$, $x = 8$, $x = 10$.

Másként jelölve:

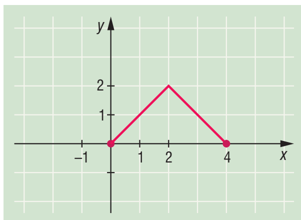
$f(-4) = 1$, $f(-2) = 1$, $f(8) = 1$, $f(10) = 1$.



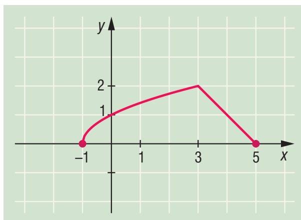
5351 *a)* $f\colon x \mapsto \sin x$, $g\colon x \mapsto \cos x$; *b)* $\dfrac{\frac{1}{2} + 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$;

c) $\dfrac{1+1}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 = 4$; *d)* $\dfrac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; *e)* $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

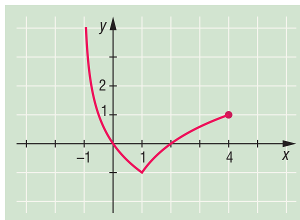
5352 *a)*



b)



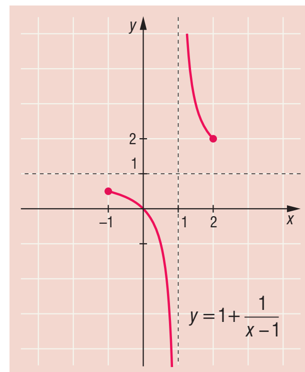
c)



5353 *a)* Az f függvény hozzárendelését írjuk így:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1},$$

így már könnyű ábrázolni a grafikonját.

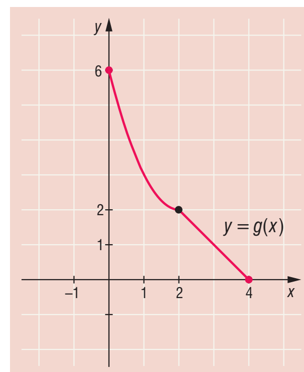




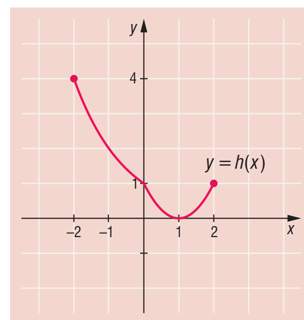
b) A függvény grafikonját egy paraboladarab és egy egyenes szakasz egymáshoz fűzése adja.

A g függvény hozzárendelési szabályát így írhatjuk át:

$$g(x)=\begin{cases}(x-2)^2+2, & \text{ha} \quad 0\le x\le 2,\\ -x+4, & \text{ha} \quad 2<x\le 4.\end{cases}$$



c) A függvény grafikonja:



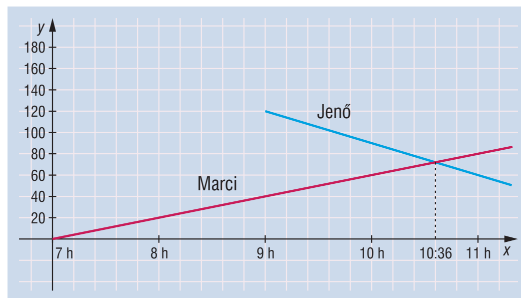
5354 *a)* A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f\colon\ \left]-3;9\right]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}-x-1, & \text{ha} \quad -3<x\le 0,\\ x^2-1, & \text{ha} \quad 0<x\le 3,\\ \dfrac{1}{3}x+7, & \text{ha} \quad 3<x\le 9.\end{cases}$$

b) Értékkészlet: $y\in[-1;10]$;

c) $-3<x\le 2$, másként $x\in\left]-3;2\right]$.

5355 *a)* Az út–idő grafikon az ábrán látható.



b) Marci útja reggel 7 órától az $y=20x$ függvénnyel írható le. Jenő útja reggel 7 órától (ha ekkor indult volna) az $y=-30x+180$ függvénnyel jellemezhető. Ebből:

$$20x=-30x+180 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}.$$

Reggel 7 órától számítva 3 óra 36 perc múlva találkoznak, azaz 10 óra 36 perckor.

c) Marci 1 óra alatt 20 kilométert tesz meg, így mivel ő 3 óra 36 percet biciklizett 7 órától, egyenes arányossággal számolva 72 kilométert tett meg.

Jenő 9 órakor indult, ő 10 óra 36 percig csak 1 óra 36 percet töltött úton. Mivel 1 óra alatt 30 kilométert tesz meg, ezért 1 óra 36 perc alatt 48 kilométert tett meg.



5356 *a)* A közös értelmezési tartomány: $x > 1$. Az egyenlet bal oldalát alakítsuk át:

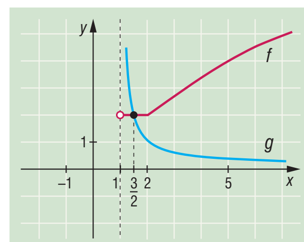
$$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}=$$

$$=\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\begin{cases}2\sqrt{x-1}, & \text{ha } x\ge 2,\\ 2, & \text{ha } 1\le x\le 2.\end{cases}$$

Ezután ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját:

$$f:\ x\mapsto \sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|,\quad 1<x,$$

$$g:\ x\mapsto \frac{1}{x-1},\quad 1<x.$$



Az f és g függvény értéke csak az $x=\frac{3}{2}$ helyen egyenlő, itt mindkét függvény értéke 2.

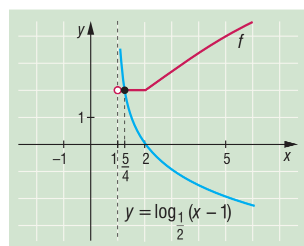
b) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az *a)* feladatban szereplő f függvény és a

$$h:\ x\mapsto \log_{0,5}(x-1),\quad x>1$$

függvény grafikonját.

A h függvény $x>1$ esetén csökken, az f függvény először konstans, majd 2-től nő, így legfeljebb egy közös pontja van a két grafikonnak.

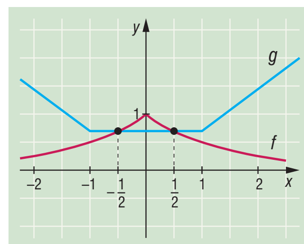
Ez az $x=\frac{5}{4}$-nél van, itt mindkét függvény értéke 2.



c) Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az alábbi függvények grafikonját:

$$f:\ x\mapsto 2^{-|x|},$$

$$g:\ x\mapsto \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\left(|x+1|+|x-1|\right).$$



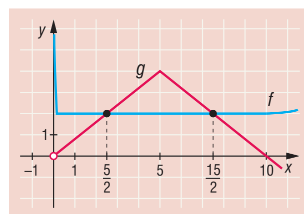
Mivel mindkét függvény páros, az ábra szimmetrikus az y tengelyre. $0\le x\le 2$-re f csökken, így itt legfeljebb egy közös pontja van a nem csökkenő g függvény grafikonjával.

Ez $x=\frac{1}{2}$ esetén teljesül. Az egyenlet gyökei tehát $-\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2}$.

5357 Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a következő függvények grafikonját:

$$f(x)=|1-\lg x|+|1+\lg x|,\quad 0<x,$$

$$g(x)=4\cdot\left(1-\frac{|x-5|}{5}\right),\quad 0<x.$$



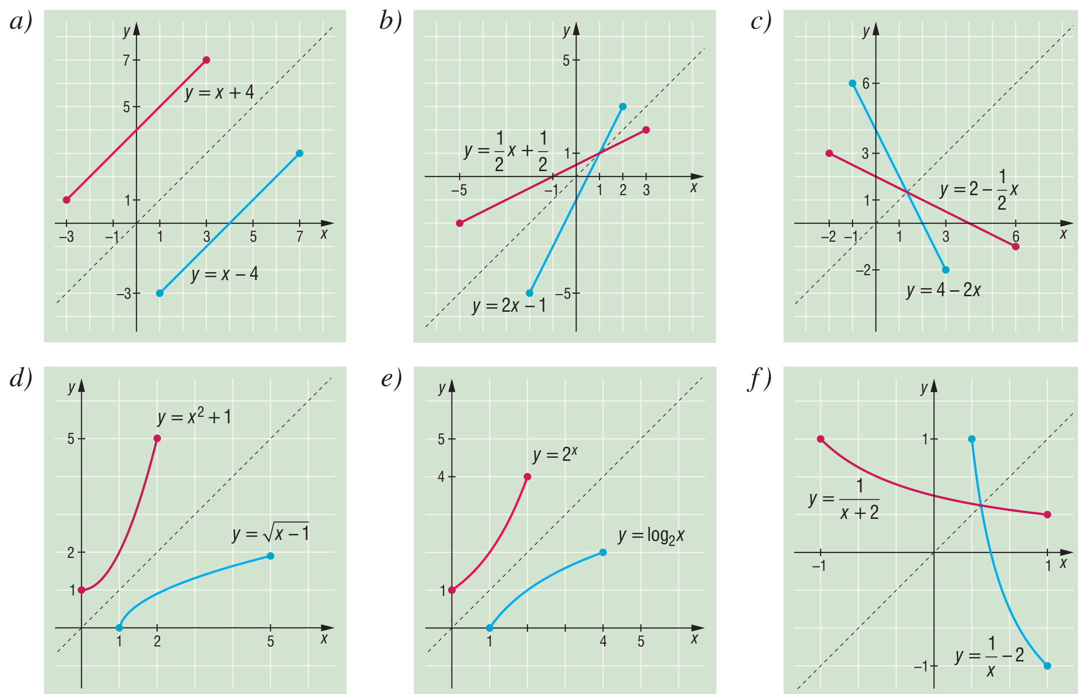
A függvények tulajdonságaiból következik, hogy a két grafikonnak két metszéspontja van: $x=\frac{5}{2}$ és $x=\frac{15}{2}$ értéknél.

Mindkét helyen mindkét függvény értéke 2.

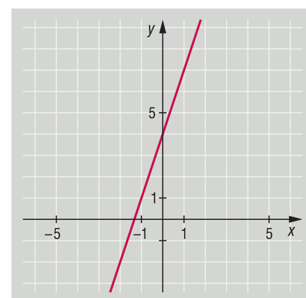


Műveletek függvényekkel – megoldások

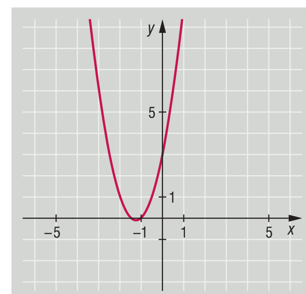
5358 A függvény és inverzének grafikonja az $y = x$ egyenletű egyenesre nézve egymás tükörképei.
A dolog természetéből következik, hogy a függvény és inverze esetén az értékkészlet és az értelmezési tartomány helyet cserél: a függvény értelmezési tartománya az inverz függvény értékkészlete, és a függvény értékkészlete az inverz függvény értelmezési tartománya.



5359 *a)* $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x + 1 + 2x + 3 = 3x + 4.$
A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza.



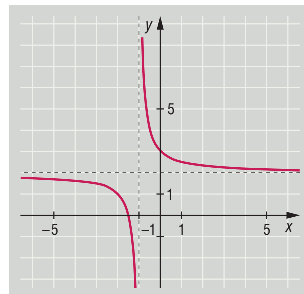
b) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x + 1) \cdot (2x + 3) = 2x^2 + 5x + 3.$
A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza.





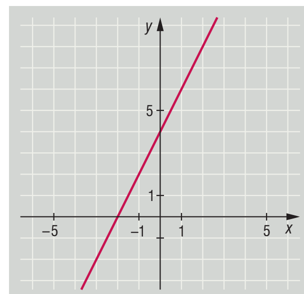
c) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2\cdot(x+1)+1}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}$.

A függvény értelmezési tartománya: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.



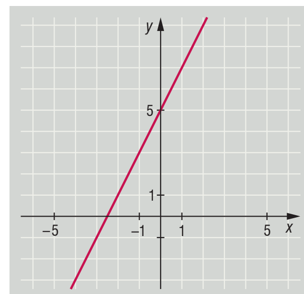
d) $(f\circ g)(x)=(2x+3)+1=2x+4$.

A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza.



e) $(g\circ f)(x)=2(x+1)+3=2x+5$.

A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza.



5360 A kapott függvények:

$(a\circ a)(x)=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$, értelmezési tartománya a nemnegatív számok halmaza;

$(b\circ b)(x)=\left(x^2\right)^2=x^4$, értelmezési tartománya a valós számok halmaza;

$(c\circ c)(x)=(x+1)+1=x+2$, értelmezési tartománya a valós számok halmaza;

$(a\circ b)(x)=\sqrt{x^2}=|x|$, értelmezési tartománya a valós számok halmaza;

$(a\circ c)(x)=\sqrt{x+1}$, értelmezési tartománya: $[-1;\infty[$;

$(b\circ a)(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$, értelmezési tartománya a nemnegatív számok halmaza;

$(b\circ c)(x)=(x+1)^2$, értelmezési tartománya a valós számok halmaza;

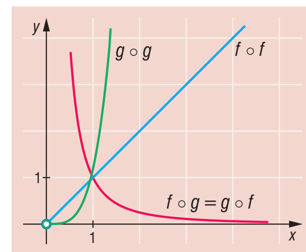
$(c\circ a)(x)=\sqrt{x}+1$, értelmezési tartománya a nemnegatív számok halmaza;

$(c\circ b)(x)=x^2+1$, értelmezési tartománya a valós számok halmaza.



5361 $f\circ g$: $f(g(x))=\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$; $\quad g\circ f$: $g(f(x))=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{1}{x^2}$, $x>0$,

$f\circ f$: $f(f(x))=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x$, $x>0$; $\quad g\circ g$: $g(g(x))=(x^2)^2=x^4$, $x>0$.



5362 Például $f(x)=x+2$ és $g(x)=x+3$. Ekkor

$$(f\circ g)(x)=(x+3)+2=x+5,$$

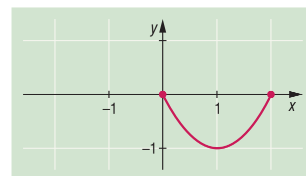
és

$$(g\circ f)(x)=(x+2)+3=x+5$$

teljesül.

5363 *a)* Az állítás igaz. Ha ugyanis az f és g függvény az $[a; b]$ intervallumon szigorúan monoton növő, akkor az intervallum bármely x_1, x_2 elemeire $x_1<x_2$ esetén $f(x_1)<f(x_2)$ és $g(x_1)<g(x_2)$. Az utóbbi két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva $f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)$, amiből következik, hogy az $f+g$ függvény is szigorúan monoton nő az $[a; b]$ intervallumon.

b) Az állítás nem igaz. Vizsgáljuk például a $[0; 2]$ intervallumon az $f(x)=x$ és a $g(x)=x-2$ függvényeket. Mindkét függvény szigorúan monoton nő az adott intervallumon (meredekségük pozitív), míg szorzatukra $(f\cdot g)(x)=x\cdot(x-2)$. A kapott függvény grafikonja alapján látható, hogy a $[0; 2]$ intervallumon nem szigorúan monoton növő.



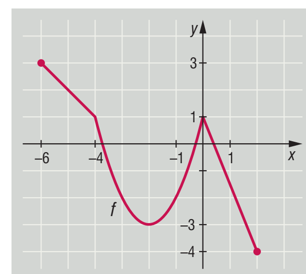
5364 *a)* Például $[-4; 1]$. *b)* Például $[-2; 4]$. *c)* Például $[-3; 3]$.

d) Például $[-4; -2]$. *e)* Például $[0; 1]$.

5365 *a)* A függvény értelmezési tartománya $[-4; 0]$, hozzárendelési szabálya: $f(x)=(x+2)^2-3$.

b) Az ábra egy lehetséges megoldást mutat.
A függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x)=\begin{cases} -x-3, & \text{ha } -6\le x<-4,\\ (x+2)^2-3, & \text{ha } -4\le x\le 0;\\ -\dfrac{5}{2}x+1, & \text{ha } 0<x\le 2. \end{cases}$$



Függvénytulajdonságok – megoldások

5366 Az értelmezési tartomány az egyes esetekben:

a) $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$; *b)* $\left[\dfrac{3}{2}; \infty\right[$; *c)* $\mathbb{R}\setminus\{-2; 2\}$;

d) $]-\infty; -2]\cup[2; \infty[$; *e)* $]-\infty; 0]\cup[1; \infty[$;

f) $x^2+x-6=(x+3)(x-2)\ge 0$, így az értelmezési tartomány: $]-\infty; -3]\cup[2; \infty[$.



5367 *a)* $\dfrac{x-3}{x+1} \geq 0$ és $x \neq -1$.

A hányados akkor 0, ha $x = 3$, akkor pozitív, ha $x - 3 > 0$ és $x + 1 > 0 \Rightarrow x > 3$ vagy $x - 3 < 0$ és $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$.

Értelmezési tartomány: $x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left[3; \infty\right[, \quad x \in \mathbb{R}$.

b) $\sqrt{x}$ miatt: $x \geq 0$, valamint $4 - \sqrt{x} \neq 0 \Rightarrow x \neq 16$.

Értelmezési tartomány: $x \in \left[0; \infty\right[\setminus \{16\}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Zérushely: $\sqrt{x} - 3 = 0 \Rightarrow x = 9$.

c) $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$. Értelmezési tartomány: $x \in \left]2; \infty\right[, \quad x \in \mathbb{R}$.

Zérushely: $x = -2$.

d) $\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$. Értelmezési tartomány: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Zérushely: $x = -3$.

e) Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, \quad x \neq \dfrac{7}{2}$.

Zérushely: nincs, mert $\dfrac{2x-7}{4x-14} = \dfrac{2x-7}{2(2x-7)} = \dfrac{1}{2}$ konstans függvény.

f) $x > 0$ és $\lg x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$. Tehát az értelmezési tartomány: $x \in \left]0; \infty\right[\setminus \{1\}$.

Zérushely: $x = 9$.

g) Értelmezési tartomány: $x > 0$ és $x > -1$ miatt $x \in \left]0; \infty\right[$.

Zérushely: $x = 1$.

h) $x > 0, \ x \neq 1, \ 4x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{4}$. Értelmezési tartomány: $x \in \left]\dfrac{1}{4}; \infty\right[\setminus \{1\}$.

Zérushely: $x = \dfrac{1}{2}$.

5368 *a)* A logaritmus miatt:

$$4x^2 - 5x + 1 > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{4} \text{ vagy } x > 1.$$

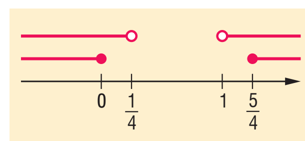
A négyzetgyök miatt:

$$\lg(4x^2 - 5x + 1) \geq 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 \geq 1.$$

Ebből:

$$4x^2 - 5x \geq 0 \Rightarrow x(4x - 5) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \text{ vagy } x \geq \frac{5}{4}.$$

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, \quad x \in \left]-\infty; 0\right] \cup \left[\dfrac{5}{4}; \infty\right[$.



b) A logaritmus miatt:

$$x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4.$$

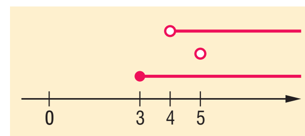
A tört miatt:

$$\lg(x - 4) \neq 0 \Rightarrow x \neq 5.$$

A négyzetgyök miatt:

$$x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3.$$

Értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R}, \quad x \in \left]4; 5\right[\cup \left]5; \infty\right[$.





5369 $-x^2+18x-17>0 \;\Rightarrow\; x^2-18x+17<0 \;\Rightarrow\; 1<x<17.$
1 és 17 között 6 db prímszám van: 2; 3; 5; 7; 11; 13.

5370 $3=\sqrt{2-x} \;\Rightarrow\; x=-7.$

5371 Egy adott függvény x tengelymetszetét az $y=0$-val, az y tengelymetszetét az $x=0$ behelyettesítésével kapjuk.

a) Az x tengelyt $\frac{5}{3}$-nál, az y tengelyt -5-nél metszi.

b) Az x tengelyt 3-nál metszi, az y tengelyt nem metszi.

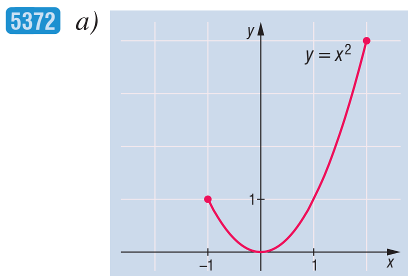
c) A függvény az origón halad át.

d) Az x tengelyt 1-nél, az y tengelyt -1-nél metszi.

e) Az x tengelyt az 1 helyen metszi, az y tengelyt nem metszi.

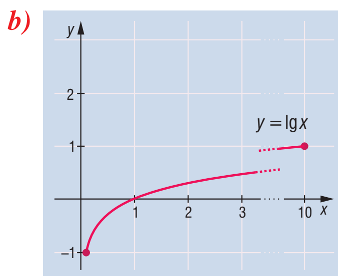
f) Az x tengelyt a -2 helyen, az y tengelyt -3-nál metszi.

5372 *a)*



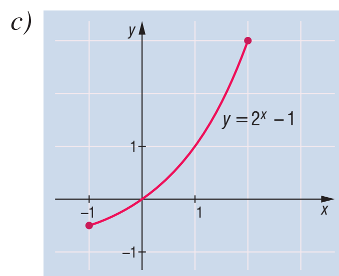
$y\in[0;4]$;

b)



$y\in[-1;1]$;

c)



$y\in\left]-\frac{1}{2};3\right[$.

5373 *a)* Értékkészlete: $y\in[0;2]$. *b)* Értékkészlete: $y\in[-4;0]$.
c) Értékkészlete: $y\in[0;1]$. *d)* Értékkészlete: $[1;3]$.

5374 Például:

a) $x\mapsto x^2+4,\quad x\mapsto|x-3|+7,\quad x\mapsto\sqrt{3-x}+5;$

b) $x\mapsto -x^2-3,\quad x\mapsto -|x-2|-5,\quad x\mapsto -|x|-1;$

c) $x\mapsto\sqrt{x-5},\quad x\mapsto(x-3)^2,\quad x\mapsto|x+7|;$

d) $x\mapsto(x-2)^2-5,\quad x\mapsto|x+7|-5;$

e) $x\mapsto -x^2+6,\quad x\mapsto -|x-1|+6.$

5375 *a)* $x=\frac{5}{2}$; *b)* $x=-3$ és $x=0$; *c)* $x=-\frac{5}{3}$; *d)* $x=-1$.

5376 *a)* $x^3-x=0 \;\Rightarrow\; x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)=0$, tehát a zérushelyek: $x_1=0$, $x_2=-1$ és $x_3=1$.

b) $(x-2)\cdot\log_2 x=0$, ha $x-2=0$, azaz $x_1=2$, vagy $\log_2 x=0$, azaz $x_2=1$.

c) $\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=0$, ha $x=2$.



d) $x^2 - 5 \cdot |x| + 6 = 0$, zérushelyek: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = -3$.

e) $\sqrt{4x - x^2} = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

f) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$, $0 < x < \pi$, $x = \frac{\pi}{2}$.

g) $\frac{x^3 - x}{x - 1} = x(x + 1)$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

5377 Legnagyobb érték: $y = 8$ az $x = 0$ helyen.

5378 *a)* Maximuma van az $x = 2$ helyen, értéke: $y = 3$.

b) Minimuma van az $x = 0$ helyen, értéke: $y = -5$.

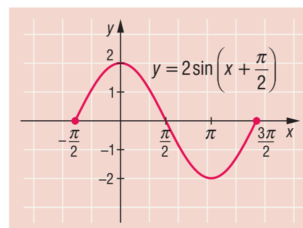
c) Maximuma van az $x = -2$ helyen, értéke: $y = 0$.

d) Maximuma van az $x = 5$ helyen, értéke: $y = 0$.

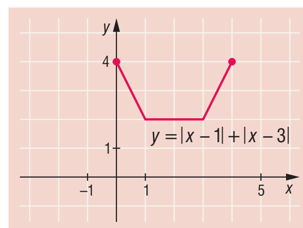
e) Minimuma van az $x = 0$ helyen, értéke: $y = 4$.

f) Minimuma van az $x = 0$ helyen, értéke: $y = -3$.

5379 *a)* A függvény legnagyobb értéke $f(0) = 2$,
legkisebb értéke $f(\pi) = -2$.



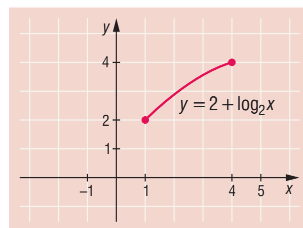
b) A függvény legnagyobb értéke $f(0) = f(4) = 4$,
legkisebb értéke $f(x) = 2$, ha $1 \le x \le 3$.



c) A logaritmus azonosságát felhasználva $h(x)$ így írható:

$$h(x) = 2 + \log_2 x, \quad 1 \le x \le 4.$$

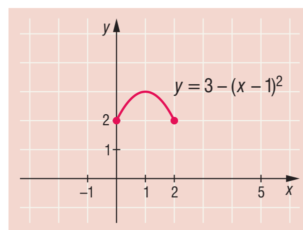
A függvény legnagyobb értéke $h(4) = 4$,
legkisebb értéke $h(1) = 2$.



d) A $k(x)$ így írható:

$$k(x) = 3 - (x - 1)^2, \quad 0 \le x \le 2.$$

A függvény legnagyobb értéke $k(1) = 3$,
legkisebb értéke $k(0) = k(2) = 2$.

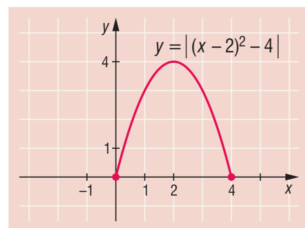




e) A $j(x)$ így írható:

$$j(x)=\left|(x-2)^2-4\right|.$$

A függvény legnagyobb értéke $j(2)=4$, legkisebb értéke $j(0)=j(4)=0$.



f) A függvény szigorúan csökken az értelmezési tartományban, így legnagyobb értéke 0, legkisebb értéke -2.

g) A függvény $[0;\ 2]$-ban csökken, legnagyobb értéke 0, legkisebb értéke -4.

h) A függvény legnagyobb értéke 1, legkisebb értéke 0.

5380 A pozitív osztók számát foglaljuk táblázatba:

Szám	1	2	3	4	5	6
Pozitív osztók száma	1	2	2	3	2	4

a) Értékkészlet: $\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

b) Minimuma van az $x=1$ helyen, értéke: $y=1$; maximuma van az $x=6$ helyen, értéke: $y=4$.

c) Nincs zérushelye a függvénynek.

5381 *a)* $f(x)=10(x^2-2x+1)=10(x-1)^2$.

Zérushely: $x=1$ helyen.

Minimum helye: $x=1$, értéke: $y=0$.

b) $g(x)=(x-7)^2$.

Zérushely: $x=7$ helyen.

Minimum helye: $x=7$, értéke: $y=0$.

c) $h(x)=-(x^2+5x-6)=-\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-\frac{24}{4}\right]=-\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\right]=-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{49}{4}.$

Zérushely: $x_1=1$ és $x_2=-6$.

Maximum helye: $x=-\frac{5}{2}$, értéke: $\frac{49}{4}$.

d) $i(x)=3\left[x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}\right]=3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{12}{36}\right]=3\left[\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right]=3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{12}.$

Zérushely: $x_1=\frac{5+\sqrt{13}}{6}$, $x_2=\frac{5-\sqrt{13}}{6}$.

Minimum helye: $x=\frac{5}{6}$, értéke: $-\frac{13}{12}$.



e) $j(x)=4\left[x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]=4\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{24}{16}\right]=4\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{16}\right]=4\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{25}{4}.$

Zérushely: $x_1=-1,\ x_2=\frac{3}{2}.$

Minimum helye: $x=\frac{1}{4}$ értéke: $-\frac{25}{4}.$

f) $k(x)=-5\left[x^2-\frac{16}{5}x+\frac{3}{5}\right]=-5\left[\left(x-\frac{8}{5}\right)^2-\frac{64}{25}+\frac{15}{25}\right]=-5\left[\left(x-\frac{8}{5}\right)^2-\frac{49}{25}\right]=-5\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{49}{5}.$

Zérushely: $x_1=\frac{1}{5},\ x_2=3.$

Maximum helye: $x=\frac{8}{5}$, értéke: $\frac{49}{5}.$

5382 Bármilyen helyes megoldás jó, például: $[-4;0]$, $[3;9]$, $[5;7]$ stb.

5383 *a)* Értelmezési tartomány: $x\in\,]-4;4]$; $(x\in\mathbb{R})$.
Értékkészlet: $y\in[-2;4]$.

b) Zérushely: $x_1=-2$ és $x_2=1$.

c) Minimuma van a függvénynek az $x=0$ helyen, értéke $y=-2$.
Maximuma van az $x=3$ helyen, értéke $y=4$.

d) $f>0\ \Rightarrow\ x\in\,]-4;-2[\,\cup\,]1;4]$.

e) $f<0\ \Rightarrow\ x\in\,]-2;1[$.

f) Szigorúan monoton csökkenő, ha $x\in\,]-4;0]\cup[3;4]$.

5384 *a)* Az f definícióját így érdemes átalakítani:

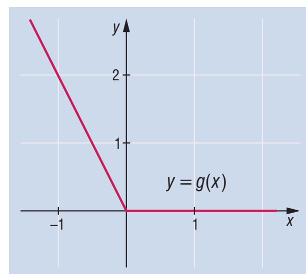
$$f(x)=(x+1)^2+4.$$

A függvény képe egy parabola, amelynek tengelypontja a (–1; 4) pontban van, és „felfelé nyílik”, tehát $]-\infty;-1]$-ban csökken, $[-1;+\infty[$-ban nő.

b) A függvény definíciója így írható:

$$g(x)=|x|-x=\begin{cases}-2x, & \text{ha } x<0,\\ 0, & \text{ha } x\ge 0.\end{cases}$$

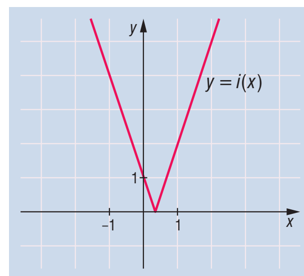
A függvény $]-\infty;0]$-ban csökken, $[0;+\infty[$-ban konstans, tágabb értelemben nevezhetjük növekvőnek és csökkenőnek is.



c) Az 1-nél nagyobb alapú exponenciális függvény a teljes értelmezési tartományában nő.

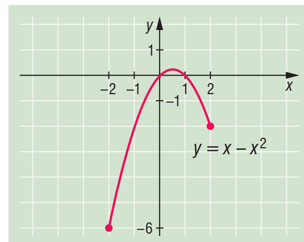


d) A függvény a $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right]$-ban csökken, az $\left[\frac{1}{3}; \infty\right[$-ban nő.



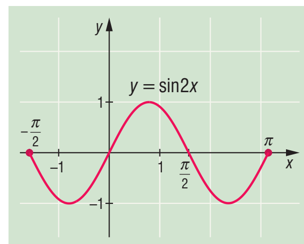
5385 *a)* Ábrázoljuk az $f(x) = x - x^2, \quad -2 \le x \le 2$ függvény grafikonját:

A függvény képe egy parabola darabja, tengelypontja $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$-ban van, lefelé „nyílik”. Így a függvény $[-2; 0{,}5]$-ban nő, $[0{,}5; 2]$-ban csökken. A 0,5 helyen maximuma van, a maximum értéke 0,25, a -2 helyen minimuma van, a minimum értéke -6.

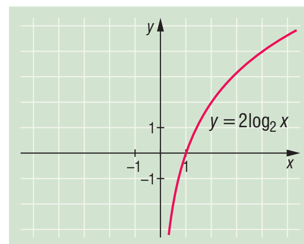


b) Ábrázoljuk a $g(x) = \sin 2x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$ függvény grafikonját:

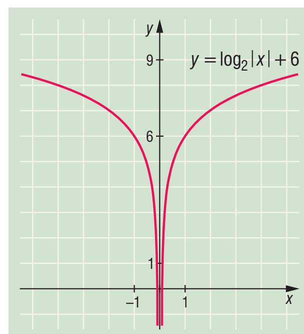
A függvény $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$-ban, valamint $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$-ban csökken, a $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$-ban, valamint a $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$-ban nő. Maximuma van a $\frac{\pi}{4}$ helyen, itt értéke 1, minimuma van a $-\frac{\pi}{4}$ és a $\frac{3\pi}{4}$ helyeken, itt értéke -1.



c) A függvény a teljes értelmezési tartományában szigorúan nő, szélsőértéke nincs.

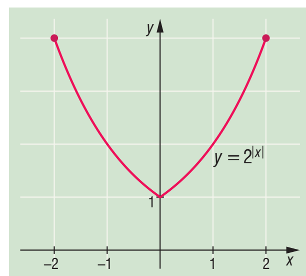


d) A függvény $]-\infty; 0[$-ban csökken, $]0; +\infty[$-ban nő. Szélsőértéke nincs.



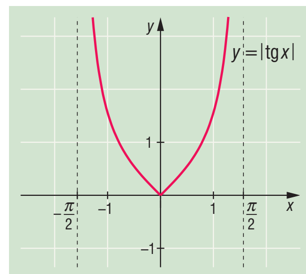


e) A függvény $[-2; 0]$-ban csökken, $[0; 2]$-ban nő, az $x = 0$ helyen minimuma van, itt az értéke $y = 1$, az $x = -2$ és $x = 2$ helyen maximuma van, itt az értéke $y = 4$.

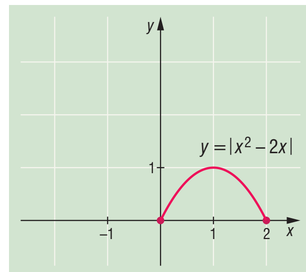


f) Ábrázoljuk a $k(x) = |\operatorname{tg} x|$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ függvény grafikonját:

A függvény $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right]$-ban csökken, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$-ban nő. Az $x = 0$ helyen minimuma van, itt az értéke $y = 0$. Maximuma nincs a függvénynek.



g) A függvény $[0; 1]$-ban nő, $[1; 2]$-ban csökken, az $x = 1$ helyen maximuma van, itt az értéke $y = 1$, az $x = 0$ és $x = 2$ helyen minimuma van, értéke ezeken a helyeken $y = 0$.



5386 *a)* páratlan függvény; *b)* páratlan függvény; *c)* se nem páros, se nem páratlan; *d)* páratlan függvény; *e)* páros függvény; *f)* páros függvény; *g)* páratlan fügvény; *h)* a függvény se nem páros, se nem páratlan.

5387 *a)* π; *b)* 4π; *c)* 2π; *d)* $\frac{2\pi}{3}$; *e)* $\frac{\pi}{2}$.

5388 *a)* Páros, periodikus 2π szerint. *b)* Páratlan, periodikus 2π szerint. *c)* Páros, periodikus bármely pozitív valós szám szerint. *d)* Páratlan, periodikus $\frac{\pi}{3}$ szerint. *e)* Nem páros, nem páratlan, nem periodikus. *f)* Páratlan, nem periodikus. *g)* Páratlan, periodikus $\frac{2\pi}{3}$ szerint. *h)* Páros, periodikus 4π szerint. *i)* Páros, nem periodikus.

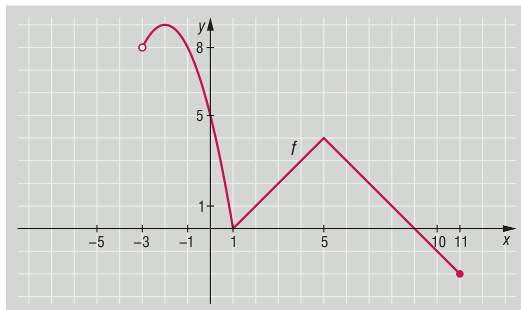
5389 *a)* 4.; *b)* 1.; *c)* 1.; *d)* 4.; *e)* 2.; *f)* 4.; *g)* 2.; *h)* 3.



5390 *a)* $f(2) = 9 + 2 \cdot 3^4 = 9 + 162 = 171$, $\quad g(32) = 32 \cdot \log_2 32 = 32 \cdot 5 = 160$.
$f(2) > g(32)$.

b) A diszkrimináns 0 $\Rightarrow$ érinti x tengelyt a parabola (1 zérushely van).
$f(2010) = 2010$ miatt felfelé nyíló a parabola, s mert van pozitív értéke a parabolának, kizárólag a (4) lehet a megoldás.

5391 *a)* Értelmezési tartomány: $x \in \left]-3; 11\right]$.
Értékkészlet: $y \in [-2; 9]$.
Zérushely: $x_1 = 1$ és $x_2 = 9$.
Minimum helye: $x = 11$, értéke: $y = -2$.
Maximum helye: $x = -2$, értéke: $y = 9$.
A függvény szigorúan monoton növekvő a $\left]-3; -2\right]$ és $[1; 5]$-on, szigorúan monoton csökkenő a $[-2; 1]$ és $[5; 11]$-on.



b) $f(-1) = 8$; $f(1) = 0$; $f(3) = 2$; $f(-4)$-nek nincs értelme, mert $x = -4$, ami nem esik az értelmezési tartományba; $f(10) = -1$.

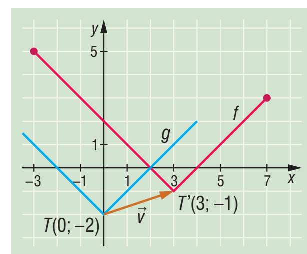
c) $f(x) < 0 \;\Rightarrow\; x \in \left]9; 11\right]$.

5392 *a)* $f\colon x \mapsto |x - 3| - 1$.

b) Zérushelyek: f-nél: $x_1 = 2$ és $x_2 = 4$,
g-nél: $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$.

c) $y \in [-1; 5]$. Lásd ábra.

d) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, $x_5 = 6$, $x_6 = 7$.



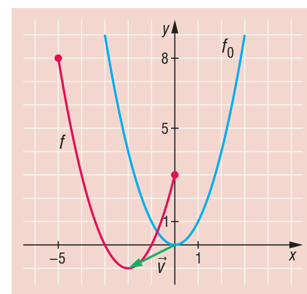
5393 Az f_0-ból az f függvény grafikonját egy $\vec{v}(-2; -1)$ vektorral való eltolással kaptuk. Az eredeti függvény tengelypontja $T(0; 0)$, az f függvényé $T'(-2; -1)$.

a) $y \in [-1; 8]$.

b) Pozitív az adott függvény, ha $x \in [-5; -3[\cup]-1; 0]$.

c) $f(-1) = 0$, $f(-2) = -1$, $f(-4) = 3$.

d) $f(-4) = 3$ és $f(0) = 3$, vagyis a függvény az $x = -4$ és az $x = 0$ helyen veszi fel a 3 értéket.



5394 *a)* $x \mapsto x^2 - 2x$ zérushelyei $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, mert $x^2 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x(x-2) = 0$.
$f(1,3) = 1{,}3^2 - 2 \cdot 1{,}3 = 1{,}69 - 2{,}6 = -0{,}91$.

b) $g(x) = -|x| + 7$ maximum értéke: $y = 7$, amit az $x = 0$ helyen vesz fel. Jelölése: $g(0) = 7$.

c) Mivel a szinuszfüggvény korlátos, a $\sin x$ értékkészlete $y \in [-1; 1]$.
A -2 transzformáció az y tengely mentén 2 egységgel lefelé tolja el a $\sin x$ függvényt, ezért $\sin x - 2$ értékkészlete: $[-3; -1]$.

d) $\log_2(2x - 20) - 1 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \geq 11$ esetén. (Értelmezési tartomány: $x > 10$.)

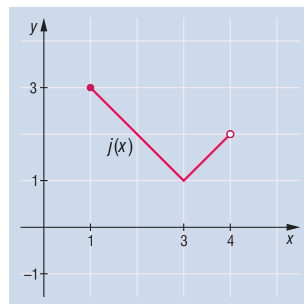


e) Átalakítás után:

$$j(x) = |x - 3| + 1.$$

A keresett függvényérték:

$$\frac{j(1) - j(3)}{j(2)} = \frac{3-1}{2} = 1.$$



5395 A négyzetgyök miatt:

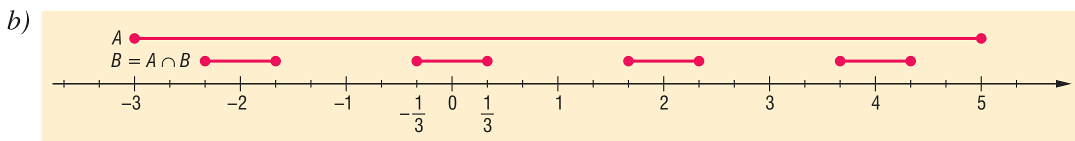
$$-x^2 + 2x + 15 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 15 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ha } -3 \leq x \leq 5.$$

Szintén a négyzetgyök miatt:

$$2\cos \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \cos \pi x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow -\frac{1}{3} + 2k \leq x \leq \frac{1}{3} + 2k.$$

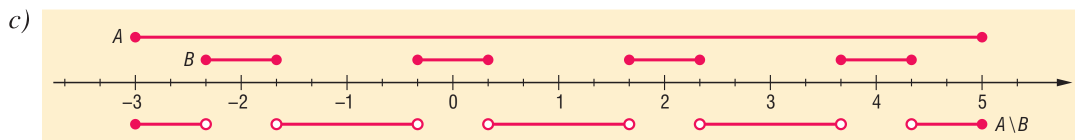
a) A halmaz: $A = [-3; 5]$, a B halmaz: $B = \left[-\frac{1}{3} + 2k; \frac{1}{3} + 2k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

b)



$$A \cap B = \left[-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right] \cup \left[\frac{11}{3}; \frac{13}{3}\right].$$

c)



$$A \setminus B = \left[-3; -\frac{7}{3}\right[\cup \left]-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right[\cup \left]\frac{7}{3}; \frac{11}{3}\right[\cup \left]\frac{13}{3}; 5\right].$$

5396 *a)* $g(x) = \left|\sqrt{(x-4)^2} - 2\right| = \big||x - 4| - 2\big|.$

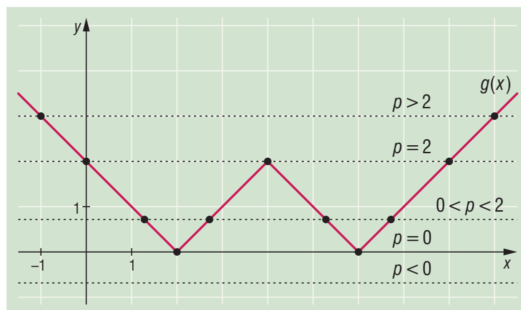
b) Ha $p < 0$, akkor a $g(x) = p$ egyenletnek nincs megoldása.

Ha $p = 0$, akkor 2 megoldás van.

Ha $0 < p < 2$, akkor 4 megoldás van.

Ha $p = 2$, akkor 3 megoldás létezik.

Ha $p > 2$, akkor 2 megoldás van.





5397 Az $x^2 + bx + c$ teljes négyzetté alakítását elvégezve:

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c.$$

Mivel a szélsőérték az $a = 1$ $(a > 0)$ miatt kizárólag minimum lehet, ezért csak ezt kell vizsgálnunk. Így a felfelé nyíló parabola tengelypontja $C(-2; 4)$. Tehát az eredeti $x \mapsto x^2$ parabolát az x tengely mentén balra 2 egységgel és az y tengely mentén felfelé 4 egységgel toltuk el, ezért a teljes négyzet $y = (x + 2)^2 + 4$ alakú:

$$\frac{b}{2}=2 \quad \Rightarrow \quad b=4,$$

valamint

$$-\frac{b^2}{4}+c=4 \quad \Rightarrow \quad c=8.$$

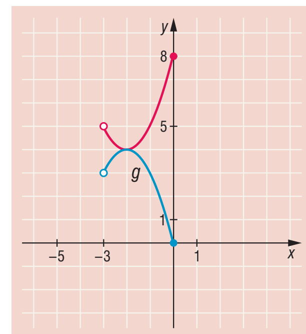
Tehát az adott f függvény hozzárendelési szabálya:

$$x \mapsto x^2+4x+8, \quad \text{vagyis} \quad x \mapsto (x+2)^2+4.$$

a) Értékkészlet: $y \in [4; 8]$.

b) Például: $g\colon\ ]-3; 0] \to \mathbb{R},\ x \mapsto -(x+2)^2+4.$

Ekkor az értékkészlet: $y \in [0; 4],\ y \in \mathbb{R}$ (ld. ábra: g).



5398 Az f definícióját írjuk át így:

$$f(x)=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{(x^2+1)\cdot 1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mivel $x^2 + 1 \geq 1$ bármely $x \in \mathbb{R}$-re, a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján:

$$0<\sqrt{(x^2+1)\cdot 1} \leq \frac{x^2+1+1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \leq \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

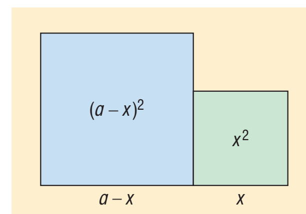
Az egyenlőség csak akkor lehet igaz, ha $x^2 + 1 = 1$, azaz $x = 0$. Az f függvény legkisebb értéke tehát 2, és ezt az $x = 0$ helyen veszi fel.

5399 A két négyzet területösszegét leíró függvény (az ábra jelöléseit követve):

$$f(x) = (a-x)^2 + x^2,\ 0 \leq x \leq a.$$

A számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség alapján:

$$\frac{(a-x)^2+x^2}{2} \geq \left(\frac{a-x+x}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4},$$



és egyenlőség csak akkor van, ha a két szám egyenlő, azaz $a - x = x$, tehát $x = \dfrac{a}{2}$.



Azt kaptuk, hogy a két részre rajzolt négyzetek területének összege akkor a legkisebb, ha a részek egyenlők, tehát mindegyik $\frac{a}{2}$ hosszúságú.

Ekkor a két terület összege $\frac{a^2}{2}$.

A feladatot a közepek közti egyenlőtlenség alkalmazása nélkül is megoldhatjuk, ha a következő átalakításokat elvégezzük:

$$f(x) = (a - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2,$$

$$f(x) = 2\left[\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right] + a^2,$$

$$f(x) = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}, \quad 0 \le x \le a.$$

A kapott másodfokú függvény grafikonja „felfelé nyíló” parabola, melynek az $x = \frac{a}{2}$ helyen van minimuma, a minimum értéke pedig $\frac{a^2}{2}$.

5400 Tegyük fel, hogy $x_1 < x_2$. Mutassuk meg, hogy ekkor $f(x_1) < f(x_2)$. Ez teljesül, mert

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(x_2^3 - x_1^3\right) + 3(x_2 - x_1) > 0,$$

hiszen az összeg mindkét tagja pozitív.

5401 Azonos átalakítással az f definícióját így írhatjuk:

$$f(x) = x^2 \cdot (x^4 - 6x^2 + 12) = x^2 \cdot \left((x^2 - 3)^2 + 3\right) \ge 0.$$

Ez nyilván igaz, hiszen $x^2 \ge 0$, $(x^2 - 3)^2 \ge 0$, $(x^2 - 3)^2 + 3 > 0$. Az is látható, hogy $f(x) = 0$ csak akkor teljesül, ha $x = 0$. A függvény legkisebb értéke tehát 0, és ezt az $x = 0$ helyen veszi fel.

5402 Alakítsuk át a függvényt megadó kifejezést:

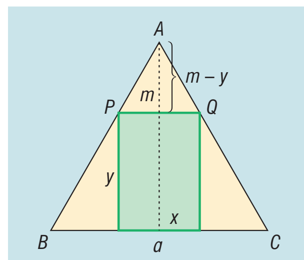
$$f(x) = 3x^2 - 2(a + b + c) \cdot x + a^2 + b^2 + c^2 =$$

$$= 3\left(x - \frac{a + b + c}{3}\right)^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 3\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2.$$

A kapott alakból világos, hogy a függvény a legkisebb értékét az $x = \frac{a + b + c}{3}$ helyen veszi fel.

5403 A beírt téglalap oldalai legyenek x és y. Az ábra jelölései szerint az $ABC_\triangle$ és az $APQ_\triangle$ hasonló. Ennek alapján:

$$\frac{m - y}{x} = \frac{m}{a}, \quad \text{azaz} \quad y = m - \frac{m}{a}x = \frac{m}{a}(a - x).$$



A téglalap területe:

$$xy = \frac{m}{a}x \cdot (a - x), \quad \text{ahol} \quad 0 < x < a.$$



A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

$$\frac{m}{a}x \cdot (a - x) \le \frac{m}{a}\left(\frac{x + a - x}{2}\right)^2 = \frac{ma}{4},$$

és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x = a - x$, azaz $x = \frac{a}{2}$, és ekkor $y = \frac{m}{2}$.

5404 Írjuk át $f(x)$-et a következő alakba:

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-3} = x - 3 + \frac{1}{x-3} + 2.$$

Mivel $x > 3$, ezért $x - 3 > 0$, így a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alapján:

$$x - 3 + \frac{1}{x-3} \ge 2 \cdot \sqrt{(x-3) \cdot \frac{1}{x-3}} = 2,$$

amiből következik, hogy $f(x) \ge 4$. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x - 3 = 1$, azaz ha $x = 4$.

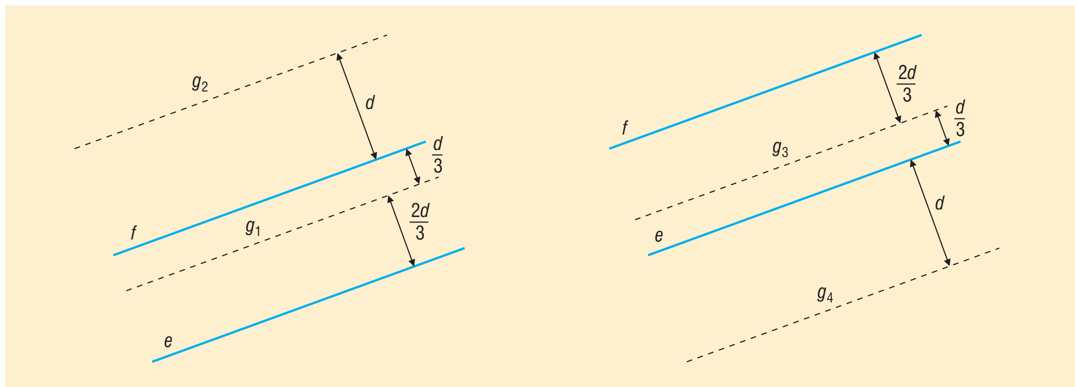


GEOMETRIA – ÖSSZEFOGLALÁS

Alapvető fogalmak – megoldások

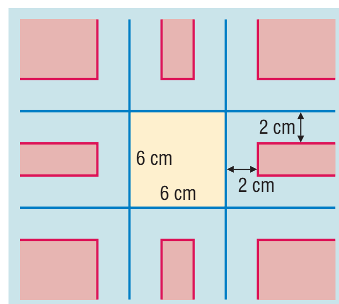
5405 Legyen a két út az e és az f egyenes. Azon pontok, amelyek e-től kétszer akkora távolságra vannak, mint f-től, lehetnek a két egyenes között, és lehetnek f által meghatározott azon félsíkban, amelyik nem tartalmazza e-t.

Ezek a pontok az ábrán látható e-vel és f-fel párhuzamos g_1 és g_2 egyenesek pontjai.

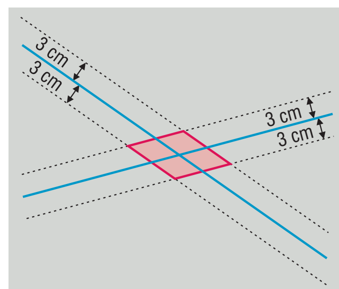


Hasonlóan azon pontok, amelyek f-től kétszer akkora távolságra vannak, mint e-től, az e-vel és f-fel párhuzamos g_3 és g_4 egyenesek pontjai.

5406 Az adott tulajdonságú pontok az ábrán pirossal jelölt pontok.



5407 Az adott tulajdonságú pontok az ábrán pirossal jelölt pontok.



5408 A 2010 pontot úgy kell megadni, hogy egy gömb felületén helyezkedjenek el.

5409 A térben ezek a pontok egy hengerpaláston, vagy az azt lezáró két félgömbön helyezkedhetnek el.



5410 *a)* A 10 pont a térben $\binom{10}{2}$ egyenest határoz meg.

b) A 10 pont a térben $\binom{10}{3}$ háromszöget határoz meg.

5411 Egy tetraéder lapjainak síkjai 15 részre osztják a teret.

5412 *a)* A szög nagysága: 100º.
b) A szög nagysága: 130º.

5413 *a)* A keresett szögek: 36º és 54º.
b) A keresett szögek: 60º és 30º.

5414 A 48º-os szögnek a szögfelezője a másik párhuzamos egyenest 24º-os szögben metszi.

5415 A szögek nagysága: 75º és 105º.

5416 A négy szögfelező egyenes téglalapot határoz meg.

5417 A visszavert fénysugár 40º-os szögben fordul el.

5418 Az oldalfelező merőlegesek metszéspontja éppen a 10 cm-es oldal felezőpontja, tehát a távolság 0.

5419 A BC oldal a metszéspontból 125º-os szögben látszik.

5420 A háromszög oldalainak hossza:

$$a = \frac{6}{\operatorname{tg} 35^\circ} + \frac{6}{\operatorname{tg} 40^\circ} \approx 15{,}72 \text{ cm},$$
$$b = \frac{6}{\operatorname{tg} 15^\circ} + \frac{6}{\operatorname{tg} 40^\circ} \approx 29{,}54 \text{ cm},$$
$$c = \frac{6}{\operatorname{tg} 15^\circ} + \frac{6}{\operatorname{tg} 35^\circ} \approx 30{,}96 \text{ cm}.$$

5421 A telek negyedik oldala 30 m.

5422 A négyzetes oszlop alaplapja a testátlójával 54,74º-os szöget zár be.

5423 A szabályos négyoldalú gúla
a) alaplapja az oldaléllel 79,98º; *b)* alaplapja az oldallappal 82,87º;
c) két szemben levő oldallapja 14,26º szöget zár be.

5424 A szabályos oktaéder csúcsainak száma hat, ezért a csúcsokon áthaladó egyenesek száma: $\binom{6}{2}$.
Az összes eset száma:

$$\binom{\binom{6}{2}}{2} = \binom{15}{2} = 105.$$

Az A csúcson áthaladó 5 egyenes közül kettőt $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen választhatunk. A kedvező esetek száma 10.
Így annak a valószínűsége, hogy mind a két kiválasztott egyenes áthalad az oktaéder A csúcsán:

$$\frac{10}{105} = \frac{2}{21} \approx 0{,}096.$$

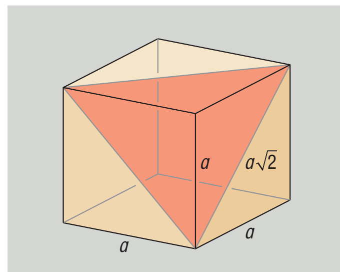


5425 Egy a élű kocka nyolc csúcsa közül hármat $\binom{8}{3} = 56$-féleképpen választhatunk ki.

Egy kocka csúcsai 56 háromszöget határoznak meg.

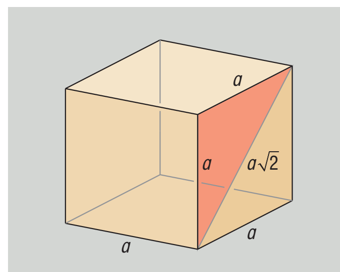
Ezek között a háromszögek között azok száma, amelyeknek minden oldala $a\sqrt{2}$ hosszúságú, a kocka csúcsainak számával egyezik meg, azaz 8 darab ilyen háromszög van. Területük összege:

$$8 \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4a^2 \cdot \sqrt{3}.$$



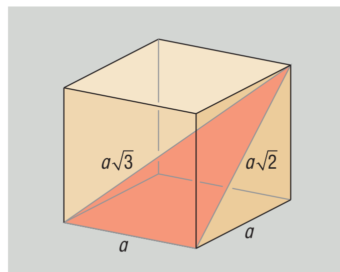
Azon háromszögek száma, amelyeknek két oldala a, egy pedig $a\sqrt{2}$ hosszúságú, a lapok számának a négyszeresese, azaz 24. Területük összege:

$$24 \cdot \frac{a^2}{2} = 12a^2.$$



Azon háromszögek száma, amelyeknek oldalai a, $a\sqrt{2}$ és $a\sqrt{3}$ hosszúságúak, az élek számának a kétszerese, azaz 24. Területük összege:

$$24 \cdot \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = 12a^2 \cdot \sqrt{2}.$$



A háromszögek területeinek az összege:

$$4a^2 \cdot \sqrt{3} + 12a^2 + 12a^2 \cdot \sqrt{2} = 4a^2 \cdot \left(\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{2}\right) =$$

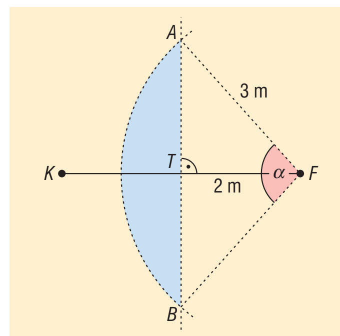
$$= 400 \cdot \left(\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{2}\right) \approx 3589{,}88 \text{ cm}^2.$$

5426 Jelölje a mellékelt ábrán a kút helyét K, a fa helyét F.

A virágágyás pontjai az F középpontú 3 méter sugarú körön belül azok a pontok, amelyek a KF szakasz felezőmerőlegesének K pontot tartalmazó félsíkjában vannak.

A virágágyás egy $r = 3$ m sugarú körszelet területe. A körszelet α középponti szögét a TFA derékszögű háromszögből számíthatjuk:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 96{,}38°.$$

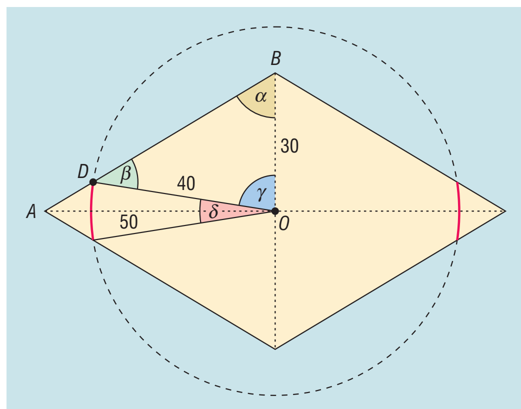


A virágágyás területe úgy számolható, hogy az α középponti szögű körcikk területéből kivonjuk az ABF háromszög területét:

$$T = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360°} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2} = 3^2 \cdot \pi \cdot \frac{96{,}38°}{360°} - \frac{3^2 \cdot \sin 96{,}38°}{2} \approx 3{,}10 \text{ m}^2.$$



5427 A park középpontja legyen O, egy oldala AB. Az ABO derékszögű háromszög befogóinak hossza 30 m, illetve 50 m.



Mivel O ponttól a sétány 40 méterre halad, az O középpontú, 40 m sugarú kör az AB oldalt egy belső D pontban metszi, így a sétány két körív.

A körív hosszának kiszámításához szükség van az ív δ középponti szögére.

Az ábra jelölései alapján az α szöget az AOB derékszögű háromszögből számolhatjuk:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{50}{30} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 59{,}04°.$$

A BOD háromszögben ismert két oldal és a hosszabbikkal szemben levő szög. A szinusztétel alapján a β szög számolható:

$$\frac{\sin\beta}{\sin 59{,}04°} = \frac{30}{40} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{30}{40}\cdot \sin 59{,}04° \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 40{,}03°.$$

(A β tompaszög nem lehet, mert nem a leghosszabb oldallal szemközti szög.)

A BOD háromszög γ szöge:

$$180° - 59{,}04° - 40{,}03° = 80{,}93°.$$

Mivel a rombusz átlói merőlegesen metszik egymást:

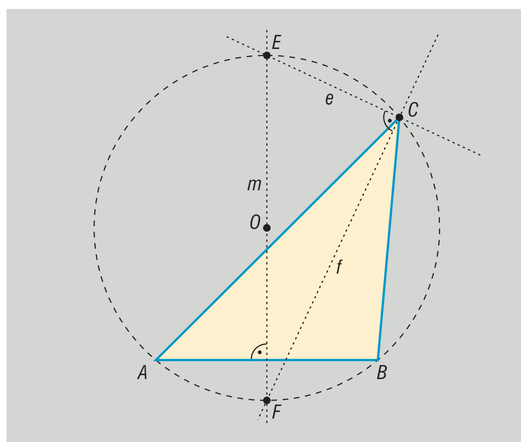
$$\frac{\delta}{2} = 90° - 80{,}93° = 9{,}07° \quad \Rightarrow \quad \delta = 18{,}14°.$$

Az egyik sétány hossza:

$$l = 2\cdot r\cdot \pi \cdot \frac{\delta}{360°} = 2\cdot 40\cdot \pi\cdot \frac{18{,}14°}{360°} \approx 12{,}66 \text{ m}.$$

A tengelyes szimmetria miatt a másik sétány hossza is 12,66 m.

5428 Az AC és BC oldalegyenesektől egyenlő távol lévő pontok halmaza a háromszög C csúcsánál lévő külső és belső szögfelezők. A külső szögfelező egyenese legyen e, a belső szögfelező egyenese f.



Az A és B csúcsoktól egyenlő távol lévő pontok halmaza az AB oldal m oldalfelező merőlegese.

a) Mivel $AC \neq BC$, a belső szögfelező nem eshet egybe az oldalfelező merőlegessel. Ez azt jelenti, hogy a két szögfelezőnek az oldalfelező merőlegessel egy-egy metszéspontja van, tehát két olyan pont van, amely a háromszög AC és BC oldalegyeneseitől, valamint az A és a B csúcstól is egyenlő távol van.

Az m-nek f-fel vett metszéspontja legyen F, e-vel vett metszéspontja E.

b) Ismert, hogy egy háromszög belső szögfelezője és a szemben lévő oldal felezőmerőlegese a háromszög köré írható körön metszik egymást, vagyis az F pont rajta van a háromszög köré írható körön.



A kör AB húrjának m felezőmerőlegesére illeszkedik a kör egyik átmérője.

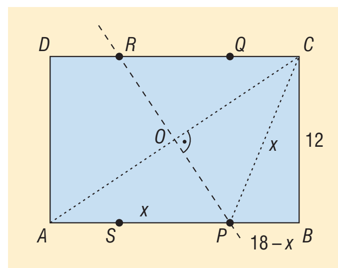
Egy szögnek és mellékszögének felezője merőleges egymásra, tehát e merőleges f-re.

Ezek alapján az m, f és e egyenesek derékszögű háromszöget határoznak meg. Ennek a derékszögű háromszögnek a C-nél van derékszöge, amely az átfogó F csúcsával együtt rajta van az ABC háromszög köré írható körén.

A Thalész-tétel megfordítása értelmében a háromszög E csúcsa is pontja ennek a körnek, és az FE távolság az ABC háromszög köré írható körének átmérője.

A két metszéspont távolsága 20 cm.

5429 Az $ABCD$ téglalap oldalainak hossza $AB = 18$ m és $BC = 12$ m, és az átlók metszéspontja O.



A téglalap síkjában a szemben levő A és C csúcsoktól egyenlő távol lévő pontok halmaza az AC átló felezőmerőlegese. Ez az egyenes az AB oldalt egy P pontban metszi. Legyen $AP = PC = x$.

A PBC derékszögű háromszög átfogója x, egyik befogója $18 - x$, másik befogója 12. A háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

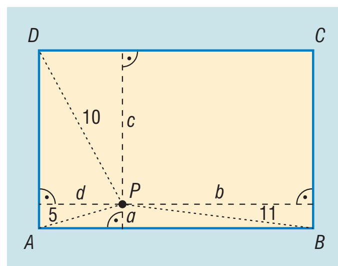
$$x^2 = (18 - x)^2 + 12^2 \quad \Rightarrow \quad x = 13.$$

Az AB oldalon a B csúcstól $18 - 13 = 5$ méter távolságra található egy, a feladat feltételeit kielégítő pont.

A tengelyes és középpontos szimmetria miatt a telek határán négy pont van (P, Q, R és S), amelyek a telek valamely két szemközti sarkától egyenlő távol vannak.

A négy pont közül kettő-kettő a telek hosszabbik oldalán helyezkedik el, a sarkoktól 5 m távolságra.

5430 A P pontnak a téglalap AB, BC, CD és AD oldalától vett távolsága rendre legyen a, b, c és d.



A téglalap csúcsainak P ponttól vett távolságai a Pitagorasz-tétellel a, b, c és d segítségével megadhatók:

$$10^2 = c^2 + d^2,$$
$$5^2 = a^2 + d^2,$$
$$11^2 = a^2 + b^2.$$

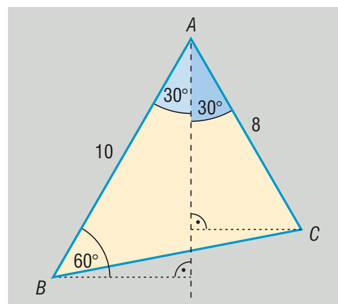
A $PC = \sqrt{b^2 + c^2}$ távolságot kell meghatároznunk.

Az előbbi egyenletek közül az elsőt és harmadikat adjuk össze, majd az összegből vonjuk ki a másodikat.

A $196 = b^2 + c^2$ összefüggéshez jutunk, ahonnan $PC = 14$ adódik.

A téglalap C csúcsa a P ponttól 14 cm távolságra van.

5431 *a)* A háromszög AB oldala, a háromszög A csúcsából kiinduló belső szögfelezője és a B csúcsból a belső szögfelezőre bocsátott merőleges egy fél szabályos háromszöget határoz meg. A fél szabályos háromszög rövidebbik befogója az AB átfogó fele, ami a B csúcsnak a szögfelezőtől vett távolsága, vagyis 5 cm.



Hasonlóan adódik, hogy C csúcsnak a szögfelezőtől vett távolsága 4 cm.



b) Az ABC háromszög harmadik oldala koszinusztétellel számolható:

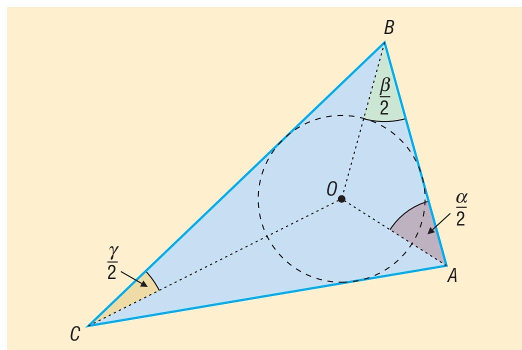
$$BC^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 60° \quad \Rightarrow \quad BC = 2\sqrt{21} \quad (\approx 9{,}17).$$

Egy háromszög belső szögfelezője a szemben levő oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja. Tehát az A csúcsból kiinduló belső szögfelező a BC oldalt

$$2\sqrt{21} \cdot \frac{10}{10+8} = \frac{10\sqrt{21}}{9} \approx 5{,}09 \text{ cm-es} \quad \text{és} \quad 2\sqrt{21} \cdot \frac{8}{10+8} = \frac{8\sqrt{21}}{9} \approx 4{,}07 \text{ cm-es}$$

részekre osztja.

5432 Az ABC háromszög belső szögfelezőinek metszéspontja a háromszög beírt körének O középpontja. A háromszög szögei α, β és γ, továbbá legyen $\alpha \ge \beta \ge \gamma$.



Egy háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

A BOC háromszögben:

$$\frac{\beta}{2} \ge \frac{\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad OC \ge OB.$$

Az AOB háromszögben:

$$\frac{\alpha}{2} \ge \frac{\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad OB \ge OA.$$

Tehát az O középponttól mért távolságokra fennáll:

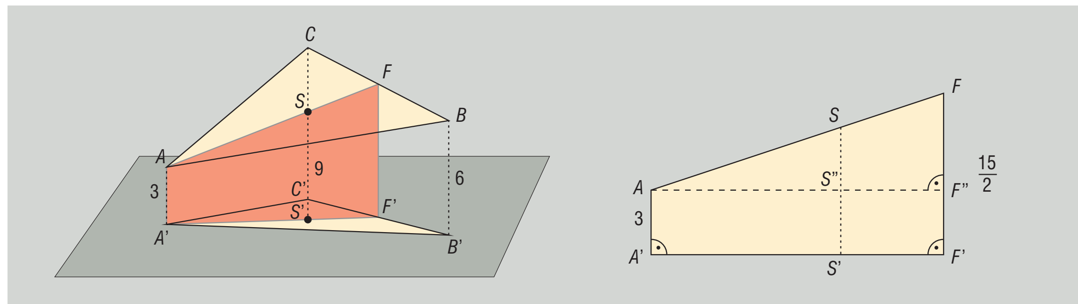
$$OC \ge OB \ge OA.$$

Egy háromszög beírt körének középpontja attól a csúcstól van a legtávolabb, amelyik csúcsnál a legkisebb szög van.

5433 A háromszög A, B és C csúcsainak a síkra eső merőleges vetülete legyen rendre A', B' és C'. A háromszög BC oldalának felezőpontja F, a háromszög súlypontja S, és ezek merőleges vetületei F' és S'.

A $BB'C'C$ négyszög trapéz, amelynek középvonala FF', így hossza az alapok számtani közepe:

$$FF' = \frac{6+9}{2} = \frac{15}{2}.$$



Az $AA'F'F$ négyszög szintén egy trapéz, az alapjainak hossza 3 cm és $\frac{15}{2}$ cm.

Egy háromszög súlypontja a súlyvonalnak a csúcstól távolabbi harmadolópontja. Tehát az $AA'F'F$ trapéz szárainak a hosszabbik alaphoz közelebbi harmadolópontjait összekötő szakasz hosszát



keressük. A trapézban húzzunk párhuzamost az A csúcson keresztül az $A'F'$ szárral. Ez a párhuzamos az SS' szakaszt S'', az FF' szakaszt F'' pontokban metszi. Az $AS''S$ és $AF''F$ háromszögek hasonlóak, mivel szögeik páronként egyenlők. A megfelelő oldalak hosszának arányát felírva:

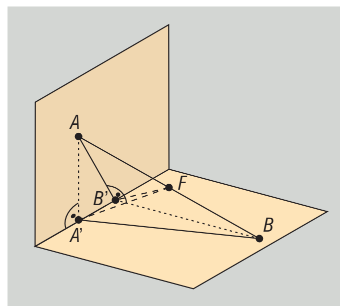
$$\frac{SS''}{FF''}=\frac{AS}{AF} \quad\Rightarrow\quad SS''=\frac{AS}{AF}\cdot FF''=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{15}{2}-3\right)=3 \quad\Rightarrow\quad SS'=SS''+S''S'=3+3=6.$$

A háromszög súlypontjának a síktól vett távolsága 6 cm.

5434 Az A, illetve B pontoknak a két sík metszésvonalára eső merőleges vetülete legyen A', illetve B'.

Mivel az AA' egyenes merőleges a B-t tartalmazó síkra, tehát merőleges a sík összes egyenesére, így $A'B$-re is. Ez alapján az $AA'B$ háromszögnek az A'-nél lévő szöge derékszög. Thalész tételének megfordítása alapján a derékszögű csúcs rajta van AB Thalész-körén. Tehát az A' pontnak az AB szakasz F felezőpontjától vett távolsága:

$$\frac{AB}{2}=10\text{ cm}.$$

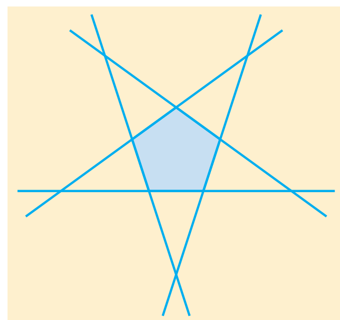


Hasonlóan a BB' merőleges az A-t tartalmazó síkra, tehát merőleges a sík összes egyenesére, így AB'-re is. Tehát a $BB'A$ derékszögű háromszögben a B' csúcsnak az AB szakasz F felezőpontjától vett távolsága szintén

$$\frac{AB}{2}=10\text{ cm}.$$

5435 Egy szabályos ötszög oldalegyenesei a síkot $1+3\cdot5=16$ részre osztják.

Az ötszög alapú egyenes hasáb alap- és fedőlapjának síkjai párhuzamosak egymással, így a térben ez a két sík az oldallapok síkjaival $3\cdot16=48$ térrészt hoz létre.



5436 Az a oldalú szabályos tetraéder magasságának hossza $m=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

A szabályos tetraéder magasságai egyben a súlyvonalai is, amelyek negyedelve, a súlypontban metszik egymást. A szabályos tetraéder súlypontja a tetraéder minden csúcsától

$$\frac{3}{4}\cdot m=\frac{3}{4}\cdot a\sqrt{\frac{2}{3}}=a\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}$$

távolságra van.

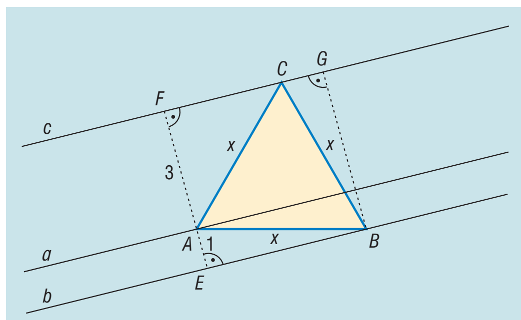
Mivel $a=12$, ez a távolság: $3\sqrt{6}$ (cm).

Egy 12 cm élű szabályos tetraéder súlypontja a tetraéder minden csúcsától $3\sqrt{6}$ cm távolságra van.

5437 Egy időpillanatban a labda középpontjának a távolsága a pad élétől a labda aktuális sugarának hossza. A középpontnak a faltól vett távolsága ekkor szintén sugárnyi. Ezért a középpont egy olyan parabolaíven mozgott, amelynek vezéregyenese a fal egyenese, fókuszpontja a pad élének pontja.



5438 Az x oldalú ABC szabályos háromszög A, B és C csúcsán áthaladó egyenesek legyenek rendre a, b és c úgy, hogy az a egyenes b és c között halad. Az A csúcsnak b és c egyenesre vonatkozó merőleges vetületei legyenek E és F, a B csúcsnak c egyenesre vonatkozó merőleges vetülete G.



Az AFC derékszögű háromszögből Pitagorasz tétele alapján:

$$FC = \sqrt{x^2 - 3^2}.$$

Ugyanígy az AEB, illetve a BGC háromszögből:

$$EB = \sqrt{x^2 - 1^2} \quad \text{és} \quad CG = \sqrt{x^2 - 4^2}.$$

Mivel $EB = FC + CG$, x-re a következő összefüggést kapjuk:

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 16}.$$

Négyzetre emelések és rendezések után:

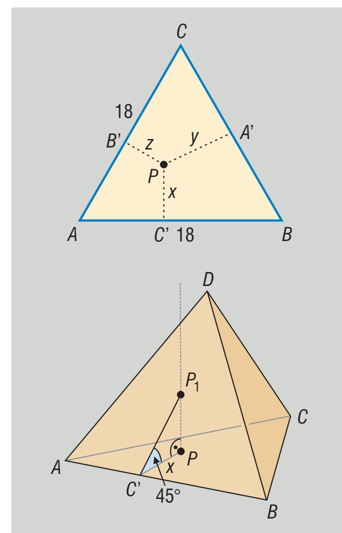
$$0 = x^2 \cdot (3x^2 - 52).$$

Mivel x háromszög oldala, így csak pozitív érték lehet:

$$x = \sqrt{\frac{52}{3}} = \frac{\sqrt{156}}{3}.$$

A háromszög oldala $\dfrac{\sqrt{156}}{3} \approx 4{,}16$ cm.

5439 Egy a oldalú szabályos ABC háromszög P belső pontjának az oldalaktól vett távolsága legyen x, y és z.



A háromszög területe felírható az ABP, BCP, illetve ACP háromszögek területének összegeként és az $\dfrac{a \cdot a \cdot \sin 60^\circ}{2}$ összefüggéssel:

$$\frac{a \cdot x}{2} + \frac{a \cdot y}{2} + \frac{a \cdot z}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4},$$

$$x + y + z = \frac{a\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}\ \text{(cm)}.$$

Az $ABCD$ szabályos háromoldalú gúla ABC alaplapjának egy belső P pontjában az alaplapra állított merőlegesnek az ABD síkkal vett P_1 metszéspontjából állítsunk merőlegest az AB alapélre. A merőleges talppontja legyen C'. A három merőleges egyenes tétele alapján $C'P$ egyenes is merőleges AB-re, tehát a $P_1C'P$ szög a gúla alaplapjának és oldallapjának bezárt szöge, vagyis 45°. A $P_1C'P$ derékszögű háromszögben:

$$\frac{PP_1}{PC'} = \operatorname{tg} 45^\circ \quad \Rightarrow \quad PP_1 = PC' \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = PC' = x.$$

Hasonlóan: $PP_2 = y$ és $PP_3 = z$. A PP_1, PP_2 és PP_3 szakaszok hosszának összege:

$$PP_1 + PP_2 + PP_3 = x + y + z = 9\sqrt{3}.$$

A PP_1, PP_2 és PP_3 szakaszok hosszának összege $9\sqrt{3}$ cm.



Geometriai transzformációk – megoldások

5440 A kitöltött táblázat:

	Identikus transzformáció	Tengelyes tükrözés	Forgatás (mely nem identitás)	Eltolás (mely nem identitás)
Fixpontok	minden pont	a tengely pontjai	a forgatás középpontja	nincsen
Fixegyenesek	minden egyenes	a tengely	nincsen	nincsen
Invariáns egyenesek	minden egyenes	a tengely és a rá merőleges egyenesek	$\alpha = k \cdot 180^{o}$ (*k* egész szám) esetén a centrumot tartalmazó egyenesek, különben nincsen	az eltolás vektorával párhuzamos egyenesek
Példa invariáns körre	minden kör	kör, melynek középpontja a tengelyre illeszkedik	a centrum középpontú körök	nincsen
Szögtartó	igen	igen	igen	igen
Távolságtartó	igen	igen	igen	igen
Egyenes és képe párhuzamos?	igen	nem feltétlenül	nem feltétlenül	igen
Körüljárási irányt megtartja?	igen	nem	igen	igen

5441 Megfelelő egybevágósági transzformációk például:

1. A két kör középpontját összekötő szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tengelyes tükrözés.
2. A két kör középpontját összekötő szakasz F felezőpontjára vonatkozó középpontos tükrözés.
3. Az egyik kör középpontjából a másik kör középpontjába mutató vektorral történő eltolás.

5442 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Hamis.
e) Igaz. *f)* Hamis. *g)* Igaz. *h)* Igaz.

5443 *a)* A szabályos 13 oldalú sokszögnek 13 szimmetriatengelye van. Ezek között egyetlen olyan sincsen, amely tartalmazza a sokszög valamelyik átlóját.

b) A szabályos 14 oldalú sokszögnek 14 szimmetriatengelye van. Ezek között 7 olyan van, amelyik a sokszög valamelyik átlóját tartalmazza.

5444 A paralelogrammák közül a téglalapok és a rombuszok tengelyesen szimmetrikusak.

5445 A deltoidok közül a rombuszok középpontosan szimmetrikusak.

5446 *a)* Igen. Ha a trapéz téglalap, akkor bármelyik oldalegyenesére is tükrözzük, szintén téglalapot, így persze paralelogrammát kapunk.

b) Igen. A trapézt a rövidebb alap egyenesére tükrözve konkáv hatszöget kapunk.

c) Igen.

d) Igen.

e) Nem. Egy ilyen rombusznak csak két szimmetriatengelye van, a két átlót tartalmazó egyenes. Ezek viszont a rombuszt nem trapézokra, hanem háromszögekre bontják.



5447 *a)* Igen. Ha az egyik szár felezőpontjára tükrözünk, akkor paralelogrammát kapunk.

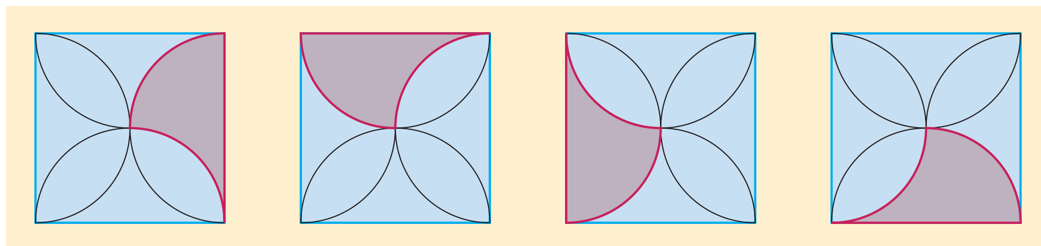
b) Igen. Konkáv hatszöget kapunk, ha a rövidebb alap felezőpontjára tükrözünk.

c) Igen. *d)* Igen. *e)* Igen.

5448 A kialakuló nyolcszögnek két, egymásra merőleges szimmetriatengelye van, ezek a téglalapnak is szimmetriatengelyei.

A nyolcszög középpontosan is szimmetrikus (ezért persze forgásszimmetriát is mutat), középpontja a téglalap középpontjával egybeesik.

5449 *a)* Az egyes forgatások a kiindulási alakzatot a következő helyzetbe viszik.



b) Az ábrákról leolvasható, hogy a lila síkidom a négyzet területének 25%-a.

5450 *a)* Az x tengely mentén 2 egységgel történő eltolás, majd az x tengelyre vonatkozó tengelyes tükrözés, végül az y tengely mentén 1 egységgel történő eltolás.

b) A hozzárendelési szabály: $x \mapsto |x+2| - 1$.

c) A hozzárendelési szabály: $x \mapsto -|x+1| - 1$.

5451 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Hamis. *d)* Hamis.

e) Igaz. *f)* Igaz. *g)* Hamis.

5452 Az átfogó hossza 17 cm, a befogók hossza 2,6 cm és 16,8 cm ($\lambda = 0{,}2$).

5453 *a)* Kicsinyítés, melyben a középponttól különböző pontot és képét a hasonlóság középpontja elválasztja, $|\lambda| < 1$.)

b) Nagyítás, melyben a középponttól különböző pontot és képét a hasonlóság középpontja nem választja el, $\lambda > 1$.)

c) Nagyítás, pontot és képét a hasonlóság középpontja elválasztja.

5454 Az eredeti ötszög legkisebb oldala 14 cm, ezért $\lambda = \frac{1}{2}$.

A kérdezett ötszög többi oldala: 15 cm, 14 cm, 10 cm, 21 cm.

5455 *a)* Igen, $\lambda = \frac{1}{3}$. *b)* Nem.

5456 $K_{\triangle} = 12$ cm, ezért $\lambda = 2$. A keresett háromszög oldalai: $a' = 8$ cm, $b' = 10$ cm, $c' = 6$ cm.

5457 A négyzetek oldalait jelölje a és a'.

a) $a = 9$ cm, $a' = 18$ cm; *b)* $a = 12$ cm, $a' = 15$ cm.

5458 A hasonlósági arány és a felszínek aránya:

$$\frac{V'}{V} = \frac{27}{8} = \lambda^3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{2}, \quad \text{így} \quad \frac{A'}{A} = \lambda^2 = \frac{9}{4}.$$



5459 Az a, c, x oldalakból álló háromszög hasonló az $a+b$, $c+d$, y oldalakból álló háromszöghöz. Ez alapján a kitöltött táblázat:

a	*b*	*c*	*d*	*x*	*y*
3 cm	5 cm	4 cm	$\frac{20}{3}\approx 6{,}67$ cm	$\frac{45}{8}=5{,}625$ cm	15 cm
$\frac{20}{9}\approx 2{,}22$ cm	4 cm	3,5 cm	6,3 cm	2,5 cm	7 cm
2 cm	4 cm	2,15 cm	4,3 cm	3 cm	9 cm
3,2 cm	5,6 cm	4 cm	7 cm	4 cm	11 cm

5460 Mivel az EBP háromszög hasonló az EAD háromszöghöz, ezért

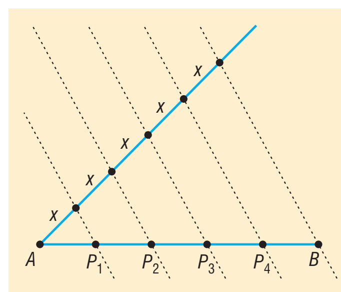
$$\frac{BP}{BE}=\frac{AD}{AE} \quad\Rightarrow\quad \frac{3x}{BE}=\frac{7x}{1{,}2+BE}.$$

A keresett szakasz hossza: $BE=0{,}9$ dm $=9$ cm.

5461 Alkalmazzuk a szögfelezőtételt:

$a_1\approx 3{,}33$ cm, $a_2\approx 2{,}67$ cm; $b_1\approx 3$ cm, $b_2\approx 5$ cm; $c_1\approx 4{,}29$ cm, $c_2\approx 5{,}71$ cm.

5462 Az AB szakaszt öt egyenlő részre kell osztani. A szerkesztés menete az ábrán nyomon követhető. A szabályos ötszög oldala az AP_1 szakasz hosszával egyezik meg.

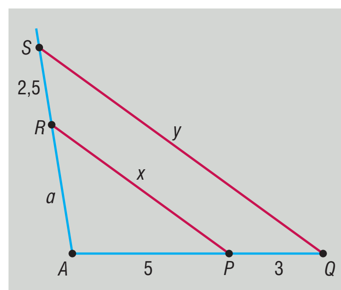


5463 *a)* A feladathoz készített ábra:

b) Az APR háromszög hasonló az AQS háromszöghöz, ezért

$$\frac{a}{5}=\frac{a+2{,}5}{8}, \quad \text{ebből} \quad a\approx 4{,}17 \text{ km}.$$

c) A feltételek szerint $x=7$ km. Ebből következik, hogy $\frac{y}{7}=\frac{8}{5}$, amiből $y=11{,}2$ km. A két út között tehát 11,2 km a távolság a hosszabb összekötő úton.



5464 *a)* A kiegészítő háromszög egyenlő szárú, alapja 6 cm, szárainak hossza $\frac{14}{3}\approx 4{,}67$ cm.

b) A trapéz átlói $2:5$ arányban osztják egymást.

5465 *a)* A tó területe a valóságban $0{,}14$ km^2.

b) A tó területe a térképen $0{,}875$ cm^2.

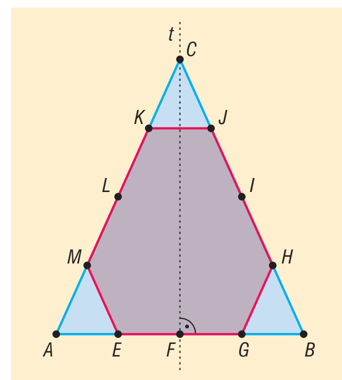
5466 A tejföl ára körülbelül 0,69 €.

5467 *a)* A négyzetek oldala 6 m, 10 m, illetve 14 m.

b) A kockák élének hossza 3 m, 9 m és 24 m.



5468 *a)* Az $EGHJKM$ hatszög tengelyesen szimmetrikus, tengelye az ABC háromszög t tengelyével esik egybe.



b) A CKJ háromszög hasonló a CAB háromszöghöz (szögeik megegyeznek), a hasonlóság aránya $\frac{1}{4}$, ezért:

$$KJ = \frac{1}{4} \cdot AB.$$

A szögek egyenlősége okán az MAE és HGB háromszögek is hasonlók a CAB háromszöghöz, amiből:

$$ME = \frac{1}{4} \cdot BC \quad \text{és} \quad HG = \frac{1}{4} \cdot AC.$$

Az $EGHJKM$ hatszög kerülete:

$$K_{EGHJKM} = MK + KJ + JH + HG + GE + EM =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot AB + \frac{3}{4} \cdot AC + \frac{3}{4} \cdot BC = \frac{3}{4} \cdot (AB + AC + BC).$$

Ez utóbbi mutatja, hogy a hatszög kerülete az ABC háromszög kerületének $\frac{3}{4}$-szerese.

c) Mivel a hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért:

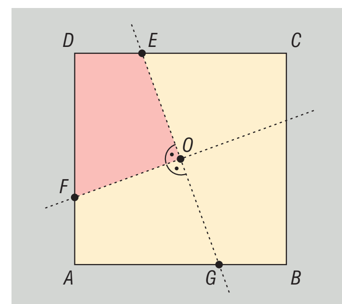
$$T_{CKJ} = \frac{1}{16} \cdot T_{ABC}, \quad T_{MAE} = \frac{1}{16} \cdot T_{ABC} \quad \text{és} \quad T_{HGB} = \frac{1}{16} \cdot T_{ABC}.$$

A kiszámolt területek összegét az ABC háromszög területéből kivonva azt kapjuk, hogy:

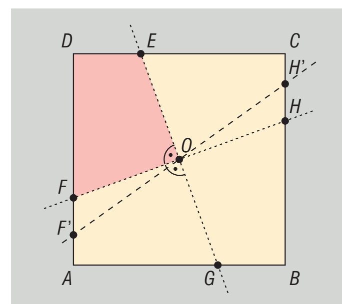
$$T_{EGHJKM} = \frac{13}{16} \cdot T_{ABC}.$$

A hatszög területe az ABC háromszög területének $\frac{13}{16}$-szorosa.

5469 *a)* Ha a két vágás merőleges egymásra és mindkettő átmegy a négyzet O középpontján, akkor az ábra az O középpontú $k \cdot 90°$-os (k egész szám) forgatásokra nézve invariáns, így például a $DFOE$ négyszöget az O pont körüli 90°-os forgatás az $AGOF$ négyszögbe viszi át, ezért a két négyszög területe megegyezik. Nyilvánvalóan a többi keletkező négyszög területe is ugyanakkora, mint a $DFOE$ négyszögé.



b) Tegyük fel, hogy az EG és FH egyenesek (melyeket az ábrán szaggatott vonalak jelölnek) egyenlő területű részekre bontják az $ABCD$ négyzetet. Ebből következik, hogy az $EDAG$ és $GBCE$ trapézok területe megegyezik (épp az $ABCD$ négyzet területének fele). Ha a négyzet oldala a, akkor a területek egyenlőségéből:



$$\frac{ED + AG}{2} \cdot a = \frac{GB + CE}{2} \cdot a,$$

$$ED + AG = GB + CE.$$



Mivel az utolsó egyenlőségben szereplő négy szakasz hosszának összege $2a$, ezért:

$$ED + AG = GB + CE = a.$$

Azonban az is teljesül, hogy:

$$ED + EC = GB + AG = a,$$

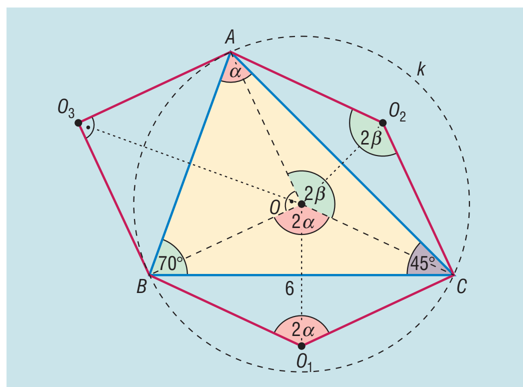
így:

$$AG = EC \quad \text{és} \quad ED = GB.$$

Ebből azonnal következik, hogy GB az ED (továbbá AG az EC) szakasz O pontra vonatkozó tükörképe, ezért EG szükségképpen áthalad a négyzet O középpontján. Hasonlóan bizonyítható az FH egyenesre is.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy az EG egyenes merőleges az FH egyenesre. Ha ez nem teljesülne, akkor az O pontban az EG egyenesre emelt merőleges az F-től különböző F', illetve a H-tól különböző H' pontokban metszené az $ABCD$ négyzet oldalait. Az *a)* feladat eredménye alapján az $EDF'O$ négyszög területe az $ABCD$ négyzet területének negyedrészével lenne egyenlő. Ekkor azonban az $EDFO$ négyszög területe szemlátomást nagyobb lenne (vagy ha F a DF' szakasz belső pontja, akkor kisebb), mint az $EDF'O$ négyszög területe, de azzal semmiképpen nem lehetne egyenlő, ezért az EG és FH egyenesek nem oszthatják egyenlő területű részekre az $ABCD$ négyzetet. Ez mutatja, hogy EG és FH valóban merőlegesek egymásra.

5470 *a)* A tükörképek az ábra jelöléseinek megfelelően O_1, O_2 és O_3. A tükrözés távolságtartó, ezért a $BO_1CO_2AO_3$ hatszög minden oldala a BO, CO vagy az AO szakaszok valamelyikével egyenlő hosszúságú. Mivel a felsorolt szakaszok mindegyike az ABC háromszög köré írható kör egy-egy sugara, ezért a kapott hatszög minden oldala egyenlő hosszú.



b) Az *a)* feladat eredményei alapján a BO_1CO, CO_2AO és AO_3BO négyszögek oldalai megegyeznek, ezért mindegyik rombusz.

c) Az $AOC\sphericalangle$ az ABC háromszög köré írható körben a B-t nem tartalmazó köríven nyugvó középponti szög, ezért a kerületi és középponti szögek tétele alapján:

$$AOC\sphericalangle = 2\beta = 140°.$$

Ugyanilyen megfontolások alapján:

$$BOC\sphericalangle = 2\alpha = 130° \quad \text{és} \quad AOB\sphericalangle = 2\gamma = 90°.$$

A tükrözés szögtartó tulajdonsága alapján:

$$BO_1C\sphericalangle = BOC\sphericalangle = 130°, \quad AO_2C\sphericalangle = AOC\sphericalangle = 140° \quad \text{és} \quad AO_3B\sphericalangle = AOB\sphericalangle = 90°.$$

Az $OBC\sphericalangle$ tükörképe a BC egyenesre vonatkozóan az $O_1BC\sphericalangle$, továbbá az $OBA\sphericalangle$ tükörképe az AB egyenesre vonatkozóan az $O_3BA\sphericalangle$, ezért:

$$O_3BO_1\sphericalangle = O_3BA\sphericalangle + \beta + O_1BC\sphericalangle \quad \text{miatt} \quad O_3BO_1\sphericalangle = OBA\sphericalangle + \beta + OBC\sphericalangle = 2\beta = 140°.$$

Ugyanígy:

$$O_1CO_2\sphericalangle = 2\gamma = 90° \quad \text{és} \quad O_2AO_3\sphericalangle = 2\alpha = 130°.$$

A kialakuló hatszög szemközti szögei megegyeznek, a különböző szögek nagysága 90°, 130°, illetve 140°.



d) A kialakuló hatszög területe kétszerese az ABC háromszög területének. Az ABC háromszögben a szinusztétel alapján: $AC \approx 6{,}22$ cm.

Az ABC háromszög területe:

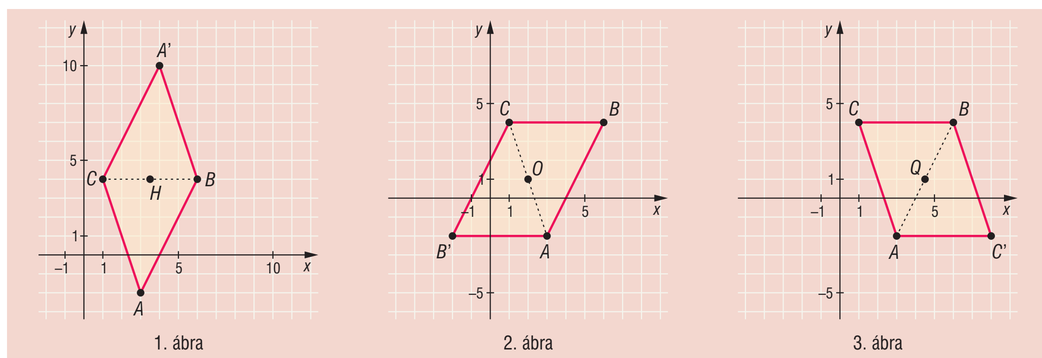
$$T_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin 45^\circ}{2} \approx 13{,}19\ \text{cm}^2.$$

A kialakuló hatszög területe körülbelül $26{,}38\ \text{cm}^2$.

5471 *a)* A megadott pontokat paralelogrammává kell kiegészíteni. Ezt 3 különböző módon tehetjük meg attól függően, hogy az ABC háromszög melyik oldala lesz a paralelogramma átlója.

Ha a paralelogrammának BC az egyik átlója, akkor a BC szakasz $H(3{,}5; 4)$ felezőpontja a paralelogramma középpontja, ezért negyedik csúcsa az A pont H-ra vonatkozó tükörképe (1. ábra). Ebből következik, hogy a paralelogramma hiányzó csúcsa $A'(4; 10)$.

A 2. és a 3. ábra a másik két paralelogrammát mutatja. Ezek negyedik csúcsa $B'(-2; -2)$, illetve $C'(8; -2)$.

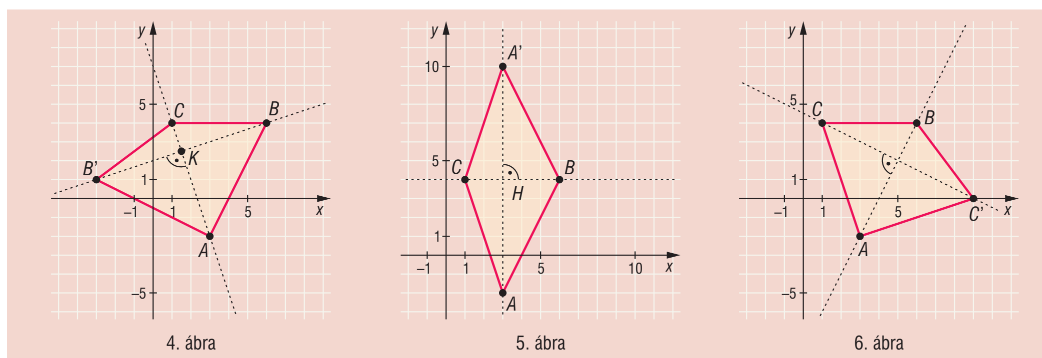


1. ábra 2. ábra 3. ábra

b) A megadott pontokat összesen 6 különböző módon egészíthetjük ki tengelyesen szimmetrikus négyszöggé.

Deltoidot háromféleképpen kaphatunk attól függően, hogy az ABC háromszög melyik oldalegyenese tartalmazza a deltoid szimmetriaátlóját. Ha az AC szakasz a deltoid szimmetriaátlója, akkor a hiányzó csúcs éppen a B pont AC egyenesre vonatkozó tükörképe (4. ábra). Az AC egyenes egyenlete $3x + y = 7$, a B ponton átmenő, AC-re merőleges egyenes egyenlete pedig $x - 3y = -6$. A két egyenes metszéspontja $K(1{,}5; 2{,}5)$. A deltoid negyedik csúcsa a B pont K-ra vonatkozó tükörképe, azaz $B'(-3; 1)$.

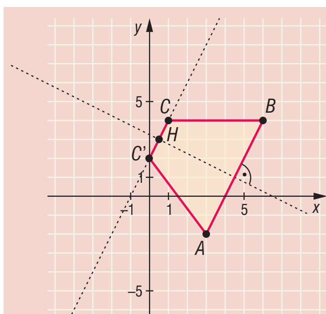
A másik két deltoidot az 5. és a 6. ábrák mutatják. A hiányzó csúcsok koordinátái $A'(3; 10)$ és $C'(9; 0)$.



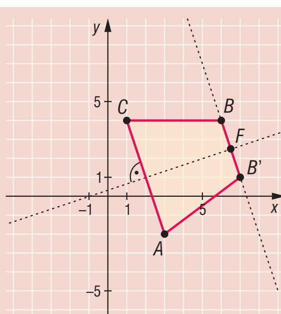
4. ábra 5. ábra 6. ábra



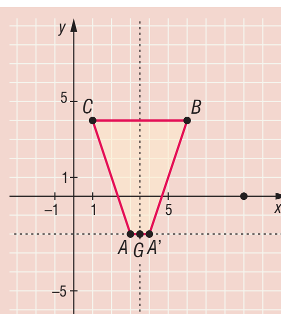
Húrtrapézokból szintén 3 található attól függően, hogy az ABC háromszög melyik oldala az egyik alapja. Ha az AB szakasz, akkor a trapéz szimmetriatengelye az AB szakasz felezőmerőlegese: $x + 2y = 6{,}5.$ A másik alapot tartalmazó egyenes átmegy a C ponton és párhuzamos az AB szakasszal, ezért egyenlete $y = 2x + 2.$ A kapott két egyenes metszéspontja, azaz a $H(0{,}5;\ 3)$ pont, a rövidebb alap felezőpontja (7. ábra). A húrtrapéz hiányzó csúcsa $C'(0;\ 2).$ A további húrtrapézokat a 8. és a 9. ábrák mutatják. Ezek hiányzó csúcsa $B'(7;\ 1)$ és $A'(4;\ –2).$



7. ábra



8. ábra



9. ábra

5472 *a)* Az $ABDB'$ négyszög tengelyesen szimmetrikus, szimmetriatengelye az AD átlót tartalmazó egyenes.

b) Mivel a szimmetriatengely tartalmazza a négyszög egyik átlóját, ezért az $ABDB'$ négyszög deltoid.

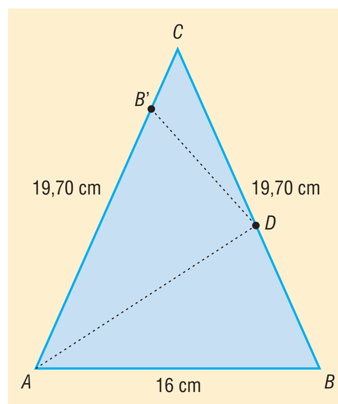
c) Az első hajtogatás az ABC háromszög AD szögfelezője mentén történt.

d) A feladathoz tartozó 1. ábra alapján:

$$AC = \sqrt{18^2 + 8^2} = 2 \cdot \sqrt{97} \approx 19{,}70 \text{ cm},$$

valamint

$$\operatorname{tg} ABC\sphericalangle = \frac{18}{8} = 2{,}25 \quad \Rightarrow \quad ABC\sphericalangle \approx 66{,}04°.$$



Az ABC háromszögben a szögfelezőtétel alapján:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{16}{19{,}70} \quad \Rightarrow \quad BD \approx 8{,}83 \text{ cm}.$$

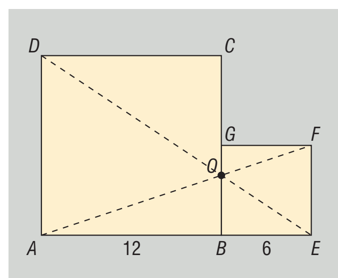
Az $ABDB'$ deltoid területe kétszer akkora, mint az ABD háromszög területe, ezért:

$$T_{ABDB'} = 2 \cdot \frac{AB \cdot BD \cdot \sin ABD\sphericalangle}{2} \approx 16 \cdot 8{,}83 \cdot \sin 66{,}04° \approx 129{,}11 \text{ cm}^2.$$

A madártörzs területe körülbelül $129{,}11 \text{ cm}^2$.

5473 *a)* Az ABO és FGO háromszögek hasonlóak, mert mindkettő derékszögű, és az O csúcsnál lévő szögeik csúcsszögek

b) Mivel az $ABCD$ négyzet területe négyszer akkora, mint a $BEFG$ négyzet területe, továbbá hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ezért az $ABCD$ négyzet oldala 12 cm. Ekkor az ABO és FGO háromszögek hasonlóságának aránya $2:1$, ezért az O pont a BG szakasz G-hez közelebbi harmadolópontja. Ebből következik, hogy $OB = 4$ cm, $OG = 2$ cm és $OC = 8$ cm.





Az O pontnak a négyzetek további csúcsaitól mért távolságát Pitagorasz tételével számolhatjuk:

$$OA = 4\sqrt{10} \approx 12{,}65 \text{ cm}, \quad OE = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21 \text{ cm},$$
$$OF = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32 \text{ cm}, \quad OD = 4\sqrt{13} \approx 14{,}42 \text{ cm}.$$

c) A kis négyzetet az O pontra vonatkozó $\lambda = -2$ arányú középpontos hasonlósággal lehet a nagy négyzetbe átvinni.

5474 *a)* Mivel ismert, hogy

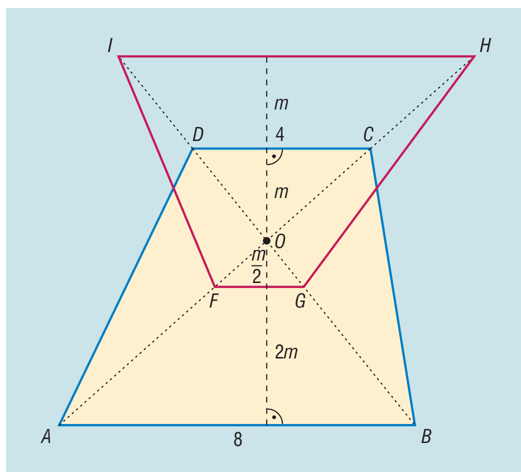
$$\frac{OF}{OA} = \frac{OG}{OB} = \frac{1}{4},$$

ezért a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján $FG \parallel AB$-vel. Hasonlóan:

$$\frac{OC}{OH} = \frac{OD}{OI} = \frac{1}{2},$$

ebből következik, hogy $HI \parallel CD$.

Az $ABCD$ trapézban $AB \parallel CD$, ezért FG és HI egymással párhuzamos szakaszokkal párhuzamos, amiből persze azonnal következik, hogy $FG \parallel HI$, így az $FGHI$ négyszög valóban trapéz.



Megjegyzés: A párhuzamos szelők tételének megfordítása helyett hivatkozhatunk az OFG és OAB, illetve az OCD és OHI háromszögek hasonlóságára is (egy szög közös, és a szöget közrefogó oldalak aránya egyenlő).

b) Az OCD és OAB háromszögek hasonlók egymáshoz (szögeik páronként egyenlők), továbbá $AB = 2 \cdot CD$, ezért ha az OCD háromszög CD oldalához tartozó magasság m, akkor az OAB háromszög AB oldalához tartozó magasság $2m$ (ld. ábra).

Ebből adódóan az $ABCD$ trapéz területe:

$$T_{ABCD} = \frac{8+4}{2} \cdot (m + 2m) = 18m.$$

A párhuzamos szelőszakaszok tételéből (vagy az OFG és OAB háromszögek hasonlóságából) adódik, hogy:

$$FG = \frac{1}{4} \cdot AB = 2 \text{ cm},$$

ezért az OFG háromszög FG oldalához tartozó magasság az OAB háromszög megfelelő magasságának (azaz $2m$-nek) a negyede, vagyis $\frac{m}{2}$.

Hasonlóan igazolható, hogy $HI = 8$ cm, és az OHI háromszögben a HI oldalhoz $2m$ hosszú magasság tartozik.

Az $FGHI$ trapéz magassága:

$$\frac{m}{2} + 2m = \frac{5}{2}m,$$

területe pedig:

$$T_{FGHI} = \frac{8+2}{2} \cdot \frac{5}{2}m = \frac{25}{2}m.$$



Az *FGHI* és *ABCD* trapézok területének aránya:

$$\frac{T_{FGHI}}{T_{ABCD}} = \frac{\frac{25}{2}m}{18m} = \frac{25}{36}.$$

c) Ha az *ABCD* trapéz alapjai $AB = a$ és $CD = c$, akkor $FG = \frac{a}{4}$ és $HI = 2c$. Ha az *OCD* háromszög *CD* oldalához tartozó magassága ezúttal is *m*, akkor az *OAB* háromszög *AB* oldalához $\frac{a}{c} \cdot m$ hosszú magasság tartozik, ezért az *ABCD* trapéz magassága $\left(1 + \frac{a}{c}\right) \cdot m$. Az *FGHI* trapéz magassága:

$$2m + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a}{c} \cdot m\right) = \frac{8c + a}{4c} \cdot m.$$

A két trapéz területének egyenlőségéből:

$$\frac{a + c}{2} \cdot \left(1 + \frac{a}{c}\right) \cdot m = \frac{\frac{a}{4} + 2c}{2} \cdot \frac{8c + a}{4c} \cdot m.$$

Az egyszerűsítések elvégzése, valamint mindkét oldal 4-gyel való szorzása után:

$$16(a + c)^2 = (a + 8c)^2.$$

Az alapok pozitívak, mindkét oldalból gyököt vonhatunk az abszolút érték megjelenése nélkül, így:

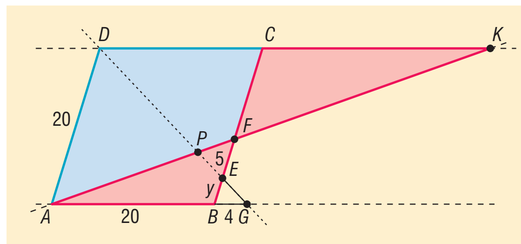
$$4(a + c) = a + 8c.$$

A zárójel felbontása után végül pedig $\frac{a}{c} = \frac{4}{3}$ adódik. Ahhoz, hogy a két trapéz területe megegyezzen, szükséges, hogy az *ABCD* trapéz alapjainak aránya $\frac{4}{3}$ legyen. Beláthatjuk, hogy feltételünk elegendő is egyben.

5475 Ha a *DP* egyenes az *AB* egyenest a *G* pontban metszi és $BE = y$, akkor a párhuzamos szelőszakaszok tételét alkalmazva az *AGD*∢-re azt kapjuk, hogy:

$$\frac{y}{20} = \frac{4}{24},$$

$$y = \frac{10}{3} \approx 3{,}33 \text{ cm}.$$



Ekkor:

$$BF = BE + EF = \frac{10}{3} + 5 = \frac{25}{3} \; (\approx 8{,}33 \text{ cm}),$$

$$FC = 20 - BF = \frac{35}{3} \; (\approx 11{,}67 \text{ cm}).$$

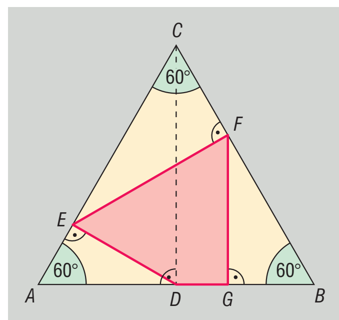
Az *ABF* és *KCF* háromszögek hasonlók egymáshoz (szögeik páronként megegyeznek), ezért:

$$\frac{AB}{BF} = \frac{KC}{CF}, \quad \text{azaz} \quad \frac{20}{\frac{25}{3}} = \frac{KC}{\frac{35}{3}},$$

amiből $KC = 28$ cm.



5476 *a)* Az *ADE*, *CEF* és *FBG* háromszögek mindegyike derékszögű és rendelkezik 60°-os szöggel csakúgy, mint az *ACD* háromszög. Ebből következik, hogy a felsorolt háromszögek mindegyike hasonló a többihez.



b) Az *ADE* derékszögű háromszög átfogója feleakkora, mint a hozzá hasonló *ACD* háromszögé, ezért hasonlóságuk aránya $\frac{1}{2}$, amiből:

$$T_{ADE} = \frac{1}{4} \cdot T_{ACD} = \frac{1}{8} \cdot T_{ABC}.$$

A két háromszög hasonlóságából az is következik, hogy:

$$AE = \frac{1}{2} \cdot AD = \frac{1}{4} \cdot AC,$$

tehát:

$$CE = \frac{3}{4} \cdot AC.$$

Ez azt is jelenti, hogy a *CEF* háromszög átfogója $\frac{3}{4}$-szerese az *ACD* háromszög átfogójának.

Mivel a két háromszög hasonló egymáshoz, ezért:

$$T_{CEF} = \frac{9}{16} \cdot T_{ACD} = \frac{9}{32} \cdot T_{ABC}.$$

A két háromszög hasonlóságából továbbá:

$$CF = \frac{3}{4} \cdot AD = \frac{3}{8} \cdot CB,$$

ezért:

$$FB = \frac{5}{8} \cdot CB = \frac{5}{8} \cdot AC.$$

Ekkor viszont az *ACD* és *FBG* háromszögek hasonlóságának aránya $\frac{5}{8}$, amiből következik, hogy:

$$T_{FBG} = \frac{25}{64} \cdot T_{ACD} = \frac{25}{128} \cdot T_{ABC}.$$

Az *ABC* háromszög csúcsainál „kimaradó” részek területösszege:

$$T_{ADE} + T_{CEF} + T_{FBG} = \left(\frac{1}{8} + \frac{9}{32} + \frac{25}{128}\right) \cdot T_{ABC} = \frac{77}{128} \cdot T_{ABC}.$$

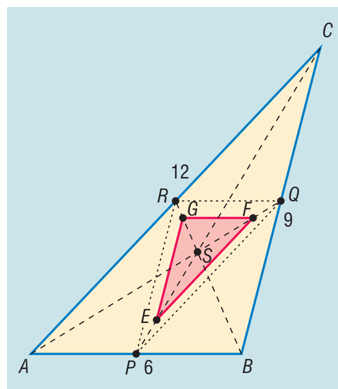
A tervek szerint a tulipánnal teleültetett rész területe:

$$T_{DEFG} = \frac{51}{128} \cdot T_{ABC},$$

azaz a teljes virágágyásnak körülbelül 39,84%-a borul tulipánba.







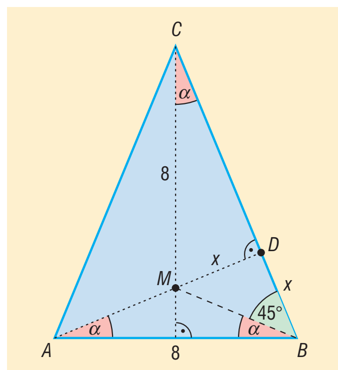
5477 *a)* Ha az ABC háromszög oldalfelező pontjait P, Q és R jelöli, akkor az ABS háromszög E súlypontja $2:1$ arányban osztja az SP szakaszt. Ugyanígy $2:1$ arányban osztja az F pont az SQ, illetve a G pont az SR szakaszokat. Mivel ekkor

$$\frac{SE}{SP}=\frac{SF}{SQ}=\frac{2}{3},$$

így a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján EF és PQ párhuzamos, és ugyanígy GF párhuzamos RQ-val, illetve GE párhuzamos RP-vel. Ebből azonnal következik, hogy az EFG háromszög szögei páronként megegyeznek a PQR háromszög szögeivel, így a két háromszög hasonló egymáshoz. Mivel a PQR háromszög oldalai a CAB háromszög középvonalai, így e két háromszög megfelelő oldalai páronként párhuzamosak, ezért hasonlók egymáshoz. Ebből adódóan az EFG háromszög is hasonló a CAB háromszöghöz.

b) Az EFG háromszög oldalai: $GF = 2$ cm, $GE = 3$ cm és $EF = 4$ cm.

c) Az EFG háromszöget az S középpontú $\lambda_1=\frac{3}{2}$ arányú középpontos hasonlósággal lehet a PQR háromszögbe átvinni. A PQR háromszöget szintén S középpontú, $\lambda_2=-2$ arányú középpontos hasonlóság viszi át a CAB háromszögbe. Ebből adódóan az EFG háromszöget az S középpontú, $\lambda=-3$ arányú középpontos hasonlósággal lehet a CAB háromszögbe vinni.

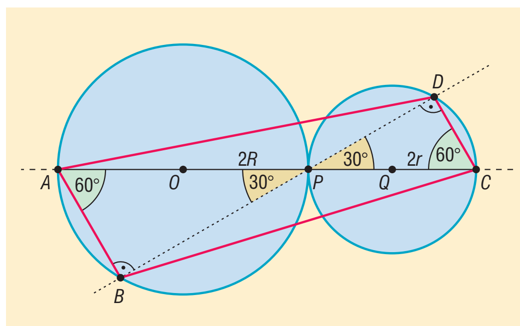


5478 *a)* Mivel a $DAB\sphericalangle$ és a $DCM\sphericalangle$ szárai páronként merőlegesek egymásra, ezért merőleges szárú szögpárt alkotnak, így egyenlő nagyságúak (az ábrán α jelöli). Ebből következik, hogy az ABD és a CMD háromszögekben két-két szög megegyezik, így a két háromszög hasonló. Mivel mindkét háromszög átfogója 8 cm, ezért a két háromszög egybevágó egymással.

b) Az ABD és a CMD háromszögek egybevágóságából következik, hogy az α szöggel szemközti befogóik is megegyeznek, azaz $BD = MD = x$. Ez azt is jelenti, hogy az MBD derékszögű háromszög egyenlő szárú, azaz $MBD\sphericalangle = 45°$. Vegyük még észre, hogy az ABM háromszög AB oldalához tartozó magasságvonala megfelezi az AB oldalt, ezért az ABM háromszög is egyenlő szárú, amiből adódik, hogy $ABM\sphericalangle = \alpha$. Az ABD derékszögű háromszög hegyesszögeinek összegére:

$$\alpha + \alpha + 45° = 90°,$$

ahonnan $\alpha = 22{,}5°$. Az ABC háromszög szögei ezért $67{,}5°$, $67{,}5°$ és $45°$.



5479 *a)* Az $ABCD$ négyszög trapéz, melynek alapjai AB és CD. A forgatás miatt ugyanis:

$$APB\sphericalangle = CPD\sphericalangle = 30°.$$

Thalész tétele alapján az APB és CPD háromszögek derékszögűek, ebből következik, hogy

$$PAB\sphericalangle = PCD\sphericalangle = 60°,$$

amit úgy is értelmezhetünk, hogy AB és CD 60°-os szöget zárnak be ugyanazzal az egyenessel, ezért párhuzamosak. Az $ABCD$ négyszög tehát trapéz.

b) Az APB és CPD derékszögű háromszögek egyik hegyesszöge 30º, ezért „félszabályos” háromszögek. Az ilyen háromszögeket a hosszabb befogót tartalmazó egyenesre vonatkozó tükrözéssel szabályos háromszöggé egészíthetjük ki. Ennek megfelelően:

$$AB = R, \qquad DC = r, \qquad m = BD = \sqrt{3}\cdot(R+r),$$

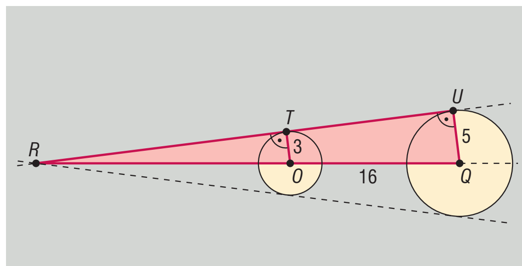
$$T_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2}\cdot m = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(R+r)^2.$$

5480 *a)* A középpontokat összekötő OQ egyenesen két olyan pont van, amelyekből közös érintő húzható a körökhöz. Ha az ábra jelöléseit követve a belső érintők metszéspontja P, akkor az OPF háromszög hasonló QPE háromszöghöz, hiszen mindkét háromszög derékszögű, továbbá a P csúcsnál csúcsszögek alakulnak ki. A megfelelő oldalaik arányára:

$$\frac{PO}{PQ} = \frac{OF}{QE}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{PO}{16 - PO} = \frac{3}{5},$$

amiből $PO = 6$ cm. A belső hasonlósági pont a kisebb kör középpontjától 6 cm távolságra található.

A közös külső érintőket az alábbi ábra mutatja. Az ROT és RQU háromszögek hasonlósága alapján:



$$\frac{RO}{RQ} = \frac{OT}{QU}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{RO}{16 + RO} = \frac{3}{5}.$$

A kapott egyenletből $RO = 24$ cm. A két kör külső hasonlósági pontja a kisebb kör középpontjától 24 cm távolságra található.

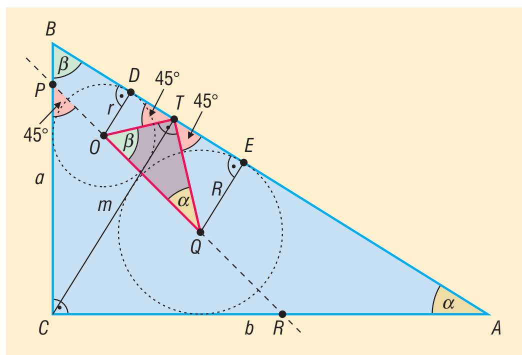
b) A közös belső érintőket tartalmazó ábra EF szakaszának hosszát kérdezi a feladat. Pitagorasz tételét alkalmazva a POF és PQE háromszögekben kapjuk, hogy:

$$PF = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \;\; (\approx 5{,}20 \text{ cm}),$$

$$PE = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \;\; (\approx 8{,}66 \text{ cm}).$$

Az EF szakasz hossza $8\sqrt{3} \approx 13{,}86$ cm.

5481 *a)* A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága a háromszöget két hasonló háromszögre bontja, amelyek az eredeti háromszöghöz is hasonlók. Ha $BC = a$ és $AC = b$, továbbá a BCT háromszögbe írt kör sugara r, az ACT háromszögbe írté pedig R, akkor a részháromszögek hasonlósága alapján:



$$\frac{r}{R} = \frac{a}{b}. \qquad (1)$$

A Q pont illeszkedik a derékszögű $CTA\sphericalangle$ szögfelezőjére, ezért $CTQ\sphericalangle = 45°$. Ehhez hasonlóan persze $CTO\sphericalangle = 45°$ is teljesül, ezért $QTO\sphericalangle = 45° + 45° = 90°$, így a QOT háromszög derékszögű.

Az OTD és QTE egyenlő szárú derékszögű háromszögek hasonlók, ezért megfelelő oldalaik arányára:

$$\frac{r}{R} = \frac{OT}{QT}. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenlőségek bal oldala megegyezik, ezért jobb oldalaik is egyenlők, így:

$$\frac{OT}{QT} = \frac{a}{b}.$$

Ez azt jelenti, hogy a QOT és ABC háromszögekben egy-egy szög, valamint a szöget közrefogó oldalak aránya megegyezik, és így a háromszögek valóban hasonlók.

b) Forgassuk el a QOT háromszöget a T pont körül $-45°$-kal. Ekkor a T pont helyben marad, $OTB\sphericalangle = 45°$ miatt pedig az O pont képe illeszkedik a BC szakaszra.

Mivel

$$TOQ\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta,$$

ezért az OQ szakasz elforgatott képe párhuzamos a BC szakasszal. Ekkor viszont az OQ egyenes az OQ szakasz elforgatott képével és a BC szakasszal ugyanazt a szöget, éppen a forgatás 45°-os szögét zárja be.

Összefoglalva, ha az OQ egyenes a BC szakaszt P-ben, az AC szakaszt pedig R-ben metszi, akkor $CPR\sphericalangle = 45°$, ezért a PRC háromszög valóban egyenlő szárú derékszögű háromszög.

5482 Vizsgáljuk meg először az $ABEF$ négyszöget. Mivel $AEB\sphericalangle = AFB\sphericalangle = 90°$, ezért az E és F pontok illeszkednek az AB átmérőjű Thalész-körre (k_1), vagyis az $ABEF$ négyszög húrnégyszög. Mivel a húrnégyszög belső szöge megegyezik a vele szemközti szög külső szögével, ezért az ábra jelöléseit követve:

$$BAF\sphericalangle = OEF\sphericalangle = \alpha, \qquad ABE\sphericalangle = OFE\sphericalangle = \beta.$$

Ha most megnézzük az ABO és EFO háromszögeket, akkor láthatjuk, hogy bennük a szögek páronként megegyeznek, ezért a háromszögek hasonlók egymáshoz. Pontosan ugyanígy igazolható, hogy a $CDGH$ húrnégyszögben:

$$CDG\sphericalangle = GHO\sphericalangle = \delta, \qquad DCH\sphericalangle = OGH\sphericalangle = \gamma,$$

így $GHO_\triangle \sim CDO_\triangle$.

Az ábra további húrnégyszögeket rejt. Ilyen például az $ADHE$ négyszög. Az ADE és ADH derékszögű háromszögek derékszögű csúcsai illeszkednek az AD szakasz Thalész-körére (k_2). Ekkor a $DAH\sphericalangle$ és a $DEH\sphericalangle$ egyaránt a Thalész-kör DH körívén nyugszanak, így a kerületi szögek tétele alapján $DAH\sphericalangle = DEH\sphericalangle = \alpha'$. Pontosan ugyanígy igazolható, hogy az ábrán azonos módon megjelölt további szögpárok is megegyeznek.

Az $ABCD$ és $EFGH$ négyszögeket páronként hasonló háromszögekre bonthatjuk: $EFO_\triangle \sim ABO_\triangle$; $FGO_\triangle \sim BCO_\triangle$; $GHO_\triangle \sim CDO_\triangle$; $HEO_\triangle \sim DAO_\triangle$.

Ezek alapján az $EFGH$ és $ABCD$ négyszögek valóban hasonlók egymáshoz.



Vektorok. Szögfüggvények – megoldások

5483 *a)* $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB}$; *b)* $\overrightarrow{IF} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$;

c) $\overrightarrow{ED} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$; *d)* $\overrightarrow{IF} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AD}$.

5484 *a)* $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 10\sqrt{2}$ cm;
b) Az A csúcsból a CD oldal felezőpontjába mutató vektor hossza $5\sqrt{5}$ cm.

5485 Igaz állítás: C, D. Hamis állítás: A és B.

5486 Egy szabályos tízszög középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege nullvektor.

5487 Az E csúcsból a gúla magasságának talppontjába mutató vektor $\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$.

5488 Az $\vec{a} - \vec{b}$ és az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor derékszöget zár be.

5489 A $\vec{v} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ vektor a végpontja a paralelogramma DC oldalának C-hez közelebbi harmadolópontja.

5490 A csónak $\sqrt{241} \approx 15{,}52\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel mozog.

5491 Az erők eredője $4\sqrt{19} \approx 17{,}44$ N.

5492 A két egységvektor által bezárt szög
a) 30°; *b)* 120°; *c)* 90°.

5493 A kifejezések pontos értéke:
a) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$; ***b)*** 0; ***c)*** $\frac{1}{16}$.

5494 Az α konkáv szög többi szögfüggvényének értéke:

a) $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\sqrt{3}$;

b) $\sin\alpha = -0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$;

c) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{12}{5}$;

d) $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$.

5495 A kifejezések növekvő sorrendje:

$$\sqrt{3}\cos 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2} < \lg(\cos 8\pi) = 0 < \operatorname{tg} 2010° = \frac{\sqrt{3}}{3} < \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{\operatorname{ctg} 390° - 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$



5496 A kifejezések értelmezési tartománya:

a) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\right\},\ k \in \mathbb{Z};$ *b)* $x \in \mathbb{R};$

c) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}\right\},\ k \in \mathbb{Z};$ *d)* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

A kifejezések egyszerűbb alakja:

a) $\frac{1}{\sin x};$ *b)* $\cos x;$ *c)* 0; *d)* 0.

5497 $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$

5498 *a)* $S_{100} = \frac{\sqrt{3}}{2};$ *b)* $S_{2010} = 0.$

5499 A Nap sugarai a Földre 55,56° szögben esnek.

5500 A 828 m magas épületet 83,11° szögben látjuk.

5501 *a)* Az emelkedő 4,37%-os. *b)* A hegy 349 m magas.

5502 A két épület egymástól 34,87 m-re van.

5503 A létrával a maximális szerelési magasság 3,84 m, tehát fel tudja szerelni a mester a csillárt.

5504 A hordó 1,75-szor fordul meg a tengelye körül.

5505 A szögek szárai a szabályos háromszög szemközti oldalát két $9\sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}\,15^\circ \approx 4{,}18$ cm, továbbá két $9 - 9\sqrt{3} \cdot \mathrm{tg}\,15^\circ \approx 4{,}82$ cm hosszú részekre osztják.

5506 A rombusz

a) tompaszöge 126,87°; *b)* átlóinak hossza 8,95 cm és 17,88 cm.

5507 *a)* kerülete 79,22 cm; *b)* területe 334,42 cm^2;

c) beírható körének sugara 8,44 cm.

5508 *a)* kerülete 122,46 cm; *b)* területe 1131,38 cm^2.

5509 Ha egyenes mentén gyalogolunk, 0,66%-kal rövidebb utat tettünk volna meg.

5510 A háromszög 10 cm-es oldalával szemben levő szög 14,48°.

5511 Az asztronauták a Földet 2,28°-os szögben látták.

5512 A hegy legalább 3149 m magas.

5513 A két kör közös

a) külső érintői 15,32°; *b)* belső érintői 83,62° szöget zárnak be.

5514 Mivel az $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ vektor $\vec{a}$ vektorral megegyező irányú egységvektor, és $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ vektor $\vec{b}$ vektorral megegyező irányú egységvektor, a két vektor rombuszt feszít ki. Mivel a rombusz átlója felezi a rombusz szögét, az $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ vektor 15°-os szöget zár be $\vec{a}$ vektorral.

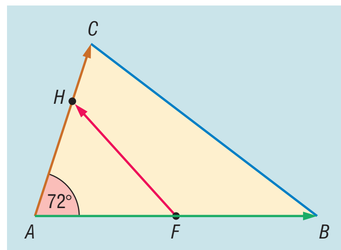


5515 Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja F, AC oldalának C-hez közelebbi harmadolópontja H.

$$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Az $\overrightarrow{FH}$ vektor hossza koszinusztétellel az AFH háromszögben számolható:

$$FH^2 = AF^2 + AH^2 - 2 \cdot AF \cdot AH \cdot \cos 72° \quad \Rightarrow \quad FH \approx 7{,}68.$$



Az AB oldal felezőpontjából az AC oldal C-hez közelebbi harmadolópontjába mutató vektor hossza 7,68 cm.

5516 *a)* A $\vec{b}$ és $\vec{c}$ vektorok által bezárt szög 60°. Tehát $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}$.

b) Az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor hossza kétszer akkora, mint az egységoldalú szabályos háromszög magassága,

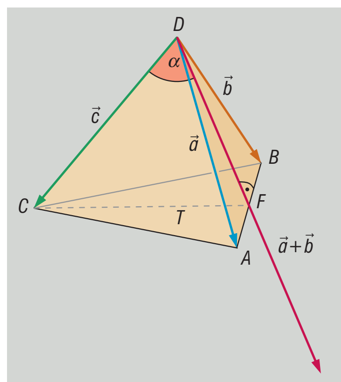
$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Az ábrán látható $ABCD$ szabályos tetraéderben az AB él felezőpontja F.

Az $\vec{a} + \vec{b}$ vektor $\vec{c}$ vektorral bezárt szöge az $\alpha = CDF\sphericalangle$.

A CDF háromszög CD oldala egységnyi, a másik két oldala az egységnyi oldalú szabályos háromszög magassága:

$$CF = DF = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Ennek az egyenlő szárú háromszögnek az alaphoz tartozó magasságát behúzva az α szögre felírható:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Így a művelet eredménye:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left|\vec{a} + \vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right| \cdot \cos\alpha = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1.$$

c) Mivel egy szabályos tetraéder kitérő élei merőlegesek egymásra, az $\vec{a} - \vec{b}$ vektor merőleges a $\vec{c}$ vektorra, tehát $\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = 0$.

5517 *a)* A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya miatt:

$$\sin x > 0 \quad \Rightarrow \quad 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A tört nevezőjében nem állhat 0, ezért:

$$\cos x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + l\pi\right\}, \; l \in \mathbb{Z}.$$

A kifejezés értelmezési tartománya a két halmaz metszete:

$$x \in \left]2n\pi; \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right[\cup \left]\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \pi + 2n\pi\right[, \; n \in \mathbb{Z}.$$

A kifejezés egyszerűbb alakja: $\dfrac{2^{\log_2 \sin x}}{\cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x.$



b) A négyzetgyökjel alatt álló tört mindig pozitív értéket vesz fel. A tört nevezőjében nem állhat 0, ezért $x \neq 0$, és a ctg miatt $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. A kifejezés értelmezési tartománya:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\},\ k \in \mathbb{Z}.$$

A kifejezés egyszerűbb alakja:

$$\sqrt{\frac{1+\operatorname{ctg}^2 x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{x^2}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot x^2}} = \frac{1}{|\cos x|\cdot|x|}.$$

5518 Mivel $\cos x$ nem 0, a kifejezés átírható a következő alakba:

$$\frac{2\sin x+3\cos x}{5\cos x-2\sin x} = \frac{2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}+3}{5-2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}} = \frac{2\operatorname{tg} x+3}{5-2\operatorname{tg} x}.$$

Mivel $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, a kifejezés tovább alakítható:

$$\frac{2\operatorname{tg} x+3}{5-2\operatorname{tg} x} = \frac{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+3}{5-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}} = \frac{\sqrt{3}+4}{4-\sqrt{3}} = \frac{19+8\sqrt{3}}{13}.$$

A kifejezés értéke $\frac{19+8\sqrt{3}}{13}$.

5519 Az $\frac{1}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{9}$ összefüggés bal oldalát alakítva:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \cos^2\alpha.$$

Ez alapján $\cos^2\alpha = \frac{1}{9}$, amiből $\cos\alpha = \pm\frac{1}{3}$.

Ha α hegyesszög, akkor $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, ez esetben:

$$a^2 = 10^2+22^2-2\cdot 10\cdot 22\cdot\cos\alpha = 10^2+22^2-2\cdot 10\cdot 22\cdot\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad a \approx 20{,}91\ \text{cm}.$$

Ha α tompaszög, akkor $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, ez esetben:

$$a^2 = 10^2+22^2-2\cdot 10\cdot 22\cdot\cos\alpha = 10^2+22^2-2\cdot 10\cdot 22\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \quad\Rightarrow\quad a \approx 27{,}03\ \text{cm}.$$

A háromszög harmadik oldala 20,91 cm vagy 27,03 cm.

5520 Alakítsuk át a függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x) = -\cos^2 x+2\sin x-1 = -(1-\sin^2 x)+2\sin x-1 = \sin^2 x+2\sin x-2 = (\sin x+1)^2-3.$$

Induljunk ki a szinuszfüggvény értékkészletéből: $-1 \le \sin x \le 1$, vagyis $0 \le \sin x+1 \le 2$.

A másodfokú függvény a nemnegatív valós számok halmazán szigorúan monoton növekvő, tehát $0 \le (\sin x+1)^2 \le 4$, amiből $-3 \le (\sin x+1)^2-3 \le 1$.

Az $f(x) = -\cos^2 x+2\sin x-1$ függvény értékkészlete a $[-3;\ 1]$ intervallum.



5521 Mivel a koszinuszfüggvény 2π szerint periodikus, így az $a_n = \cos n \cdot \frac{\pi}{6}$ sorozat tagjai is periodikusan ismétlődnek:

$$a_n = \cos n \cdot \frac{\pi}{6} = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \cos(n+12k) \cdot \frac{\pi}{6} = a_{n+12k}, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

A sorozat periódusa 12:

$$a_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad a_2 = \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad a_3 = \cos 3 \cdot \frac{\pi}{6} = 0; \quad a_4 = \cos 4 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$a_5 = \cos 5 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad a_6 = \cos 6 \cdot \frac{\pi}{6} = -1; \quad a_7 = \cos 7 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad a_8 = \cos 8 \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2};$$

$$a_9 = \cos 9 \cdot \frac{\pi}{6} = 0; \quad a_{10} = \cos 10 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \quad a_{11} = \cos 11 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad a_{12} = \cos 12 \cdot \frac{\pi}{6} = 1.$$

Egy perióduson belül a 12 tag közül 4 irracionális.

Mivel $200 = 16 \cdot 12 + 8$, az irracionális tagok számát megkapjuk úgy, hogy vesszük a 16 periódus $4 \cdot 16$ számú irracionális tagját, és ehhez még hozzávesszük a soron következő $a_{193} = a_1$, $a_{197} = a_5$ és $a_{199} = a_7$ irracionális tagokat.

A sorozat első 200 tagja között tehát $4 \cdot 16 + 3 = 67$ irracionális szám van.

A 200 tag közül kettőt $\binom{200}{2}$-féleképpen választhatunk ki. Az összes eset száma $\binom{200}{2}$. A kedvező esetek száma $\binom{67}{2}$.

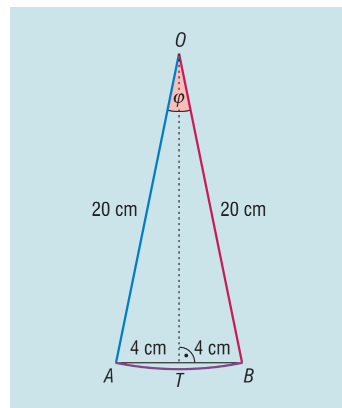
Annak a valószínűsége, hogy mind a két kiválasztott szám irracionális lesz:

$$\frac{\binom{67}{2}}{\binom{200}{2}} = \frac{\frac{67 \cdot 66}{2}}{\frac{200 \cdot 199}{2}} = \frac{2211}{19\,900} \approx 0{,}11.$$

5522 *a)* Az inga két szélső helyzete közti elfordulás szöge egy 20 cm sugarú kör 8 cm hosszú húrjához tartozó φ középponti szög.

Az ábra jelöléseit használva az ATO derékszögű háromszögből:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{AT}{AO} = \frac{4}{20} \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 23{,}07°.$$



Az inga végpontja egy lengés alatt a kör AB ívhosszának megfelelő utat tesz meg:

$$i_{AB} = 2 \cdot 20 \cdot \pi \cdot \frac{\varphi}{360°} = 40 \cdot \pi \cdot \frac{23{,}07°}{360°} \approx 8{,}05 \text{ cm}.$$

Huszonnégy óra alatt az inga végpontja

$$s = 24 \cdot 60 \cdot 50 \cdot i_{AB} = 579\,600 \text{ cm},$$

azaz megközelítőleg 5,8 km utat tesz meg.

b) A nagymutató 2 óra 20 perc alatt kétszer körbefordult, majd a 12 órás helyzetéhez képest még $360° \cdot \frac{20}{60} = 120°$-ot fordult el.



A kismutató óránként 30°-ot fordul el, így a kismutató 2 óra 20 perc alatt $60° + 30° \cdot \frac{20}{60} = 70°$-os szöggel fordul el a 12 órás helyzetéhez képest.

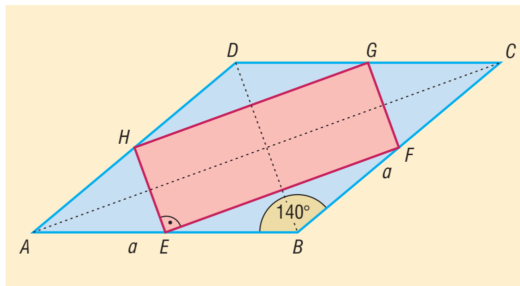
A kis- és nagymutató 2 óra 20 perckor $120° - 70° = 50°$ szöget zár be.

A két mutató végpontjának d távolságát koszinusztétellel határozhatjuk meg:

$$d^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 50° \quad \Rightarrow \quad d \approx 5{,}39 \text{ cm.}$$

A két mutató végpontja 2 óra 20 perckor 5,39 cm távolságra van egymástól.

5523 Az ábrán látható $ABCD$ rombusz oldalainak felezőpontjai által meghatározott négyszög $EFGH$. Az ABC háromszögben EF középvonal, tehát $EF = \frac{AC}{2}$, és $EF \parallel AC$. Az ABC háromszög hahasonló az EBF háromszöghöz, és a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$. Mivel hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának a négyzete, ezért:



$T_{EBF} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABC}$. Ugyanilyen megfontolással az ADC háromszögben: $T_{HDG} = \frac{1}{4} \cdot T_{ADC}$.

Ezek alapján:

$$T_{EBF} + T_{HDG} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABC} + \frac{1}{4} \cdot T_{ADC} = \frac{1}{4} \cdot (T_{ABC} + T_{ADC}) = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD}.$$

Hasonlóan belátható, hogy $T_{EHA} + T_{FCG} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABCD}$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy egy négyszög oldalfelezőpontjai által meghatározott négyszög területe fele az eredeti négyszög területének.

A rombusz oldalának hossza legyen a. Területe:

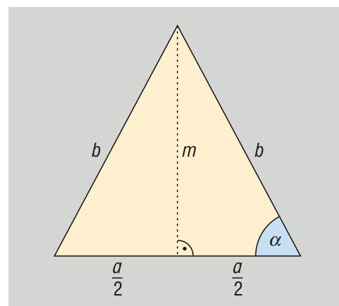
$$a^2 \cdot \sin 140° = 2 \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad a \approx 17{,}64.$$

A rombusz oldalának hossza 17,64 cm.

5524 Az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága m, szára b, az alapja pedig a hosszúságú. Ha a számtani sorozat differenciája d, akkor $m = a - d$ és $b = a + d$.

Az alaphoz tartozó magasság két egybevágó derékszögű háromszögre bontja az egyenlő szárú háromszöget.

Felírva a Pitagorasz-tételt:



$$b^2 = m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$(a+d)^2 = (a-d)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Mivel a nem lehet 0, az egyenletet rendezve az $a = 16d$ összefüggéshez jutunk.

A háromszög alapon fekvő α szögére felírható:

$$\sin\alpha = \frac{m}{b} = \frac{a-d}{a+d} = \frac{16d-d}{16d+d} = \frac{15}{17} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 61{,}93°.$$

A háromszög szögei 61,93°, 61,93° és 56,14°.



5525 A szabályos sokszög beírt körének sugara legyen r, köré írt körének sugara R.

$$r^2 \cdot \pi = 108\pi \quad \Rightarrow \quad r = 6\sqrt{3},$$
$$R^2 \cdot \pi = 144\pi \quad \Rightarrow \quad R = 12.$$

A szabályos sokszög két szomszédos A és B csúcsát a sokszög O középpontjával összekötve olyan egyenlő szárú háromszöget kapunk, amelynek szára R, magassága r. A háromszög α szárszögére felírható:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R} = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60^\circ.$$

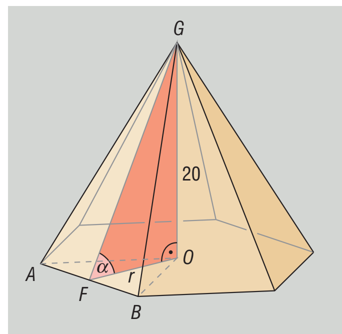
a) A szabályos sokszög $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ oldalú.

b) A szabályos hatszög oldala a köré írható körének sugara, azaz 12 cm.

c) Az ábrán látható egyenes gúla alaplapjának az oldallapjával bezárt α szöge az FOG derékszögű háromszögből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{GO}{FO} = \frac{20}{6\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 62{,}54^\circ.$$

A gúla alaplapja az oldallapjával $62{,}54^\circ$-os szöget zár be.



5526 Alakítsuk át a kifejezést:

$$\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} =$$
$$= \sqrt{(1-\cos^2 x)^2 + 4\cos^2 x} + \sqrt{(1-\sin^2 x)^2 + 4\sin^2 x} =$$
$$= \sqrt{(1+\cos^2 x)^2} + \sqrt{(1+\sin^2 x)^2} = 1 + \cos^2 x + 1 + \sin^2 x = 3.$$

5527 Alkalmazzuk a megfelelő trigonometrikus összefüggéseket:

a) $$4 \cdot \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{\cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right] - \cos\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]}{2}\right) =$$
$$= 4 \cdot \frac{\cos\frac{2\pi}{3} - \cos 2x}{2} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \cos 2x\right) = -1 - 2 \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 x) = 4 \cdot \sin^2 x - 3;$$

b) $$\operatorname{tg} 2x + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x + 1}{\cos 2x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\cos x + \sin x) \cdot (\cos x - \sin x)} =$$
$$= \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}.$$

5528 Használjuk fel a két tag összegének négyzetére és köbére vonatkozó nevezetes azonosságot, valamint a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ összefüggést:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x,$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^4 x \cdot \cos^2 x - 3\sin^2 x \cdot \cos^4 x =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x.$$



Ez alapján a kifejezés átalakítható:

$$(\sin^6 x + \cos^6 x) \cdot p^2 + (\sin^4 x + \cos^4 x) \cdot p - 4(\sin^4 x + \cos^4 x) =$$

$$= (1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x) \cdot p^2 + (1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) \cdot p - 4(1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) =$$

$$= p^2 + p - 4 - (3p^2 + 2p - 8) \cdot (\sin^2 x \cdot \cos^2 x).$$

Ez a kifejezés akkor lesz x-től független, ha $3p^2 + 2p - 8 = 0$.

Az egyenlet gyökei: $p_2 = -2$ és $p_2 = \frac{4}{3}$.

Ha a p paraméter értéke -2 vagy $\frac{4}{3}$, akkor a kifejezés értéke x-től független állandó.

5529 Az egyenlőség igazolásához elég belátni, hogy:

$$4 \cdot t \cdot \operatorname{ctg}\alpha + 4 \cdot t \cdot \operatorname{ctg}\beta + 4 \cdot t \cdot \operatorname{ctg}\gamma = a^2 + b^2 + c^2.$$

A kotangens szögfüggvény definícióját és a háromszög területére vonatkozó trigonometrikus összefüggéseket használva a bal oldal tovább alakítható:

$$4t \cdot \operatorname{ctg}\alpha + 4t \cdot \operatorname{ctg}\beta + 4t \cdot \operatorname{ctg}\gamma =$$

$$= 4 \cdot \frac{bc \cdot \sin\alpha}{2} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + 4 \cdot \frac{ac \cdot \sin\beta}{2} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + 4 \cdot \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} \cdot \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} =$$

$$= 2bc \cdot \cos\alpha + 2ac \cdot \cos\beta + 2ab \cdot \cos\gamma.$$

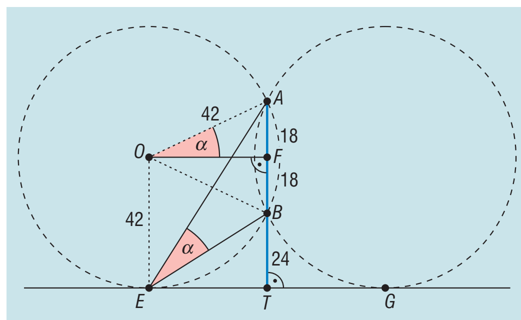
A koszinusztétel alapján:

$$2bc \cdot \cos\alpha + 2ac \cdot \cos\beta + 2ab \cdot \cos\gamma =$$

$$= \left(b^2 + c^2 - a^2\right) + \left(a^2 + c^2 - b^2\right) + \left(a^2 + b^2 - c^2\right) = a^2 + b^2 + c^2.$$

Ezzel a bizonyítandó egyenlőséget beláttuk.

5530 Tekintsük a mellékelt ábra jelöléseit. A torony teteje legyen A, talppontja T, a felső $\frac{3}{5}$ része AB.



Tekintsünk egy a tornyot tartalmazó, a talaj síkjára merőleges síkot.

Vegyük AB szakasz azon látószögkörívét, amelyik érinti a talaj egyenesét.

Ha az AB szakasz az E és G érintési pontból α szög alatt látszik, akkor a látszögköríven kívül lévő minden pontból α-nál kisebb szög alatt látszik.

Tehát az AB szakasz a talaj egyenesének E és G érintési pontjából látszik a legnagyobb szög alatt.

Ennek a látószögkörívnek a sugara az AB szakasz F felezőpontjának T ponttól vett távolsága:

$$\frac{2}{5} \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot 60 = 42 \text{ m}.$$

Az $ET = OF$ távolságot az OAF derékszögű háromszögből határozhatjuk meg:

$$OF = ET = \sqrt{42^2 - 18^2} = 12\sqrt{10}.$$

A torony felső $\frac{3}{5}$ része a vízszintes síkon egy olyan kör kerületének pontjaiból látszik a legnagyobb



szögben, amelynek sugara $12\sqrt{10} \approx 37{,}95$ m, és középpontja a torony talppontja.

Az α szög a kerületi és középponti szögek tétele alapján egyenlő az $AOF\sphericalangle$-gel, amely az AOF háromszögből számítható:

$$\sin\alpha = \frac{FA}{OA} = \frac{18}{42} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 25{,}38°.$$

A torony felső $\frac{3}{5}$ része a vízszintes síkon legfeljebb $25{,}38°$ szög alatt látszik.

Nevezetes síkidomok tulajdonságai – megoldások

5531 A háromszög-egyenlőtlenségből: $4 < c < 18$. Lehetséges értékek c-re: 5, 7, 11, 13, 17 (cm).

5532 90°, 45° és 45°.

5533 A két szögfelező 62,5°-os szöget zár be egymással.

5534 A két magasságvonal 55°-os szöget zár be egymással.

5535 70°.

5536 Nem lehetnek. A középvonalak hossza nem elégíti ki a háromszög-egyenlőtlenséget.

5537 Az AB távolság lehetséges értékei: 9 km, 10 km, 11 km, 12 km és 13 km.

5538 *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Igaz. *d)* Hamis. *e)* Hamis. *f)* Igaz.
g) Hamis. *h)* Hamis. *i)* Igaz.

5539 Ha a kerületi szöget α, akkor a hozzá tartozó középponti szöget 2α jelöli, tehát $3\alpha = 22{,}5°$. A keresett szögek:

$$\alpha = 7{,}5° = \frac{\pi}{24}\,(\text{rad}), \qquad 2\alpha = 15° = \frac{\pi}{12}\,(\text{rad}).$$

5540 A háromszög belső szögei: 70°, 65°, 45°.

5541 *a)* $R = 8$ cm; *b)* $R = 6{,}5$ cm; *c)* $R \approx 4{,}58$ cm.

5542 *a)* derékszögű; *b)* tompaszögű; *c)* hegyesszögű; *d)* derékszögű.

5543 *a)* A másik befogó hossza körülbelül 71,69 cm, az átfogó 96,77 cm.
b) A körülírt kör sugara kb. 48,39 cm.
c) A beírt kör sugara kb. 19,96 cm.
d) Az AB oldalhoz tartozó súlyvonal 48,39 cm, a BC oldalhoz tartozó 78,71 cm, az AC oldalhoz tartozó 74,23 cm.

5544

a	b	c	m	p	q
28	45	53	$\frac{1260}{53} \approx 23{,}77$	$\frac{784}{53} \approx 14{,}79$	$\frac{2025}{53} \approx 38{,}21$
$24\sqrt{5} \approx 53{,}67$	$12\sqrt{5} \approx 26{,}83$	60	24	48	12
25	$\frac{175}{24} \approx 7{,}29$	$\frac{625}{24} \approx 26{,}04$	7	24	$\frac{49}{24} \approx 2{,}04$
48 (vagy 55)	55 (vagy 48)	73	$\frac{2640}{73}$	$\frac{2304}{73}, \left(\frac{3025}{73}\right)$	$\frac{3025}{73}, \left(\frac{2304}{73}\right)$



5545 Először alkalmazva a magasságtételt, ered, hogy az átfogó: $c = 10$ cm. Majd például befogótételekkel számolva: $a = 2\sqrt{5}$ cm, $b = 4\sqrt{5}$ cm.

5546 *a)* A szinusztétel alapján $\sin\alpha \approx 0{,}7329$. Két ilyen háromszög van. Az egyikben $\alpha \approx 47{,}13°$, $\gamma \approx 112{,}87°$ és $AB \approx 18{,}86$ cm. A másik háromszögben $\alpha \approx 132{,}87°$, $\gamma \approx 27{,}13°$ és $AB \approx 9{,}33$ cm.

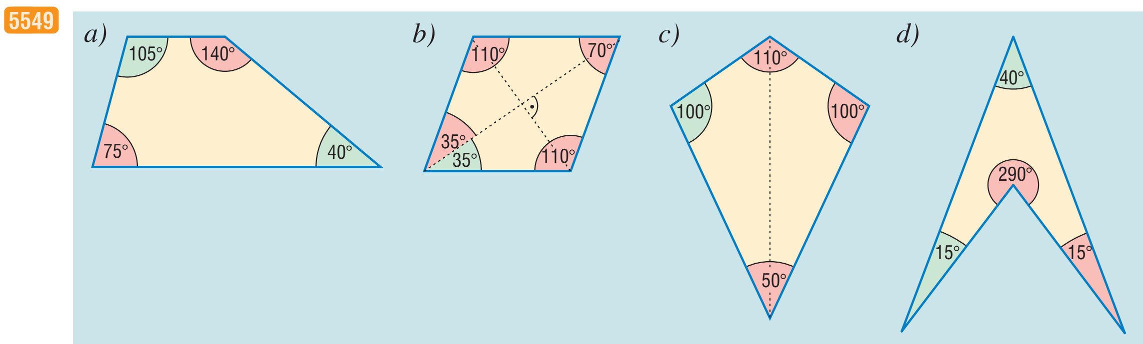
b) A szinusztétel alapján $\sin\alpha \approx 1{,}0004$. Mivel $\sin\alpha \le 1$ mindig teljesül, ezért nincsen ilyen háromszög. Ha valaki két tizedesjegyre kerekít, akkor $\sin\alpha \approx 1{,}00$, ezáltal α-ra $90°$ adódna. A hiba az, hogy a $\sin\alpha$ maximumát a közelítő érték lefelé kerekítése után kaptuk, így természetesen nem létezik ilyen háromszög.

5547 *a)* Az Andrásfalva és Csabaháza közti út hossza pontosan $\sqrt{3}$-szorosa a Barnabásfalva és Csabaháza közti út hosszának.

b) A két út $30°$-os szöget zár be egymással.

5548 *a)* Igaz. *b)* Hamis. *c)* Hamis.
d) Hamis. *e)* Hamis. *f)* Hamis.
g) Igaz. *h)* Igaz. *i)* Hamis.

5549



5550 A deltoid két oldalának hossza 61 cm, másik két oldala $\sqrt{521} \approx 22{,}83$ cm. A deltoid szögei $140{,}80°$, $140{,}80°$, $57{,}62°$, $20{,}78°$. A deltoid területe $880\ \text{cm}^2$.

5551 A rombusz átlóinak hossza 8 cm és 12 cm, területe $48\ \text{cm}^2$, különböző szögei $112{,}62°$ és $67{,}38°$.

5552 A paralelogramma területe $75\ \text{cm}^2$. A középvonalak hossza 5,13 cm és 16,92 cm. A paralelogramma különböző szögei $59{,}78°$ és $120{,}22°$.

5553 *a)* Igen, a 27 oldalú sokszögek.

b) Nincs ilyen sokszög.

5554 A sokszögnek 12 oldala van. A belső szögek összege $1800°$, a külső szögek összege $360°$.

5555 A szabályos sokszögnek 8 oldala, és így 8 szimmetriatengelye van. A sokszög belső szöge $135°$.

5556 A sokszögnek 6 oldala van.

5557 A húrnégyszög szemközti szögeinek összege $180°$. Mivel a deltoidnak biztosan van két egyenlő nagyságú szemközti szöge, ezért ezek csak $90°$-osak lehetnek. Ha egy deltoid húrnégyszög, akkor a szimmetriaátlójával szemközti szögek $90°$-osak. Ebből az is következik, hogy a négyszög köré írt kör középpontja a szimmetriaátló felezőpontja.

5558 *a)* A téglalapok; *b)* a rombuszok.



5559 Három ilyen deltoid van. Ezekben a másik két szög: 25° és 200°, 110° és 115°, illetve 112,5° és 112,5°.

5560 A további belső szögek: 105°, 125° és 55°.

5561 Az érintőszakaszok hossza 16 cm. A két érintő hajlásszöge 73,74°.

5562 *a)* A húr a kör középpontjából 38,94°-os szögben látszik. A szög mértéke radiánban 0,68.

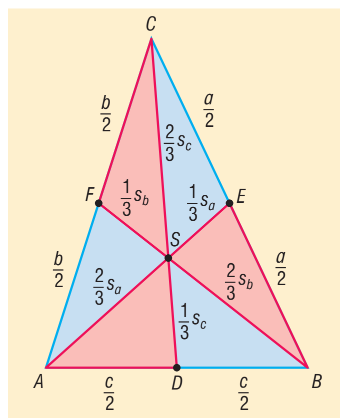
b) A húr a hosszabb körív pontjaiból 19,47° (0,34 radián), a rövidebb körív pontjaiból pedig 160,53° (2,80 radián) szög alatt látszik.

c) A kisebb körcikk területe 12,23 cm^2, a nagyobbé 100,86 cm^2.

d) A kisebb körív hossza 4,08 cm, a nagyobbé 33,62 cm.

e) A kisebb körszelet területe 0,92 cm^2, a nagyobbé 112,18 cm^2.

5563 A háromszög S súlypontja 2 : 1 arányban osztja fel a súlyvonalakat, amit az ábrán is bejelöltünk. A pirossal megjelölt háromszögekben a háromszög-egyenlőtlenség alapján:



az ADS háromszögben $\frac{2}{3}s_a + \frac{1}{3}s_c > \frac{c}{2}$,

a BES háromszögben $\frac{2}{3}s_b + \frac{1}{3}s_a > \frac{a}{2}$,

a CFS háromszögben $\frac{2}{3}s_c + \frac{1}{3}s_b > \frac{b}{2}$.

A három egyenlőtlenség megfelelő oldalainak összege

$$s_a + s_b + s_c > \frac{1}{2} \cdot (a + b + c),$$

ez éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség első fele.

Alkalmazzuk ismét a háromszög-egyenlőtlenséget, ezúttal:

az ADC háromszögben $b + \frac{c}{2} > s_c$,

az ABE háromszögben $c + \frac{a}{2} > s_a$,

a BCF háromszögben $a + \frac{b}{2} > s_b$.

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2} \cdot (a + b + c) > s_a + s_b + s_c,$$

ami éppen a második bizonyítandó egyenlőtlenség.

5564 A háromszög két külső szögét $3x$, illetve $4x$ alakban kereshetjük. Három eset lehetséges.

I. Ha a háromszög 65°-os szöge a $3x$ nagyságú szög mellékszöge, akkor $3x = 180° - 65° = 115°$, ebből $x \approx 38{,}33°$. A háromszög egy további külső szöge $4x \approx 153{,}33°$, a mellette fekvő belső szög pedig 26,67°. A háromszög belső szögei 65°, 26,67° és 88,33°.

II. Ha a háromszög 65°-os szöge a $4x$ nagyságú külső szög mellékszöge, akkor $4x = 115°$, $x = 28{,}75°$. A háromszög egy további külső szöge 86,25°. A háromszög belső szögei 65°, 93,75° és 21,25°.

III. Ha az adott arányú külső szögek egyike sem mellékszöge a 65°-os szögnek, akkor a másik két belső szög $180° - 3x$ és $180° - 4x$, így a belső szögekre: $180° - 3x + 180° - 4x + 65° = 180°$. Az egyenlet megoldása $x = 35°$, a háromszög belső szögei pedig 65°, 75° és 40°.



5565 *a)* Az ábra jelöléseit követve $AT = 5$ cm, $BT = 8$ cm, $BQ = 5$ cm. Az ABQ derékszögű háromszögben Pitagorasz tétele alapján:

$$m_a^2 = 13^2 - 5^2 \quad \Rightarrow \quad m_a = 12 \text{ cm}.$$

Ha $CQ = x$, akkor a háromszög területét kétféleképpen felírva:

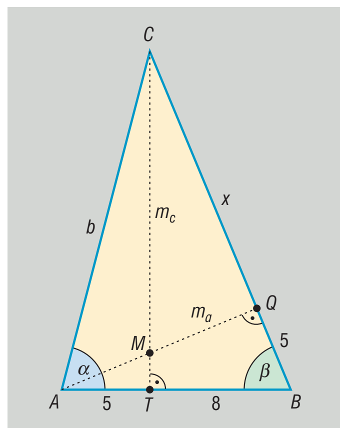
$$\frac{13 \cdot m_c}{2} = \frac{(x+5) \cdot 12}{2} \quad \Rightarrow \quad m_c = \frac{12}{13} \cdot (x+5).$$

Pitagorasz tételét alkalmazva, ezúttal a BCT háromszögben:

$$m_c^2 + 8^2 = (x+5)^2,$$

$$\frac{144}{169} \cdot (x+5)^2 + 8^2 = (x+5)^2,$$

$$(x+5)^2 = \frac{169 \cdot 64}{25}.$$



Felhasználva, hogy a bal oldalon álló hatvány alapja pozitív:

$$x + 5 = \frac{13 \cdot 8}{5} = 20{,}8 \text{ cm}.$$

A háromszög BC oldala 20,8 cm.

A háromszög AB oldalához tartozó magassága:

$$m_c = \frac{12}{13} \cdot (x+5) = 19{,}2 \text{ cm}.$$

Az AC oldalt az ACT háromszögre felírt Pitagorasz-tétellel számolhatjuk:

$$b^2 = 5^2 + 19{,}2^2.$$

A háromszög AC oldala 19,84 cm hosszúságú.

b) A háromszög szögeit szögfüggvények segítségével célszerű kiszámolni. Az ACT háromszögben $\operatorname{tg}\alpha = \frac{19{,}2}{5}$, amiből $\alpha \approx 75{,}40°$. A BCT háromszögben $\operatorname{tg}\beta = \frac{19{,}2}{8}$, tehát $\beta \approx 67{,}38°$.

A háromszög szögei $75{,}40°$, $67{,}38°$ és $37{,}22°$.

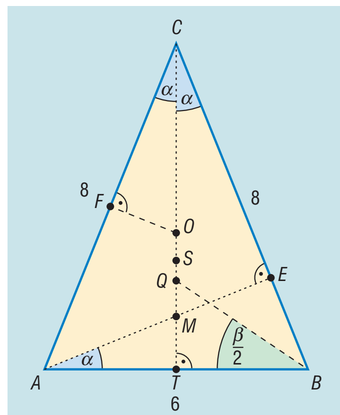
5566 *a)* Az ABC háromszög S súlypontja a súlyvonalakat a csúcstól számítva $2:1$ arányban osztja. Mivel a CT súlyvonal hossza $CT = \sqrt{55} \approx 7{,}42$ cm, ezért:

$$CS = \frac{2}{3} \cdot CT = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{55} \approx 4{,}94 \text{ cm}.$$

A súlypont a C csúcstól 4,94 cm távolságra található.

b) Az $MAT\sphericalangle$ és az $MCE\sphericalangle$ szögek szárai páronként merőlegesek egymásra, ezért a két szög ugyanakkora, az ábra jelöléseivel: $MAT\sphericalangle = MCE\sphericalangle = \alpha$. Ekkor viszont az MAT és BCT háromszögek szögei páronként megegyeznek, ezért a háromszögek hasonlók. A megfelelő oldalaik arányára:

$$\frac{MT}{AT} = \frac{BT}{CT} \quad \Rightarrow \quad \frac{MT}{3} = \frac{3}{\sqrt{55}}.$$



Az MT távolságra $MT \approx 1{,}21$ cm adódik, ezért az ABC háromszög magasságpontja a C csúcstól $7{,}42 - 1{,}21 = 6{,}21$ cm távolságra van.



c) Az ABC háromszögbe írt kör Q középpontja illeszkedik a belső szögfelezőkre. Az ABC háromszög B csúcsánál lévő β szögre:

$$\cos\beta = \frac{BT}{BC} = \frac{3}{8} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 67{,}98^\circ.$$

Ha a háromszögbe írt kör sugara $QT = r$, akkor a QBT derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{3}, \quad \text{így} \quad r \approx 2{,}02 \text{ cm}.$$

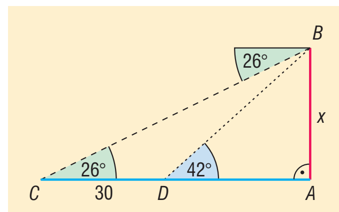
A Q pont a C csúcstól $7{,}42 - 2{,}02 = 5{,}40$ cm távolságra van.

d) A háromszög köré írt kör O középpontja illeszkedik az oldalfelező merőlegesekre. Ha az AC oldal felezőpontja F, akkor a COF háromszög derékszögű, és α hegyesszöge megegyezik a CAT háromszög megfelelő hegyesszögével. A két háromszög így hasonló, amiből:

$$\frac{CO}{CF} = \frac{CA}{CT} \quad \Rightarrow \quad \frac{CO}{4} = \frac{8}{\sqrt{55}} \quad \Rightarrow \quad CO \approx 4{,}31 \text{ cm}.$$

A körülírt kör középpontja 4,31 cm távolságra található a C csúcstól.

5567 Az épület tetejét B, talppontját A, az első megfigyelési pontot D jelöli az ábrán. Ha a D ponttól számítva még 30 métert távolodunk az épülettől, akkor olyan C pontba jutunk, ahonnan a B ponthoz tartozó emelkedési szög (amely váltószöge a hozzá tartozó depressziós szögnek) 26°. Ha az épület magassága x, akkor az ADB és ACB derékszögű háromszögekből:



$$\operatorname{tg}42^\circ = \frac{x}{AD} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}26^\circ = \frac{x}{AD+30}.$$

Mindkét egyenletből kifejezve AD-t, azt kapjuk, hogy:

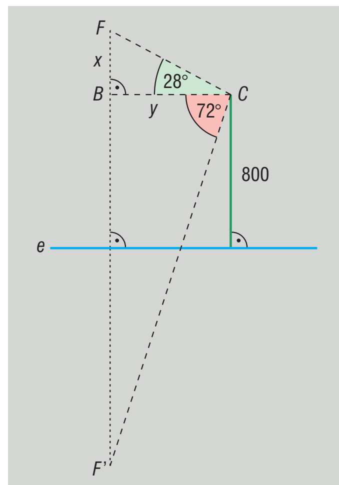
$$\frac{x}{\operatorname{tg}42^\circ} = \frac{x}{\operatorname{tg}26^\circ} - 30.$$

A kapott egyenlet megoldása:

$$x = \frac{30 \cdot \operatorname{tg}26^\circ \cdot \operatorname{tg}42^\circ}{\operatorname{tg}42^\circ - \operatorname{tg}26^\circ} \approx 31{,}93 \text{ m}.$$

Az épület magassága 31,93 méter.

5568 Az ábrán a hegy csúcsát C, a felhő helyét F, a felhő tükörképét a tóban F' jelöli. A tó tükrének szintje legyen az e egyenes, amely az FF' szakasz felezőmerőlegese.



Az FBC háromszögben:

$$\operatorname{tg}28^\circ = \frac{x}{y}.$$

Az $F'BC$ háromszögben:

$$\operatorname{tg}72^\circ = \frac{x+1600}{y}.$$

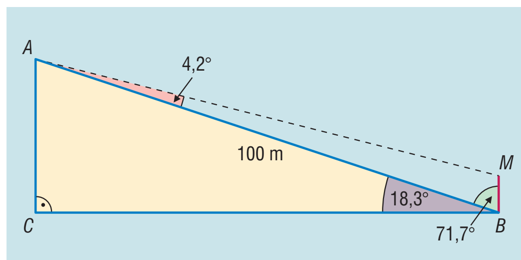
Az egyenletrendszert megoldva:

$$x = \frac{1600 \cdot \operatorname{tg}28^\circ}{\operatorname{tg}72^\circ - \operatorname{tg}28^\circ} \approx 334{,}15.$$

A felhő a hegycsúcs felett 334 méterre van.



5569 Tekintsük az ábra jelöléseit. A lejtős út elejét jelölje A, a végét B, az emlékoszlop tetejét az M pont.



Az ABM háromszögben ismert az AB oldal: $AB = 100$ m, és a rajta levő két szög:

$$BAM\sphericalangle = 4{,}2°,$$
$$ABM\sphericalangle = 90° - 18{,}3° = 71{,}7°.$$

A háromszög harmadik szöge:

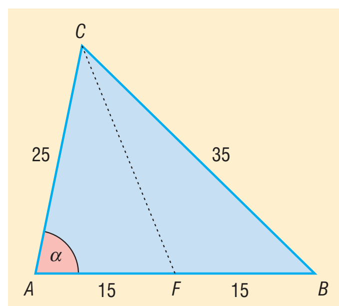
$$180° - 4{,}2° - 71{,}7° = 104{,}1°.$$

Az ABM háromszögben felírva a szinusztételt, az emlékoszlop MB magassága meghatározható:

$$\frac{MB}{100} = \frac{\sin 4{,}2°}{\sin 104{,}1°} \quad \Rightarrow \quad MB \approx 7{,}55 \text{ m}.$$

Az emlékoszlop 7,55 m magas.

5570 Az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján:



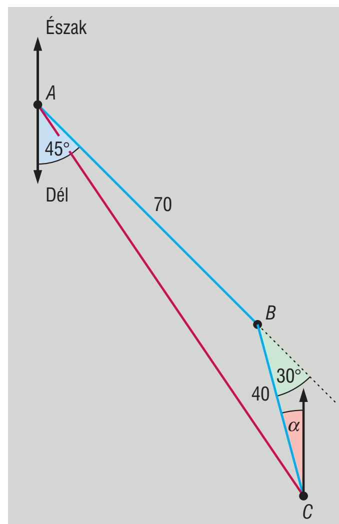
$$35^2 = 25^2 + 30^2 - 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot \cos\alpha,$$
$$\cos\alpha = 0{,}2,$$
$$\alpha \approx 78{,}46°.$$

Az élményfürdő az AB oldal F felezőpontjába kerül, ezért a feladat az ABC háromszög CF súlyvonalának hosszát kérdezi. Az ACF háromszögben ismét a koszinusztétel alapján:

$$CF^2 = 25^2 + 15^2 - 2 \cdot 25 \cdot 15 \cdot \cos 78{,}46°,$$
$$CF \approx 26{,}5 \text{ km}.$$

A tervezett útszakasz hossza 26,5 km.

5571 *a)* A társaság útját az ábra mutatja. A B pontban a fordulás szöge az ABC háromszög külső szöge.



Az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$AC^2 = 70^2 + 40^2 - 2 \cdot 70 \cdot 40 \cdot \cos 150°.$$

A műveletek elvégzése után $AC \approx 106{,}5$.

A társaság a kiinduló helyétől légvonalban 106,5 km távolságra került.

b) Az ABC háromszögben ezúttal a szinusztétel alapján:

$$\frac{\sin BAC\sphericalangle}{\sin 150°} = \frac{40}{106{,}5} \quad \Rightarrow \quad \sin BAC\sphericalangle \approx 0{,}1878.$$

Mivel a $BAC\sphericalangle$ egészen biztosan hegyesszög, ezért:

$$BAC\sphericalangle \approx 10{,}82°.$$

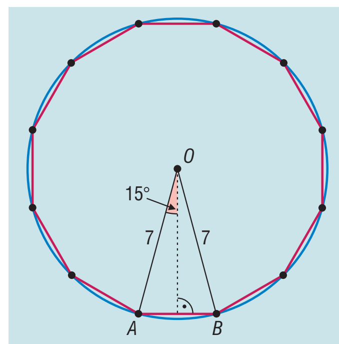
A pihenőhelyet a kiindulási hellyel összekötő egyenes út

$$\alpha = 45° - 10{,}82° = 34{,}18°\text{-os}$$

szöget zárna be az északi iránnyal.



5572 *a)* A 14 cm oldalú négyzetből kivágható legnagyobb kör sugara 7 cm. A szabályos tizenkétszög egy oldalához tartozó középponti szög 30°. Ebből következik, hogy az ábra jelölései alapján:



$$\sin 15° = \frac{\frac{AB}{2}}{7} = \frac{AB}{14}, \quad \text{ahonnan} \quad AB \approx 3{,}62 \text{ cm}.$$

A legnagyobb kivágható szabályos tizenkétszög oldala 3,62 cm.

b) A kör alakú kartonlap területe:

$$T_{kör} = 49\pi \approx 153{,}94 \text{ cm}^2.$$

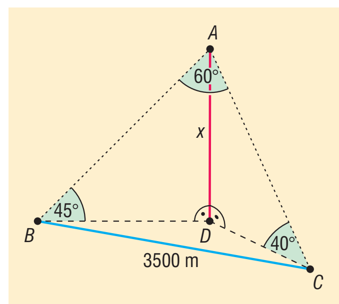
A tizenkétszög területe az ABO háromszög területének 12-szerese, azaz:

$$T_{12} = 12 \cdot \frac{7 \cdot 7 \cdot \sin 30°}{2} = 147 \text{ cm}^2.$$

Mivel $\frac{T_{12}}{T_{kör}} \approx 0{,}9549$, ezért a kör alakú kartonnak $100 - 95{,}49 = 4{,}51\%$-a vész kárba.

c) A négyzet területe 196 cm^2, ezért $\frac{196 - 147}{196} = \frac{1}{4}$-ed része, azaz 25%-a vész kárba.

5573 Jelölje a hegy csúcsát A, az A pontnak az autóút síkjára eső vetületét D, a településeket B és C. Ha a hegy magassága x, akkor az ABD derékszögű háromszögben $\sin 45° = \frac{x}{AB}$, ebből $AB = x\sqrt{2}$. Az ACD derékszögű háromszögben $\sin 40° = \frac{x}{AC}$, amiből pedig $AC = \frac{x}{\sin 40°}$.



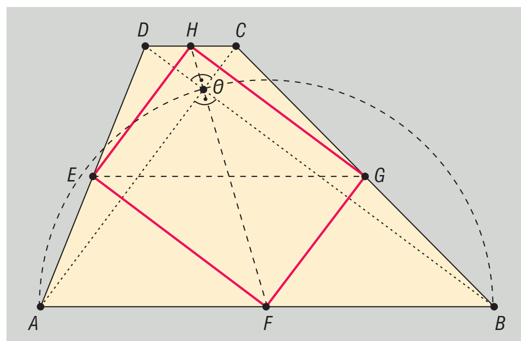
Végül az ABC háromszögben a koszinusztétel alapján:

$$BC^2 = \left(x\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sin 40°}\right)^2 - 2 \cdot \left(x\sqrt{2}\right) \cdot \frac{x}{\sin 40°} \cdot \cos 60°.$$

Felhasználva, hogy $BC = 3500$ m, a műveletek elvégzése után $x \approx 2349$ m adódik.

A hegy csúcsa az út síkja felett 2349 m magasságban van.

5574 *a)* A hosszabb alap 10 cm, a szárakat összekötő középvonal (az ábrán EG) hossza 6 cm.

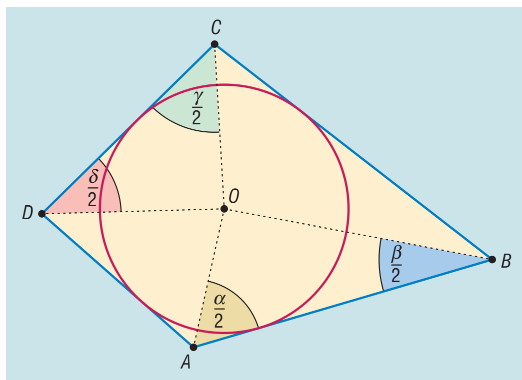


b) Thalész tételének megfordítása alapján az O pont illeszkedik az AB szakasz fölé emelt Thalész-körre, ezért ha F az AB szakasz felezőpontja, akkor FO a kör sugara, azaz $FO = 5$ cm. Ugyanígy látható, hogy HO a CD alap felével egyenlő: $HO = 1$ cm. Az ABO és CDO derékszögű háromszögek hasonlók, az O pontra vonatkozó középpontos hasonlósággal egymásba vihetők, amiből következik, hogy az F, O és H pontok egy egyenesre illeszkednek. Ebből adódóan az FH középvonal hossza: $FH = FO + HO = 6$ cm.



c) A középvonalak végpontjai az *EFGH* paralelogrammát fogják közre. Mivel *EF* a $BDA_\triangle$, *GH* pedig a $BDC_\triangle$ középvonala, ezért mindkét szakasz párhuzamos a *BD* átlóval. Hasonlóan igazolható, hogy az *EH* és *FG* szakaszok párhuzamosak az *AC* átlóval. A feltételek alapján a trapéz átlói merőlegesek egymásra, ezért az *EFGH* négyszög oldalai is, azaz *EFGH* téglalap.

5575 *a)* A szögfelezők közös pontja a négyszög mind a négy oldalától ugyanakkora távolságra van, ezért a négyszögnek van beírt köre, vagyis érintőnégyszögről van szó.



b) Az *ABCD* négyszög szögeit a szokásos módon jelöljük. Az *ABO* háromszögben:

$$AOB\sphericalangle = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right),$$

valamint a *CDO* háromszögben:

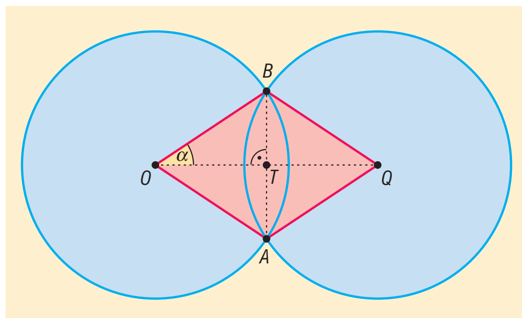
$$COD\sphericalangle = 180^\circ - \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right).$$

A két szöget összeadva, és felhasználva, hogy a négyszög belső szögeinek összege 360°:

$$AOB\sphericalangle + COD\sphericalangle = 360^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = 360^\circ - \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

Megjegyzés: Az érintőnégyszögben természetesen $BOC\sphericalangle + DOA\sphericalangle = 180^\circ$ is teljesül.

5576 *a)* Az *OAQB* négyszög minden oldala 3 cm, ezért a négyszög rombusz. Az ábra jelöléseit követve az *OTB* derékszögű háromszögben:



$$BT^2 = OB^2 - OT^2 = 3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{11}{4},$$

ebből $BT = \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1{,}66$ cm.

Az *OAQB* rombusz területe:

$$\frac{5 \cdot 3{,}32}{2} = 8{,}29\ \text{cm}^2.$$

b) Az $OTB_\triangle$-ben $\cos\alpha = \frac{2{,}5}{3}$, amiből $\alpha = 33{,}56^\circ$. A körök közös része két olyan 3 cm sugarú körszelet egyesítéséből áll, amelyekhez $2\alpha = 67{,}12^\circ$ középponti szög tartozik. Az *OA* és *OB* sugarak által határolt körcikk területe:

$$t = \frac{3^2 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot 2\alpha \approx 5{,}27\ \text{cm}^2.$$

A megfelelő körszelet területe:

$$t - t_{OAB} \approx 5{,}27 - \frac{8{,}29}{2} = 1{,}125\ \text{cm}^2.$$

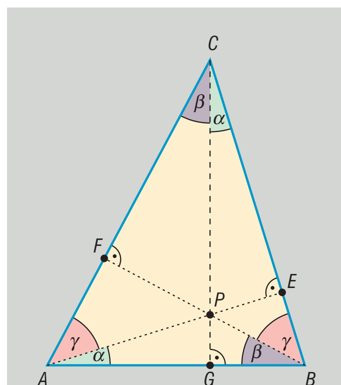
A két kör közös részének területe $2{,}25\ \text{cm}^2$.

A közös rész kerülete két egybevágó körív hosszából áll:

$$K \approx 2 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot 67{,}12^\circ \approx 7{,}03\ \text{cm}.$$

c) A megfelelő látószög $180^\circ - \alpha \approx 146{,}44^\circ$.

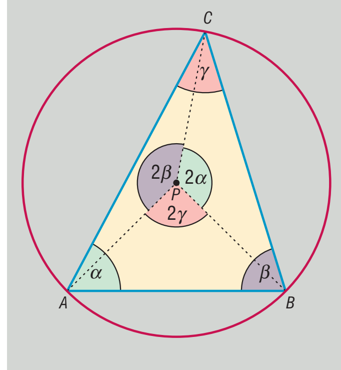




5577 *a)* A feltételek szerint az ábrán azonos módon megjelölt szögek megegyeznek. Az $ABC_\triangle$ belső szögeinek összegére felírható: $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$, amiből $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Ha a P ponton és a háromszög egy-egy csúcsán átmenő egyenesek a háromszög oldalait az E, F és G pontokban metszik (ld. ábra), akkor például az $ACG_\triangle$-ben az A és C csúcsoknál lévő szögek összege $\gamma + \alpha + \beta = 90°$, ezért a háromszög derékszögű, és a CP egyenes merőleges AB-re. Ugyanígy látható, hogy AP merőleges BC-re, és BP merőleges AC-re. A P pont tehát az $ABC_\triangle$ magasságpontja. Fordítva: az $ABC_\triangle$ magasságpontja nyilván mindhárom feltételt kielégíti.

b) Ha a P pont az $ABC_\triangle$ köré írt kör középpontja, akkor a kerületi és középponti szögek tétele értelmében a szögekre vonatkozó összes feltétel teljesül. Megmutatjuk, hogy a körülírt kör középpontján kívül más pont nem tehet eleget egyidejűleg mindhárom feltételnek.

Az első feltétel alapján ugyanis a P pont illeszkedik az AB szakasz 2γ szögű látószögkörívére (pontosabban a háromszög belsejébe eső körívre). A második feltétel szerint a P pont rajta van a BC szakasz 2α szögű látószögkörívén is. A két körívnek a B pont közös pontja, így ezen kívül már csak egy közös pontjuk lehet, ez pedig éppen a P pont. Ugyanakkor korábbi megjegyzésünk alapján a körülírt kör középpontja szintén rajta van mindkét körön, ezért P és a középpont szükségképpen megegyezik. Nyilvánvaló, hogy ekkor P a harmadik oldal megfelelő látószögkörívén is rajta van.

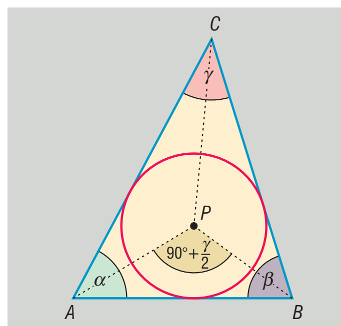


c) A P pont egybeesik az $ABC_\triangle$ beírt körének középpontjával. Előbb megmutatjuk, hogy a beírt kör középpontja eleget tesz a feltételeknek. Valóban, ha P a beírt kör középpontja, akkor az $ABP_\triangle$ szögeinek összege

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + APB\sphericalangle = 180° \quad \Rightarrow \quad APB\sphericalangle = 90° + \frac{\gamma}{2}.$$

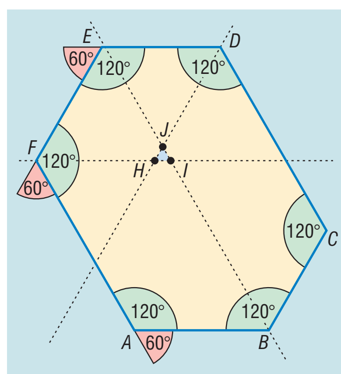
A másik két feltétel teljesülése hasonló módszerrel igazolható.

A *b)* feladatban ismertetett módszer értelemszerű módosításával igazolható, hogy a beírt kör középpontján kívül más pont nem tehet eleget egyidejűleg mindhárom feltételnek.



5578 *a)* A hatszög minden szöge 120°, külső szögei 60°-osak, ezért az ábra jelölései alapján az ED és AB oldalegyenesek egymással 60° + 60° + 60° = 180°-os szöget zárnak be, ezért $ED \parallel AB$. Ugyanígy bizonyítható, hogy $EF \parallel BC$, és $FA \parallel CD$.

b) Húzzunk párhuzamost az F ponton keresztül AB-vel (és így persze ED-vel is), a B ponton át FA-val (és CD-vel), végül a D ponton át EF-fel (és BC-vel). A keletkező egyenesek a $HIJ_\triangle$-et fogják közre (ld. ábra). Ebben a háromszögben a H csúcsnál lévő belső szög szárai páronként ellentétes irányúak az $ABCDEF$ hatszög E csúcsánál lévő, az ábrán megjelölt külső szög száraival, így a két szög váltószög. Ebből következik, hogy a $HIJ_\triangle$ H csúcsánál 60°-os szög található.





A háromszög J csúcsánál található belső szög, valamint a hatszög F csúcsánál lévő külső szög egyállású, ezért a $HIJ_\triangle$ J csúcsánál is 60º-os szög van. Ebből már következik, hogy a $HIJ_\triangle$ szabályos. Látható, hogy az $ABCDEF$ hatszög az $ABIF$, $BCDJ$, $DEFH$ paralelogrammákra, valamint a HIJ szabályos háromszögre bontható.

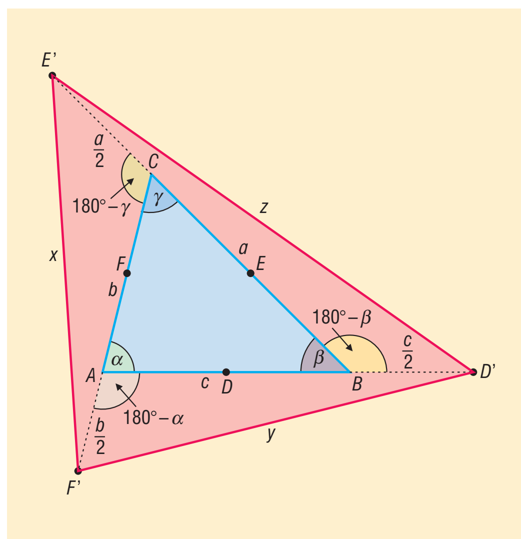
c) A paralelogramma szemközti oldalai egyenlők, ezért $FI = AB$ és $FH = ED$, amiből következik, hogy $HI = FI - FH = AB - ED$. Hasonlóan: $JI = BJ - BI = CD - AF$ és $JH = HD - JD = FE - BC$. Mivel a $HIJ_\triangle$ oldalai egyenlők, ezért $AB - ED = CD - AF = FE - BC$, így az $ABCDEF$ hatszög szemközti oldalai hosszának különbsége megegyezik.

5579 Az $E'F'C'$, $F'D'A$ és $D'E'B_\triangle$-ekben a koszinusztétel alapján:

$$x^2 = \frac{9}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 - 2\cdot\frac{3}{2}b\cdot\frac{1}{2}a\cdot\cos(180° - \gamma),$$

$$y^2 = \frac{9}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 - 2\cdot\frac{3}{2}c\cdot\frac{1}{2}b\cdot\cos(180° - \alpha),$$

$$z^2 = \frac{9}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 - 2\cdot\frac{3}{2}a\cdot\frac{1}{2}c\cdot\cos(180° - \beta).$$



Mivel $\cos(180° - x) = -\cos x$, ezért:

$$x^2 = \frac{9}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}ba\cdot\cos\gamma,$$

$$y^2 = \frac{9}{4}c^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{2}cb\cdot\cos\alpha,$$

$$z^2 = \frac{9}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{3}{2}ac\cdot\cos\beta.$$

Ha az $ABC_\triangle$ a megfelelő oldalra felírt koszinusztételből kifejezzük az utolsó tagokban szereplő szorzatokat, akkor kapjuk, hogy:

$$ba\cdot\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2},$$

$$cb\cdot\cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2},$$

$$ac\cdot\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}.$$

A kapott összefüggéseket visszahelyettesítve az x, y, z oldalak négyzetét tartalmazó sorokba:

$$x^2 = 3b^2 + a^2 - \frac{3}{4}c^2,$$

$$y^2 = 3c^2 + b^2 - \frac{3}{4}a^2,$$

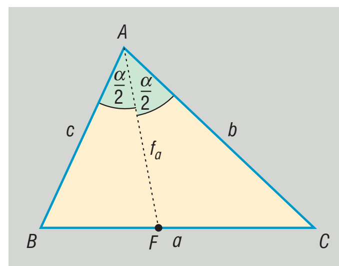
$$z^2 = 3a^2 + c^2 - \frac{3}{4}b^2.$$

A megfelelő oldalak összege:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{13}{4}\cdot\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{13}{4}.$$



5580 *a)* Az A csúcsból induló szögfelező a BC oldalt az F pontban metszi (ld. ábra). Az $ABC_\triangle$ területére:



$$T_{ABC} = T_{ABF} + T_{CAF},$$

$$\frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{c \cdot f_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{b \cdot f_a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{2}.$$

Mivel $\sin\alpha = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$, ezért $\sin\frac{\alpha}{2}$-vel történő egyszerűsítés után:

$$bc \cdot 2 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = c \cdot f_a + b \cdot f_a, \quad \text{ebből} \quad f_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c},$$

tehát éppen a bizonyítandó összefüggést kapjuk.

b) Az *a)* feladat ábrájának jelöléseit követve a szögfelezőtétel alapján:

$$\frac{BF}{FC} = \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{BF}{a - BF} = \frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad BF = \frac{ac}{b+c}.$$

Az $ABF_\triangle$-ben a koszinusztétel alapján:

$$f_a^2 = c^2 + \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 - 2 \cdot c \cdot \frac{ac}{b+c} \cdot \cos ABF\sphericalangle.$$

A fenti összefüggésben szereplő $ABF\sphericalangle$ koszinuszát kifejezhetjük az $ABC_\triangle$ oldalai segítségével. Ennek érdekében a koszinusztételt ezúttal az $ABC_\triangle$-ben is felírjuk:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos ABF\sphericalangle \quad \Rightarrow \quad \cos ABF\sphericalangle = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Ha a kapott összefüggést a szögfelező négyzetét tartalmazó egyenlőségbe visszahelyettesítjük, akkor:

$$f_a^2 = c^2 + \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 - 2c \cdot \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Az egyszerűsítések elvégzése és közös nevezőre hozás után:

$$f_a^2 = \frac{c^2 \cdot (b+c)^2 + a^2c^2 - c \cdot (b+c) \cdot \left(a^2 + c^2 - b^2\right)}{(b+c)^2}.$$

A számlálóban végezzük el a kijelölt műveleteket:

$$f_a^2 = \frac{b^2c^2 + 2bc^3 + c^4 + a^2c^2 - a^2bc - a^2c^2 - c^3b - c^4 + b^3c + b^2c^2}{(b+c)^2} =$$

$$= \frac{2b^2c^2 + bc^3 - a^2bc + b^3c}{(b+c)^2}.$$

Vegyük észre, hogy a számlálóban bc kiemelhető, így kapjuk, hogy:

$$f_a^2 = \frac{bc \cdot \left(2bc + c^2 - a^2 + b^2\right)}{(b+c)^2} = \frac{bc \cdot \left((b+c)^2 - a^2\right)}{(b+c)^2}.$$

Éppen ezt kellett igazolnunk.



5581 Az *EGCF* négyszög húrnégyszög. Mivel az *F* pont az *ADE* háromszög köré írt kör egy pontja, ezért az *ADEF* négyszög húrnégyszög, így követve az ábra jelöléseit:

$$DEF\sphericalangle = 180° - \alpha.$$

Ugyanígy húrnégyszög a *BDEG* négyszög is, így:

$$DEG\sphericalangle = 180° - \beta.$$

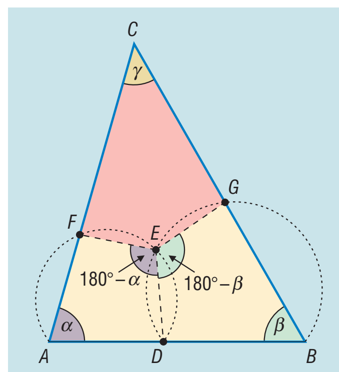
Ekkor az *EGCF* négyszögben az *E* csúcsnál lévő szög:

$$FEG\sphericalangle = 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) = \alpha + \beta.$$

Az *EGCF* négyszög *E* és *C* csúcsainál lévő szögek összege:

$$FEG\sphericalangle + FCG\sphericalangle = \alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

hiszen éppen az *ABC* háromszög szögeinek összegét kapjuk.

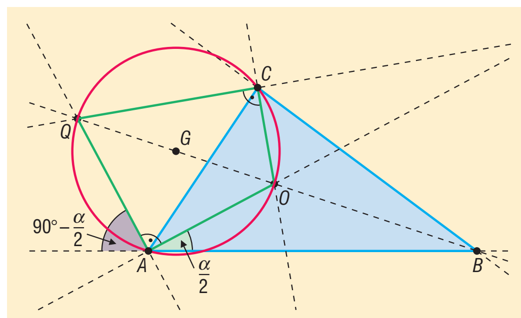


A húrnégyszögek tételének megfordítása alapján az *EGCF* négyszög valóban húrnégyszög.

5582 *a)* A háromszögbe írt kör *O* középpontja illeszkedik az *A* és *B* csúcsokból induló szögfelezőre, ezért például:

$$OAB\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}.$$

Az *AC* oldalhoz írható kör *Q* középpontja illeszkedik a *B* csúcsnál található belső szög szögfelezőjére, valamint az *A* és *C* csúcsoknál található külső szögek szögfelezőjére. Ezért a *QA* egyenes az *AB* oldalegyenessel $90° - \frac{\alpha}{2}$ szöget zár be. Ebből következik, hogy $QAO\sphericalangle = 90°$.



Ugyanígy látható be, hogy az *AOCQ* négyszög *C* csúcsánál is 90°-os szög van.

A húrnégyszögek tételének megfordítása alapján az *AOCQ* négyszög húrnégyszög.

Megjegyzés: A háromszög egy belső szögének felezője mindig merőleges a szomszédos külső szög felezőjére.

b) Az *AOCQ* négyszög köré írt kör egybeesik az *OQ* szakasz Thalész-körével, ezért *G* középpontja az *OQ* szakasz felezőpontja.

Koordináta-geometria – megoldások

5583 *a)* (27; –14); **b)** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -29$; *c)* $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{53}$.

d) A két vektor hajlásszöge 142,82°.

e) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$, és $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{53}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{53}}\mathbf{j}$.

Mindkét vektor hossza 1.



5584 A $\vec{v}$ vektorral párhuzamos vektorok: $\vec{a}$, $\vec{c}$. A $\vec{v}$ vektorra merőleges vektorok: $\vec{b}$, $\vec{d}$.

5585 *a)* $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, a két vektor merőleges egymásra.

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}=13$, a két vektor hegyesszöget zár be egymással.

c) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$, a két vektor tompaszöget zár be egymással.

5586 *a)* $AB=4\sqrt{10}\approx 12{,}65$.
A felezőpont $F(-1;\,1)$, a tükörkép $A'(17;\,-5)$.

b) $AB=2\sqrt{13}\approx 7{,}21$.
A felezőpont $F(6;\,2)$, a tükörkép $A'(12;\,11)$.

5587 *a)* Mivel $AB=5\sqrt{2}$, $AC=BC=5$, ezért a háromszög egyenlő szárú. Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű, mivel $AC^2+BC^2=AB^2$.

b) A háromszög súlypontja $S\left(\frac{7}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

c) Az ABC háromszög köré írt kör egyenlete $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$.

5588 A keresett pont a háromszög súlypontja, melynek koordinátái $S(3;\,2)$.

5589 *a)* A két falu távolsága 7,62 km.

b) A buszmegálló a $\left(-\frac{5}{3};-1\right)$ koordinátájú pontban található.

c) Az összekötő út egyenlete $y=\frac{3}{7}x-\frac{2}{7}$.

d) Az út csak a C pontban található településen halad keresztül.

e) 23,20°-ot.

5590 *a)* $y=-\frac{1}{7}x+\frac{11}{7}$; *b)* $y+2=\sqrt{3}(x-7)$; *c)* $y=-\frac{3}{4}x-\frac{17}{4}$; *d)* $y=-\frac{2}{5}x+\frac{11}{5}$;

e) $y=\frac{7}{3}x$; *f)* $x=-6$; *g)* $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$; *h)* $y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$.

5591 *a)* $y=-x+1$; *b)* $y=3x-1$; *c)* $y=1$; *d)* $y=\frac{1}{5}x-\frac{13}{5}$.

5592 Két ilyen egyenes van. Ezek egyenlete $y=x-3$, illetve $y=-x-1$.

5593 *a)* $y=-\frac{1}{5}x+\frac{22}{5}$, illetve $y=5x+20$; *b)* $y=5$, illetve $x=-3$;

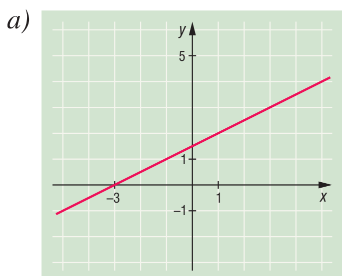
c) $x=-3$, illetve $y=5$; *d)* $y=4x+17$, illetve $x+4y=17$.

5594 Az adott egyenletű egyenesre merőleges egyenesek: a és b. Az egyenessel csak a d egyenes párhuzamos.

5595 *a)* $(-2;\,0)$ és $(5;\,0)$; *b)* $(0;\,-10)$ és $(0;\,1)$; *c)* $(-4;\,-3)$ és $(7;\,-6)$.

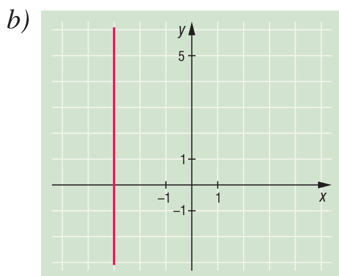


5596 *a)*



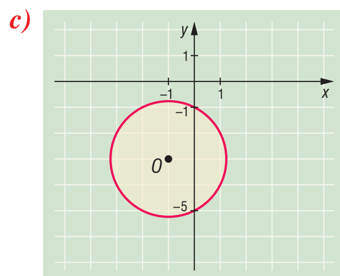
$m = \frac{1}{2}$;

b)



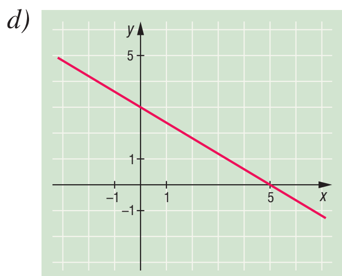
nincs meredekség;

c)



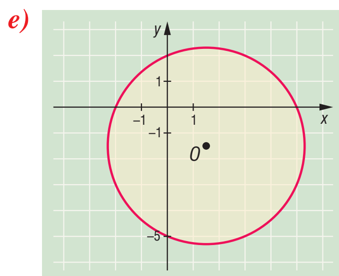
$O(-1; -3)$, $r = \sqrt{5}$;

d)



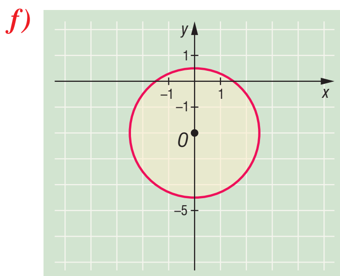
$y = -\frac{3}{5}x + 3$, $m = -\frac{3}{5}$;

e)



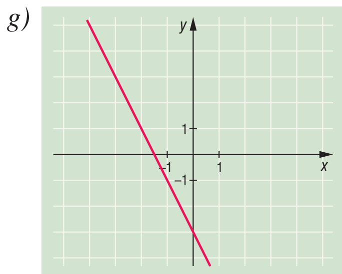
$O\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, $r = \sqrt{\frac{29}{2}}$;

f)



$O(0; -2)$, $r = \frac{5}{2}$;

g)



$y = -2x - 3$, $m = -2$.

5597 *a)* $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 9$; *b)* $(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 82$; *c)* $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = \frac{41}{4}$;
d) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 52$; *e)* $x^2 + (y + 2)^2 = 10$.

5598 *a)* Az AC és BD átlók felezőpontja egybeesik az origóval, ezért az $ABCD$ négyszög paralelogramma. Az $\overrightarrow{AB}(5; 1)$ és az $\overrightarrow{AD}(-1; 5)$ vektorok felhasználásával azt kapjuk, hogy az AB egyenes meredeksége $\frac{1}{5}$, az AD egyenes meredeksége pedig -5. Mivel a két meredekség szorzata -1, ezért a négyszög AB és AD oldala merőleges egymásra, így a négyszög valóban négyzet.

b) $(2; 3)$.

c) $y = -5x$; $y = \frac{1}{5}x$; $y = -\frac{2}{3}x$; $y = \frac{3}{2}x$.

d) A beírt kör egyenlete $x^2 + y^2 = \frac{13}{2}$, a négyzet köré írható kör egyenlete $x^2 + y^2 = 13$.

e) Az adott egyenes áthalad a négyzet középpontján, így annak területét megfelezi. Ebből következően mindkét keletkező trapéz területe 13 egység.

5599 *a)* A test egy körbefordulás alkalmával $10\pi \approx 31{,}42$ egység utat tesz meg.

b) A test C pont kivételével az összes többi ponton áthalad.

c) A kör az y tengelyt a $(0; 5)$ és a $(0; -3)$ pontokban metszi.

d) A test a kört az E pontban érintő egyenesen haladna tovább. Ennek egyenlete $4x - 3y = -16$.

5600 *a)* Ha $k = 0$, akkor az első egyenes párhuzamos az y tengellyel, ezért nincs meredeksége. Ha $k \neq 0$, akkor az első egyenes meredeksége $-\frac{4}{k}$. A második egyenes meredeksége $-\frac{k}{16}$.

b) Két párhuzamos egyenes iránytangense megegyezik:

$$-\frac{4}{k} = -\frac{k}{16} \quad \Rightarrow \quad k = \pm 8.$$

5601 *a)* Az egyenesek egyenletéből: $y = mx - 2$ és $y = \frac{5}{7}x - \frac{12}{7}$. Az első egyenes meredeksége m, a második egyenesé $\frac{5}{7}$.

b) Két merőleges egyenes iránytangensének szorzata -1:

$$m \cdot \frac{5}{7} = -1 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{7}{5}.$$

5602 Az ábra jelöléseit használva P pontból merőlegest állítunk az adott e: $y = 2x - 6$ egyenesre. Ennek az egyenesnek az egyenlete:

$$g:\ y = -\frac{1}{2}x + 4.$$

A két egyenes metszéspontja $M(4; 2)$ pont. Az M pont és az adott $P(2; 3)$ pont távolsága a kérdés:

$$\left|\overrightarrow{PM}\right| = \sqrt{(4-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}.$$

A pont és az adott egyenes távolsága $\sqrt{5}$ egység.

5603 *a)* Az egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása után kapjuk, hogy a két egyenes az $A(4; -2)$ pontban metszi egymást.

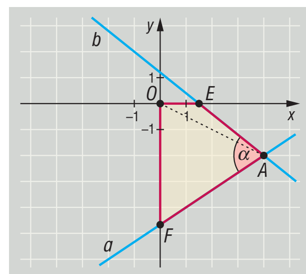
b) Az a egyenes egy normálvektora $\vec{n}_a(-2; 3)$, a b egyenesé $\vec{n}_b(4; 5)$.

A két vektor hossza $|\vec{n}_a| = \sqrt{13}$ és $|\vec{n}_b| = \sqrt{41}$, skaláris szorzatuk $\vec{n}_a \cdot \vec{n}_b = 7$. Ha a két egyenes által bezárt szög α, akkor:

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{41}}, \qquad \text{amiből} \qquad \alpha \approx 72{,}3°.$$

A két egyenes $72{,}3°$-os szöget zár be egymással.





c) Az a egyenes az y tengelyt az $F\left(0; -\frac{14}{3}\right)$ pontban, a b egyenes az x tengelyt az $E\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ pontban metszi. Ha az origót O jelöli, akkor a feladat az $OEAF$ négyszög területét kérdezi. Az OEA háromszög OE oldala $\frac{3}{2}$, az ehhez tartozó magasság 2, ezért:

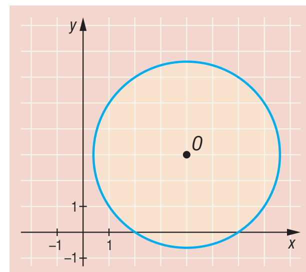
$$T_{OEA} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Az OFA háromszögben $OF = \frac{14}{3}$, az ehhez tartozó magasság 4, ezért $T_{OFA} = \frac{28}{3}$.

Az $OEAF$ négyszög területe:

$$T_{OEAF} = \frac{3}{2} + \frac{28}{3} = \frac{65}{6}.$$

5604 *a)* A kör egyenlete: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$.



b) Az x tengelyen lévő pontokra $y = 0$. A kör egyenletébe történő visszahelyettesítés után

$$(x-4)^2 + 9 = 13,$$
$$(x-4)^2 = 4,$$

amiből $x - 4 = 2$ vagy $x - 4 = -2$. A kör az x tengelyt a $(6; 0)$ és a $(2; 0)$ pontokban metszi.

Az y tengelyen lévő pontokra $x = 0$, amiből

$$16 + (y-3)^2 = 13,$$
$$(y-3)^2 = -3,$$

aminek nincs megoldása. A kör az y tengelyt nem metszi.

c) Mivel a keresett pont koordinátái megegyeznek, ezért $y = x$, amiből

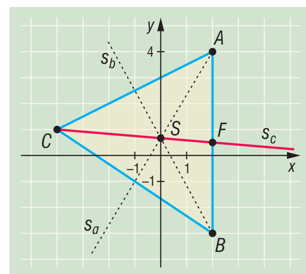
$$(x-4)^2 + (x-3)^2 = 13,$$

a műveletek elvégzése és összevonás után

$$2x^2 - 14x + 12 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet gyökei $x_1 = 1$, $x_2 = 6$. A körvonalnak két olyan pontja van, amelynek koordinátái megegyeznek: $(1; 1)$ és $(6; 6)$.

5605 *a)* Vegyük észre, hogy a megadott csúcs koordinátái kielégítik az s_a egyenes egyenletét, ezért az csak a háromszög A csúcsa lehet, így $A(2; 4)$. A háromszög S súlypontjának koordinátáit a súlyvonalak egyenletéből álló



$$\left.\begin{aligned} s_a&:\ -5x + 3y = 2 \\ s_b&:\ 11x + 6y = 4 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldása $x = 0$, $y = \frac{2}{3}$, ezért a háromszög S súlypontja $S\left(0; \frac{2}{3}\right)$.



Mivel az F felezőpont nem illeszkedik az s_a súlyvonalra, ezért biztosan valamelyik A csúcsot is tartalmazó oldal felezőpontja. Az A pont F pontra vonatkozó tükörképének koordinátái (2; –3), erről látható, hogy illeszkedik az s_b súlyvonalra, ezért csak a B pont lehet, tehát $B(2; -3)$.

Ha a C csúcs koordinátái $C(c_1; c_2)$, akkor a súlypont koordinátáira:

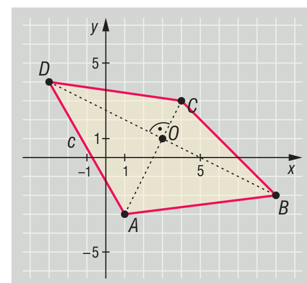
$$\frac{2+2+c_1}{3}=0 \quad \text{és} \quad \frac{4+(-3)+c_2}{3}=\frac{2}{3},$$

amiből $C(-4; 1)$.

A háromszög csúcsai tehát $A(2; 4)$, $B(2; -3)$, $C(-4; 1)$.

b) A harmadik súlyvonal egyenlete s_c: $x + 12y = 8$.

5606 *a)* Az AC egyenes egyenlete $y = 2x - 5$.



b) A deltoid tulajdonságai alapján a hiányzó B csúcs illeszkedik a D ponton átmenő, AC egyenesre merőleges egyenesre, továbbá az átlók O metszéspontja éppen a BD átló felezőpontja.

A D pontból az AC egyenesre állított merőleges egyenes egyenlete $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$. Az O pont koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned} y &= 2x-5 \\ y &= -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Az egyenletrendszer megoldása után $O(3; 1)$ adódik. Korábbi megjegyzésünk alapján az O pont a BD szakasz felezőpontja, ezért ha $B(x; y)$, akkor:

$$\frac{x+(-3)}{2}=3 \quad \text{és} \quad \frac{y+4}{2}=1,$$

ahonnan $B(9; -2)$.

c) A deltoid területe az átlók szorzatának fele, azaz $T_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}$.

Mivel

$$AC=\sqrt{45}=3\sqrt{5} \quad \text{és} \quad BD=\sqrt{180}=6\sqrt{5},$$

ezért:

$$T_{ABCD}=\frac{3\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}}{2}=45 \text{ területegység.}$$

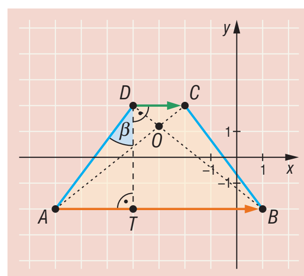
5607 A helyesen kitöltött táblázat:

Állítás	Igaz	Hamis
Az *ABCD* négyszög trapéz.	X	
Az *ABCD* négyszög húrnégyszög.	X	
Az *ABCD* négyszög érintőnégyszög.	X	
Az *ABCD* négyszögnek minden szöge kisebb, mint 120°.		X
A négyszög átlói a $\left(-3; \frac{3}{2}\right)$ pontban metszik egymást.		X
Az átlók metszéspontja az *AC* átló *C*-hez közelebbi negyedelőpontja.		X



- Az $ABCD$ négyszög trapéz, mert $\overrightarrow{AB}(8;0)$ és $\overrightarrow{DC}(2;0)$, vagyis $\overrightarrow{AB}=4\cdot\overrightarrow{DC}$. Mivel ez azt is jelenti, hogy a két vektor párhuzamos egymással, ezért a négyszög valóban trapéz, amelyben AB és CD az alapok.
- Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, hiszen $AD=BC=5$, ezért a trapéz szárai egyenlő hosszúak (és nem paralelogramma), így húrtrapézról van szó.
- Az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.

  Mivel
  $$AD+BC=5+5=10,$$
  valamint
  $$AB+CD=8+2=10,$$
  ezért a négyszög szemközti oldalainak összege megegyezik. Az érintőnégyszögek tételének megfordítása alapján $ABCD$ valóban érintőnégyszög.
- Az $ABCD$ négyszögnek van 120°-nál nagyobb szöge. Ha a trapéz D csúcsából induló magasságának talppontja T, akkor az ATD derékszögű háromszögben:
  $$\operatorname{tg}\beta=\frac{AT}{TD}=\frac{3}{4}\quad\Rightarrow\quad\beta\approx 36{,}87°.$$
  Az $ABCD$ trapéz D csúcsánál lévő szög:
  $$ADC\sphericalangle=\beta+90°\geq 36{,}87°+90°=126{,}87°,$$
  valóban 120°-nál nagyobb. Megjegyezzük, hogy a kerekítés miatt használtunk egyenlőtlenséget.



- A négyszög átlói nem a $\left(-3;\frac{3}{2}\right)$ pontban metszik egymást. Az $ABO_\triangle$ és a $COD_\triangle$ hasonló, hasonlóságuk aránya a trapéz alapjainak aránya, azaz $\lambda=\frac{1}{4}$.

  Ebből következik, hogy a trapéz átlói $1:4$ arányban osztják egymást, azaz az átlók metszéspontja éppen a CA szakasz C-hez közelebbi ötödölőpontja.

  Az osztópont koordinátáira vonatkozó összefüggés alapján:
  $$O\left(\frac{1\cdot(-7)+4\cdot(-2)}{5};\frac{1\cdot(-2)+4\cdot 2}{5}\right),\qquad\text{azaz}\qquad O\left(-3;\frac{6}{5}\right).$$
  A kapott pont nem egyezik meg a $\left(-3;\frac{3}{2}\right)$ ponttal.
- Az elmondottakból következik, hogy az O pont nem negyedelőpontja az AC átlónak.

5608 *a)* Az AC és BC egyenesek egyenletéből álló egyenletrendszer megoldása után kapjuk, hogy $C(1;3)$.

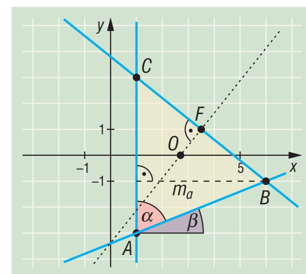
Az AC és AB egyenesek metszéspontja $A(1;-3)$.

Végül a BC és AB egyenesek közös pontja $B(6;-1)$.

Az $ABC_\triangle$ csúcsainak ismeretében a távolságok már könnyen kiszámolhatók:
$$AC=6\text{ km},\qquad AB=\sqrt{29}\approx 5{,}4\text{ km},\qquad BC=\sqrt{41}\approx 6{,}4\text{ km}.$$



b) A feladat az $ABC_\triangle$ A csúcsánál található α szöget kérdezi. Az AB egyenes egyenletéből leolvasható az egyenes meredeksége: $m_{AB} = \frac{2}{5}$, azaz az ábra jelölései alapján $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{5}$.



Az AB egyenes irányszöge ebből következően $\beta = 21{,}8°$.

Mivel a háromszög AC oldalegyenese az x tengellyel 90°-os szöget zár be, ezért $\alpha = 90° - \beta \approx 68{,}2°$.

Az A településen találkozó utak 68,2°-os szögben metszik egymást.

c) Az $ABC_\triangle$ területét legkönnyebb a b oldal, valamint a hozzá tartozó magasság segítségével kiszámolni. Mivel $b = 6$ km és $m_b = 5$ km, ezért a három útszakasz által közrefogott terület 15 km^2.

d) A keresett pont az $ABC_\triangle$ köré írható kör O középpontja. Az O pont koordinátáit az oldalfelező merőlegesek metszéspontjaként számolhatjuk ki.

Az AC oldalfelező merőlegese egybeesik az x tengellyel, ezért egyenlete $y = 0$.

A BC oldal felezőpontja $F\left(\frac{7}{2}; 1\right)$. A BC egyenes meredeksége $-\frac{4}{5}$, ezért a rá merőleges egyenes meredeksége $\frac{5}{4}$, a BC oldalfelező merőlegesének egyenlete:

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{27}{8}.$$

A megfelelő egyenletrendszer megoldása után $O\left(\frac{27}{10}; 0\right)$.

A szeméttelep helyét az $O\left(\frac{27}{10}; 0\right)$ pont jelöli ki a koordináta-rendszerben.

5609 Az elsőként adott kör egyenlete:

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 32,$$

ezért középpontja az $O_1(-2; -3)$ pont, sugara $r_1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

A másodikként adott kör egyenlete:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 8,$$

ezért középpontja az $O_2(4; 3)$ pont, sugara $r_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Mivel a két kör középpontjának távolságára $O_1O_2 = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ teljesül, ezért $O_1O_2 = r_1 + r_2$, amiből következik, hogy a két kör érinti egymást.

A két kör E érintési pontja az O_1O_2 szakaszt a sugarak arányában osztja, azaz:

$$\frac{O_1E}{EO_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2.$$

Ez azt jelenti, hogy az E pont az O_1O_2 szakasz O_2-höz közelebbi harmadolópontja, ezért:

$$E\left(\frac{1\cdot(-2) + 2\cdot 4}{3}; \frac{1\cdot(-3) + 2\cdot 3}{3}\right).$$

A két kör közös pontja az $E(2; 1)$ pont.



5610 *a)* Az egyenes egyenletéből $y = x + 1$, amit a kör egyenletébe visszahelyettesítve:

$$x^2 + (x + 1)^2 - 2x - 2(x + 1) = 11.$$

A műveletek elvégzése után:

$$2x^2 - 2x - 12 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = 3$ és $x_2 = -2$.

A metszéspontok $A(3; 4)$ és $B(-2; -1)$.

b) A k kör egyenlete $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$, az e egyenesé $x + 7y = -4$.

Az egyenes egyenletéből $x + 1 = -3 - 7y$, amit a kör egyenletébe helyettesítve:

$$(-3 - 7y)^2 + (y + 4)^2 = 25.$$

A műveletek elvégzése után:

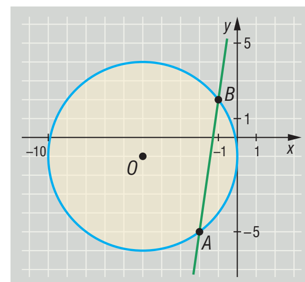
$$50y^2 + 50y = 0.$$

Az egyenlet megoldása után kapjuk a metszéspontok koordinátáit: $A(-4; 0)$ és $B(3; -1)$.

5611 *a)* A kör egyenletét átalakítva:

$$(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 25,$$

ezért középpontja az $O(-5; -1)$ pont, sugara $r = 5$.



b) A metszéspontok koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned}(x + 5)^2 + (y + 1)^2 &= 25\\ 7x + 9 &= y\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai adják.

Az y értékét az első egyenletbe visszahelyettesítve, majd a műveleteket elvégezve a következő egyenlethez jutunk:

$$(x + 5)^2 + (7x + 10)^2 = 25,$$
$$x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Az egyenlet megoldásai: $x_1 = -1$ és $x_2 = -2$.

Az egyenes a kört az $A(-2; -5)$ és a $B(-1; 2)$ pontokban metszi.

c) A kör sugara merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra. Ebből következik, hogy az A pontbeli érintőnek az $\overrightarrow{OA}(3; -4)$ vektor egy normálvektora, így az érintő egyenes egyenlete:

$$3x - 4y = 14.$$

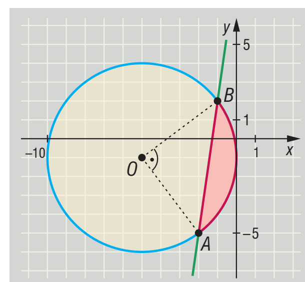
A B pontbeli érintő egy normálvektora az $\overrightarrow{OB}(4; 3)$ vektor, egyenlete pedig $4x - 3y = 2$.

d) Az AB húr hossza $AB = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Az $OAB_\triangle$-ben:

$$OA^2 + OB^2 = 5^2 + 5^2 = 50, \quad \text{ezért} \quad OA^2 + OB^2 = AB^2.$$

Pitagorasz tételének megfordítása alapján az $OAB_\triangle$ derékszögű. Megjegyezzük, hogy ezt onnan is láthatjuk, hogy $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, ezért a két vektor merőleges egymásra.

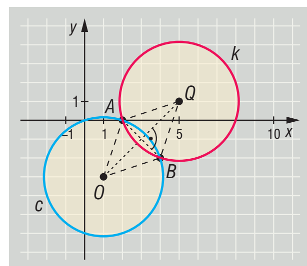
Ennek megfelelően a kérdéses körszelet területe egy negyedkör és egy derékszögű háromszög területének különbsége, azaz:



$$T_{\text{körszelet}} = \frac{5^2 \cdot \pi}{4} - \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{4} \cdot (\pi - 2) \approx 7{,}13.$$



5612 *a)* A c kör egyenletét átalakítva $(x-1)^2+(y+3)^2=10$, amiből a kör középpontja $O(1;-3)$, sugara $r=\sqrt{10}$. Ha az O pontot a megadott vektorral eltoljuk, akkor a $Q(5;1)$ pontot kapjuk, és mivel az eltolás a kör sugarát nem változtatja meg, ezért a k kör egyenlete $(x-5)^2+(y-1)^2=10$. A két kör metszéspontjait a körök egyenletéből álló



$$\left.\begin{aligned}(x-1)^2+(y+3)^2&=10\\(x-5)^2+(y-1)^2&=10\end{aligned}\right\}$$

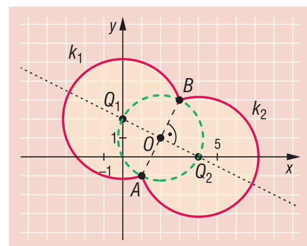
egyenletrendszer megoldásai adják. A megfelelő oldalak különbsége $8x+8y-16=0$, amiből $y=2-x$. Az egyenletrendszer megoldásai: $x_1=2$, $y_1=0$ és $x_2=4$, $y_2=-2$.

A két kör közös pontjai $A(2;0)$ és $B(4;-2)$.

b) Az $AOBQ$ négyszög minden oldala $r=\sqrt{10}$, ezért a négyszög rombusz. Az átlók hossza $OQ=4\sqrt{2}$ és $AB=2\sqrt{2}$. Az $AOBQ$ rombusz területe az átlók szorzatának a fele, azaz:

$$T=\frac{4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{2}=8.$$

5613 A látószögkörívekre vonatkozó tétel alapján az ilyen tulajdonságú pontok halmaza két, az AB szakaszra nézve szimmetrikusan elhelyezkedő körív (melyeket az ábrán pirossal jelöltünk). Ha a látókörívek pontjaiból az AB szakasz 45°-os szög alatt látszik, akkor a középponti és kerületi szögek tétele alapján a látókörívek középpontjából az AB szakasz 90°-os szög alatt látszik. Ezért a keresett körívek középpontja illeszkedik az AB szakasz Thalész-körére, valamint természetesen a szakaszfelező merőlegesére is.



A körívek középpontjának koordinátáit (az ábrán Q_1 és Q_2) a két említett alakzat metszéspontjaként számolhatjuk ki.

Az AB szakasz felezőpontja (egyben Thalész-körének középpontja) $O(2;1)$. A szakaszfelező merőleges egyenlete $x+2y=4$.

A megfelelő Thalész-kör egyenlete $OA=\sqrt{5}$ miatt $(x-2)^2+(y-1)^2=5$. A szakaszfelező merőleges egyenletéből $x=4-2y$, amit a Thalész-kör egyenletébe helyettesítve, majd az első tagból 4-et kiemelve adódik, hogy:

$$(2-2y)^2+(y-1)^2=5,$$
$$4\cdot(1-y)^2+(y-1)^2=5,$$
$$5\cdot(y-1)^2=5.$$

A kapott egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $y=2$ vagy $y=0$. A két látószögkörív középpontja tehát $Q_1(0;2)$ és $Q_2(4;0)$.

A látószögkörívek sugara ugyanakkora: $r=Q_1A=Q_2A=\sqrt{10}$, egyenletük:

$$k_1:\ x^2+(y-2)^2=10,\qquad k_2:\ (x-4)^2+y^2=10.$$

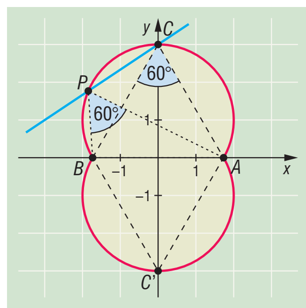
A feladat feltételeinek a k_1 körvonalnak azok a pontjai felelnek meg, amelyek az AB egyenes „felett” vannak. Mivel az AB egyenes egyenlete $y=2x-3$, ezért a k_1 körnek azok a pontjai tartoznak a látószögkörívhez, amelyek koordinátáira $y>2x-3$ teljesül.

A k_2 körnek azok a pontjai felelnek meg, amelyek az AB egyenes „alatt” vannak, azaz amelyek koordinátáira $y<2x-3$ teljesül.

Megjegyzés: A piros látókörívek kiegészítő köríveiből az AB szakasz 135°-os szög alatt látszik.



5614 Ha egy P pontból az AB szakasz 60°-os szög alatt látszik, akkor P illeszkedik az AB szakaszhoz tartozó 60°-os látószögkörívek valamelyikére.



Ha a C pont az AB szakasz végpontjaival szabályos háromszöget alkot, akkor a C pontból az AB szakasz biztosan 60°-os szög alatt látszik.

E két megállapításból következik, hogy az AB szakasz 60°-os látószögkörívei megegyeznek a szabályos $ABC_\triangle$ köré írható körök megfelelő köríveivel. Két olyan pont van, amelyek az A és B pontokkal szabályos háromszöget fognak közre. Mindkettő illeszkedik az y tengelyre, továbbá a két pont egymás tükörképe az x tengelyre vonatkozóan. Az y tengely pozitív felére illeszkedő megfelelő pont második koordinátája éppen a szabályos háromszög magasságával egyenlő.

Mivel $AB = 2\sqrt{3}$, amiből a háromszög magassága $m = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{2} = 3$, ezért a megfelelő szabályos háromszög harmadik csúcsa $C(0; 3)$. Az y tengely negatív felére illeszkedő csúcs koordinátái $C'(0; -3)$ (ld. ábra).

A szabályos háromszög köré írható kör középpontja egybeesik súlypontjával, sugara pedig a magasság $\frac{2}{3}$ része, ezért az $ABC_\triangle$ köré írható kör középpontja $O(0; 1)$, sugara 2, egyenlete:

$$k_1: \quad x^2 + (y-1)^2 = 4.$$

Hasonlóan az $ABC'_\triangle$ köré írt kör egyenlete:

$$k_2: \quad x^2 + (y+1)^2 = 4.$$

Az AB szakasz 60°-os látószögkörívei: a k_1 kör x tengely „feletti" íve, illetve a k_2 kör x tengely „alatti" íve.

Világos, hogy ez utóbbi nem metszi az adott $-2x + 3y = 9$ egyenletű egyenest, ezért az egyenes azon pontjai, amelyekből az AB szakasz 60°-os szög alatt látszik, csakis a k_1 körön lehetnek. Az ilyen tulajdonságú pontok koordinátáit ennek megfelelően az

$$\left.\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 &= 4 \\ -2x + 3y &= 9 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldásai adják: $x_1 = 0,\ y_1 = 3$ és $x_2 = -\frac{24}{13},\ y_2 = \frac{23}{13}$.

Két olyan pont van az adott egyenletű egyenesen, amelyekből az AB szakasz 60°-os szög alatt látszik, ezek koordinátái: $C(0; 3)$ és $P\left(-\frac{24}{13}; \frac{23}{13}\right)$.

5615 *a)* A k kör egyenlete $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$, tehát a kör középpontja $O(2; -2)$, sugara pedig 1.

Az érintők egyenletét $y = mx - 4$, illetve a kényelmesebb $mx - y - 4 = 0$ alakban kereshetjük. Mindkét érintő $r = 1$ egység távolságra halad a kör O középpontjától, ezért a pont és egyenes távolságára vonatkozó formula alapján:

$$\left|\frac{2m + 2 - 4}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 1, \qquad \text{azaz} \qquad \left|\frac{2m - 2}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 1.$$

Ha mindkét oldalt négyzetre emeljük, akkor:

$$\frac{(2m-2)^2}{m^2 + 1} = 1, \qquad \text{ebből} \qquad 3m^2 - 8m + 3 = 0.$$



Az egyenlet megoldásai:

$$m_1 = \frac{4+\sqrt{7}}{3} \quad \text{és} \quad m_2 = \frac{4-\sqrt{7}}{3}.$$

A P pontból a k körhöz húzható érintők egyenlete:

$$y = \frac{4+\sqrt{7}}{3} \cdot x - 4 \quad \text{és} \quad y = \frac{4-\sqrt{7}}{3} \cdot x - 4.$$

b) A feltételek alapján a c kör sugara 3. A két kört és közös érintőiket az ábra mutatja. Ha az egyik érintő érintési pontjait E és F, a c kör középpontját pedig Q jelöli, akkor a $POE_\triangle$ és $PQF_\triangle$ hasonló, megfelelő oldalaik arányára pedig:

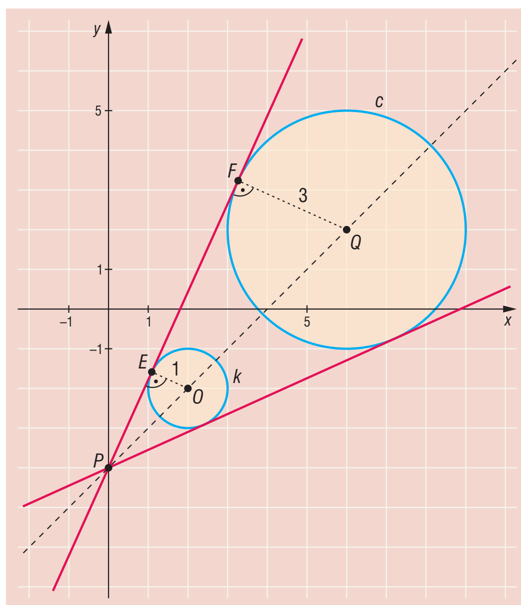
$$\frac{PO}{PQ} = \frac{1}{3}.$$

A kapott egyenlőségből leolvasható, hogy az O pont éppen a PQ szakasz P-hez közelebbi harmadolópontja, ezért ha $Q(x; y)$, akkor az osztópont koordinátáira vonatkozó összefüggés alapján:

$$\frac{2 \cdot 0 + 1 \cdot x}{3} = 2 \quad \text{és} \quad \frac{2 \cdot (-4) + 1 \cdot y}{3} = -2.$$

Az egyenletek megoldása után a Q pontra $Q(6; 2)$ adódik. A c kör egyenlete:

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 9.$$



c) A két kört és a közös belső érintőket az ábra mutatja. Ha az ábra jelöléseit követve a kialakuló érintési pontokat ezúttal is E és F jelöli, akkor a $POE_\triangle$ és $PQF_\triangle$ ismét hasonló, a megfelelő oldalaik arányára ezúttal is:

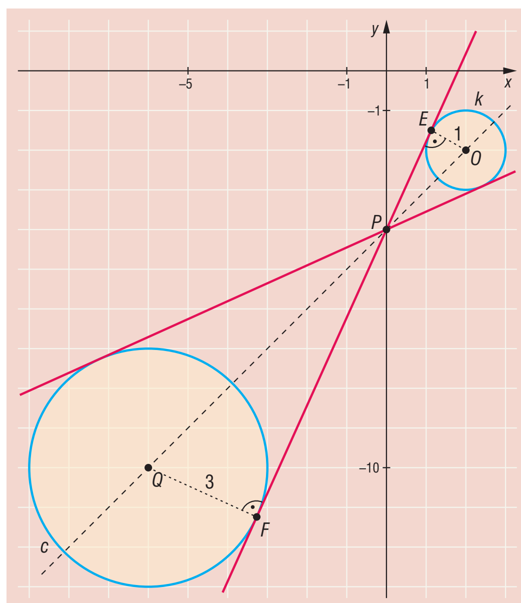
$$\frac{PO}{PQ} = \frac{1}{3}.$$

Ezúttal azonban a P pont elválasztja az O és Q pontokat, ezért P az OQ szakasz O-hoz közelebbi negyedelőpontja. Ha a Q pont koordinátái ismét $Q(x; y)$, akkor:

$$\frac{1 \cdot x + 3 \cdot 2}{4} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{1 \cdot y + 3 \cdot (-2)}{4} = -4.$$

Az egyenletek megoldása után a Q pontra $Q(-6; -10)$ adódik. A c kör egyenlete:

$$(x+6)^2 + (y+10)^2 = 9.$$





5616 *a)* A parabola egyenletét átalakítva $y=(x-3)^2-2$. Az egyenletből leolvasható, hogy a parabola tengelypontja a $C(3;-2)$ pont, paramétere $p=\frac{1}{2}$, fókuszpontjának koordinátái $F\left(3;-\frac{7}{4}\right)$.

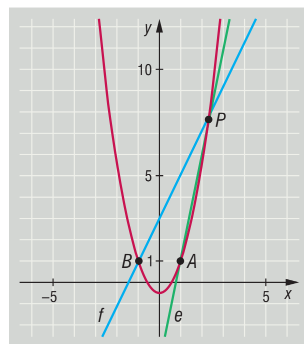
b) A parabola vezéregyenesének egyenlete v: $y=-\frac{9}{4}$.

c) Az A pont illeszkedik a parabolára, ezért az érintő meredeksége az f: $x\mapsto x^2-6x+7$ függvény deriváltjának $x_0=1$ helyen vett helyettesítési értéke. Mivel $f'(x)=2x-6$, ezért az érintő meredeksége -4, egyenlete: $y-2=-4(x-1)$, vagy átrendezve: $y=-4x+6$.

d) Az origó körül $+90°$-kal elforgatott parabola tengelypontját úgy kapjuk, hogy a C pontot $+90°$-kal elforgatjuk az origó körül. A elforgatott parabola tengelypontja $C'(2;\,3)$. A kapott parabola paramétere nem változik, tengelye viszont az x tengellyel párhuzamos („balra nyílik"), ezért egyenlete: $x-2=-(y-3)^2$, vagy átrendezve: $x=-y^2+6y-7$.

Az origó körül $-90°$-kal elforgatott parabola tengelypontja $C''(2;\,3)$. A kapott parabola (mely „jobbra nyílik") egyenlete: $x+2=(y+3)^2$, vagy átrendezve: $x=y^2+6y+7$.

5617 Ha az ábrának megfelelően az e egyenes meredekségét m jelöli, akkor egyenlete: $y-1=m(x-1)$. Mivel az f egyenes meredeksége $m-3$, ezért egyenlete: $y-1=(m-3)(x+1)$. A két egyenes metszéspontjának koordinátáit az



$$\left.\begin{aligned} y-1&=m\cdot(x-1)\\ y-1&=(m-3)\cdot(x+1)\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer megoldása adja. Mivel a két egyenlet bal oldalán ugyanaz a kifejezés áll, ezért a jobb oldalak is megegyeznek, így

$$m(x-1)=(m-3)(x+1).$$

A műveletek elvégzése, valamint rendezés után: $x=\frac{2m-3}{3}$.

A kapott értéket az első egyenletbe visszaírva, majd y értékét kifejezve kapjuk, hogy

$$y=\frac{2m^2-6m+3}{3},$$

ezért az e és f egyenesek P metszéspontjának koordinátái:

$$P\left(\frac{2m-3}{3};\,\frac{2m^2-6m+3}{3}\right).$$

A P pont első koordinátájából a meredekséget kifejezve $m=\frac{3x+3}{2}$, tehát a P pont második koordinátája:

$$y=\frac{2\cdot\left(\frac{3x+3}{2}\right)^2-6\cdot\frac{3x+3}{2}+3}{3}.$$

A műveletek elvégzése után $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$ adódik.

Eredményünk alapján az e és f egyenesek P metszéspontja illeszkedik az $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}$ egyenletű parabolára.

Számításaink „megfordíthatók", ezért a parabola minden pontja egy-egy e, illetve f egyenes metszéspontja.



12.6. ÉRETTSÉGI GYAKORLÓ FELADATSOROK

KÖZÉPSZINTŰ FELADATSOROK

1. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $x(x+2)$.

2. A háromszög köré írható kör sugara 2,6 cm.

3. Körtéből 9 kg-ot, almából 18 kg-ot, banánból pedig 54 kg-ot adott el.

4. A hűtőszekrény 52,5 literes.

5. A bank 3000 Ft kamatadót vont le.

6. $100\,100\,101\,001_2$.

7. Medián 4,5.
Alsó kvartilis 3,5.
Felső kvartilis 5.

8. $(x-1)^2+(y-1)^2=10$.

9. $\frac{70}{200}=0,35$.

10. A nagyváros lakossága 4 év eltelte után haladja meg a 210 000 főt.

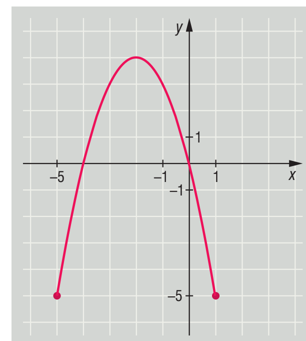
11. *a)* Nem. *b)* Igen. *c)* Igen.

12. $\alpha \approx 114,59°$.

1. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* $f(-6)=-(-6+2)^2+4=-12$,
$f(5)=-(5+2)^2+4=-45$.

b) A grafikon az ábrán látható.



c) Az egyenlet:
$$-(x+2)^2+4=-21,$$
ami a következő alakban is írható:
$$(x+2)^2=25.$$
Ennek megoldásai:
$$x_1=3 \quad \text{és} \quad x_2=-7.$$

14. *a)* Jelölje az adatsor elemeit nagyság szerinti sorrendben a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Az adatsor legkisebb eleme 10 000, a legnagyobb eleme pedig 30 000, így $a_1 = 10\,000$ Ft és $a_5 = 30\,000$ Ft. A nagyság szerinti sorrendben harmadik elem megegyezik az adatok mediánjával, ami 15 000, így $a_3 = 15\,000$ Ft. Az alsó kvartilis 11 000 Ft, ez (mivel 5 elemű az adatsor) pont a nagyság szerinti sorrendben első és második elem számtani közepe, azaz

$$11\,000 = \frac{10\,000 + a_2}{2},$$

így $a_2 = 12\,000$ Ft. Az adatsor felső kvartilise 25 000, ami épp a nagyság szerinti sorrendben negyedik és ötödik elem számtani közepe, ezért

$$25\,000 = \frac{a_4 + 30\,000}{2},$$

amiből $a_4 = 20\,000$ Ft. Berci tehát összesen 87 000 Ft-ot takarított meg az elmúlt öt hónapban.

b) A választott laptop 3 év múlva $250\,000 \cdot 0{,}65^3 \approx 68\,656$ Ft-ot ér.

c) Mivel $\dfrac{68\,656}{250\,000} \approx 0{,}2746$, ezért 3 év alatt a laptop értékcsökkenése körülbelül 72,54%-os.

15. *a)* A szépirodalmi könyvek számát $7x$, az albumok számát $5x$ alakban kereshetjük.

A feltételek alapján a műszaki könyvek száma $1{,}8 \cdot (5x) = 9x$.

Ha a 15 könyvből minden polcra ugyanannyit helyezünk, akkor a polcokon rendre $7x + 5$, $5x + 5$, illetve $9x + 5$ könyv lesz, továbbá például $(7x + 5) : (5x + 5) = 4 : 3$.

A felírt arányból $x = 5$. Eszerint Kristófnak összesen 35 szépirodalmi könyve, 25 albuma és 45 műszaki könyve van.

Az ellenőrzés mutatja, hogy ekkor műszaki könyvből valóban 1,8-szer annyi van, mint albumból, továbbá ha minden polcra 5 könyvet helyezünk, akkor a könyvek számának aránya $4 : 3 : 5$ lesz.

b) Kristóf $\binom{25}{3} = 2300$-féleképpen tud három albumot kölcsönadni Károlynak.

c) Ha Kristóf megveszi a 15 kiszemelt könyvet, akkor összesen 120 könyvet tárol majd a polcokon.

1. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Az 5 doboz $5! = 120$-féleképpen helyezhető egymás mellé.

b) Az első gyermek 5-féle, a második 4-féle, a harmadik 3-féle színű lufit kaphat. Az esetek száma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

c) Az árus az első órában összesen 14 lufit adott el. A lufik átlagára euróban:

$$\frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 1{,}4 + 4 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 2}{14} = \frac{19{,}4}{14} \approx 1{,}39.$$

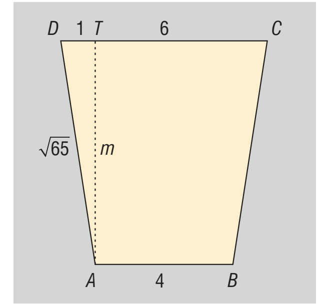
Az árus átlagosan 139 centért adta a lufikat az első órában.

d) A lufikból 19,4 € az árus bevétele. A lufi beszerzési ára 0,4 €, ez 14 lufi esetén 5,6 €, ezért a lufis haszna 13,8 €. Ez körülbelül 246,4%-os haszonnak felel meg.

e) Az eladott 14 lufi között vannak olyanok, amelyeket nem tudunk megkülönböztetni (az azonos színűek), így a lufik ismétléses permutációjáról van szó. Az esetek száma:

$$\frac{14!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 2!} = 25\,225\,200.$$



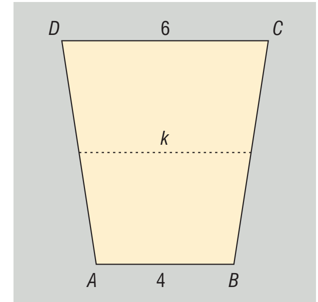


17. *a)* A gyertya tengelymetszetét az ábra mutatja. A csonka kúp m magasságát az ATD derékszögű háromszögből Pitagorasz tételével számolhatjuk: $m = 8$ cm.

Mivel a csonka kúp alapkörének sugara 2 cm, fedőkörének sugara pedig 3 cm, ezért térfogata:

$$V = \frac{8\pi}{3} \cdot \left(2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2\right) \approx 159{,}17.$$

A gyertya térfogata 159,17 cm^3.



b) Ha a gyertyát az alapokkal párhuzamos síkkal két részre vágjuk, akkor két csonka kúp alakú rész keletkezik, ahol mindkét keletkező trapéz magassága 4 cm, k éppen az $ABCD$ trapéz középvonala, így hossza a két alap számtani közepe, azaz $k = 5$ cm.

Ha V_1 a kisebb, V_2 a nagyobb rész térfogatát jelöli, akkor arányukra:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4\pi}{3} \cdot \left(2^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)}{\frac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \cdot 3 + 3^2\right)} = \frac{61}{91} \approx 0{,}67.$$

A keletkező két rész térfogatának aránya $\frac{61}{91}$.

18. *a)* A 15 szintes lépcső egyes szintjeit alkotó kockák száma felülről lefelé haladva számtani sorozatot alkot, amelynek első tagja 1, különbsége 2. Ebből következik, hogy a legalsó, 15. szinten található kockák száma $1 + 14 \cdot 2 = 29$.

b) Az n szintből álló lépcső legfelső szintjén 1, legalsó szintjén pedig $1 + 2(n - 1) = 2n - 1$ kocka található, ezért megépítéséhez összesen

$$S_n = 1 + 3 + \ldots + 2n - 1$$

kocka szükséges. Az S összegben éppen az első n páratlan szám összege áll, amit a számtani sorozat összegképletének alkalmazásával számíthatunk ki:

$$S = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2.$$

Az n szintből álló lépcső megépítéséhez n^2 darab kocka szükséges. Mivel Aladárnak 150 darab építőkockája van, ezért a legnagyobb olyan n egész számot keressük, amelyre $n^2 \le 150$ teljesül, azaz $n \approx 12{,}25$, vagyis Aladár építőkockáiból maximum 12 szintes lépcsőt építhet.

c) Aladár a következő számú építőkockákat használhatja fel a lépcsők építéséhez: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144. Ha Aladár épít egy kétszintes, egy ötszintes, továbbá egy tizenegy szintes lépcsőt, akkor mind a 150 kockát felhasználja, így egy sem marad felhasználatlan.

2. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $5{,}325 \cdot 10^{-18}$.

2. Összesen 6 dolgozó volt már mindkét városban.



3. *c)*.

4. $\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{2}=6\cdot 3=18$ utazó csapat alakítható ki.

5. $x=-3$, $x=0$ és $x=3$.

6. A négy ismert szám összege 177, amihez ha még 70-et adunk, akkor 247-et kapunk. Ehhez az ismeretlen számjegyet hozzáadva, 9-cel osztható számot kell kapnunk. Mivel a 247-nek a 9-cel való osztás során fellépő maradéka 4, ezért még 5-öt kell hozzáadni, hogy 9-cel osztható számot kapjunk, ezért az 5. nyertes szám a 75.

7. *a)* Hamis. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz.

8. Például: 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5.

9. Az akváriumhoz $3\cdot 80\cdot 60+2\cdot 60\cdot 60=21\,600\ \text{cm}^2=2{,}16\ \text{m}^2$ üveget használtak fel.

10. A két térkép hasonló egymáshoz, az $1:2\,300\,000$ méretarányú térképet $\lambda=\frac{2\,300\,000}{1\,200\,000}=\frac{23}{12}$ arányú hasonlósági transzformációval lehet átvinni az $1:1\,200\,000$ méretarányú térképbe. Ebből következik, hogy az utóbbi térképen a Cegléd–Szeged-távolság $4{,}5\cdot\frac{23}{12}\approx 8{,}6$ cm.

Kiszámolhatjuk a két város valóságban mért távolságát is:

$$4{,}5\cdot 2\,300\,000=10\,350\,000\ \text{cm},$$

majd kiszámoljuk, hogy ennek mekkora távolság felel meg az $1:1\,200\,000$ méretarányú térképen:

$$10\,350\,000:1\,200\,000\approx 8{,}6\ \text{cm}.$$

11. Az egyenes egyenlete: $y=-2x+5$. Az egyenes az x tengelyt az $\left(\frac{5}{2};0\right)$ pontban metszi.

12. A módusz és a medián egyaránt 3.

2. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* A négyzetgyökvonás miatt $x\ge -2$. Emeljük mindkét oldalt négyzetre, így

$$x+2=(10-x)^2,$$
$$x+2=100-20x+x^2,$$

amiből rendezés után

$$x^2-21x+98=0.$$

A kapott másodfokú egyenlet gyökei: $x_1=14$ és $x_2=7$. Ellenőrzés mutatja, hogy x_1 hamis gyöke az egyenletnek, míg x_2 megoldás. Az egyenlet egyetlen megoldása tehát $x=7$.

b) Az egyenlet értelmezési tartománya a valós számok halmaza. A hatványozás azonosságait használva $3^{x^2}=3^{12+4x}$. Mindkét oldalon 3-as alapú hatványok állnak, amelyek csak úgy egyezhetnek meg, ha kitevőik is egyenlők, ezért $x^2-4x-12=0$.

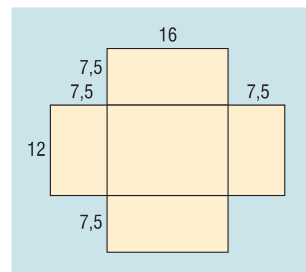
A kapott másodfokú egyenletből: $x_1=6$ és $x_2=-2$. Mindkét szám megoldása az egyenletnek.

14. *a)* A befőttesüveg alapkörének sugara $r=4$ cm, magassága $m=15$ cm.

Egy üveg térfogata: $V=r^2\pi m\approx 753{,}98\ \text{cm}^3$, azaz közelítően 7,5 dl.



b) Az üvegek tárolására szolgáló kartondoboz felül nyitott téglatest, az alaplapjának oldalai 24 cm és 32 cm, magassága 15 cm. A doboz hálójának kicsinyített képe az ábrán látható (az adatok centiméterben vannak megadva).



c) Mivel 1 dobozba 12 üveg fér, ezért nagymamának összesen 4 dobozra van szüksége.

Egy doboz térfogata $V = 24 \cdot 32 \cdot 15 = 11\,520\ \text{cm}^3$, így a 4 doboz összesen $46\,080\ \text{cm}^3 = 46{,}08\ \text{dm}^3$ helyet foglal el.

15. *a)* Az 1500 €-ból 200 € 1%-os kamatlábbal kamatozik, így erre a részre a bank 2 € kamatot fizet. A maradék 1300 € után 4% kamat jár, azaz $1300 \cdot 0{,}04 = 52$ €. A bank a lekötött összeg után 54 € kamatot fizet.

b) Mivel $\dfrac{54}{1500} = 0{,}036$, ezért a bank által ténylegesen kifizetett kamat 3,6%.

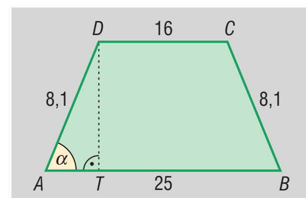
c) Ha x eurós betétnél legalább 3,8%-os kamatot fizet a bank, akkor

$$2 + (x - 200) \cdot 0{,}04 \geq x \cdot 0{,}038, \quad \text{vagyis} \quad x \geq 3000.$$

Legalább 3000 €-t kell lekötnünk ahhoz, hogy arra a bank legalább 3,8%-os kamatot fizessen.

2. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Tekintsük az ábra jelöléseit: $AB = 25$, $CD = 16$, $AD = BC = 8{,}1$, és DT a trapéz magassága.



Az ADT derékszögű háromszögben:

$$AD^2 = AT^2 + DT^2,$$
$$8{,}1^2 = 4{,}5^2 + DT^2,$$

amiből a trapéz DT magasságára körülbelül 6,73 méter adódik.

b) A töltés keresztmetszetének területe:

$$T = \frac{25 + 16}{2} \cdot 6{,}73 = 137{,}97\ \text{m}^2.$$

c) Az ADT derékszögű háromszögben:

$$\cos\alpha = \frac{AT}{AD} = \frac{4{,}5}{8{,}1},$$

amiből $\alpha = 56{,}25°$.

17. *a)* Anna a három kockával összesen $6^3 = 216$-féleképpen dobhat. A kedvező esetek számbavételénél hasznos lehet azokat a következő módon csoportosítani:

- A dobott pontok száma 18, ha Anna minden kockával 6-ost dob.
- A dobott pontok száma 17, ha két 6-ost és egy 5-öst dob. Attól függően, hogy a piros, zöld vagy kék kockával dobja az 5-öst, ez az eset 3-féleképpen következhet be.
- A dobott pontok összege 16, ha két 5-ös mellett egy 6-ost dobott (összesen 3 eset), vagy két 6-os mellett egy 4-est (szintén 3 eset). A pontok száma 6-féleképpen lehet 16.



- A dobott pontok összege 15. A lehetséges dobások: két 6-os mellett egy 3-as (3 eset), egy 6-os, egy 5-ös és egy 4-es ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ eset), illetve három 5-ös (1 eset). Ez összesen 10 eset.

Anna tehát összesen $1 + 3 + 6 + 10 = 20$-féleképpen dobhat úgy, hogy azzal a játékot megnyerje, ezért nyerésének valószínűsége $\frac{20}{216} \approx 0{,}0926$.

b) Anna a zöld és kék kockákkal összesen 36 különböző eredményt dobhat. Ha a piros kockával 6-ost dobott, akkor ahhoz, hogy a játékot megnyerje, a másik két kockával összesen legalább 9-et kell dobnia. A következő esetek lehetségesek:

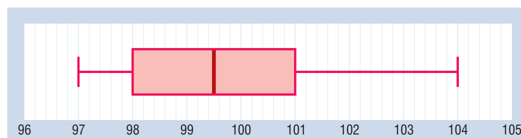
- A dobott pontok összege 12, ha a zöld és a kék kockával egyaránt 6-ost dob.
- A dobott pontok összege 11. Ez kétféleképpen következhet be: zöld 6-os és kék 5-ös, vagy fordítva.
- A dobott pontok összege 10. Ekkor vagy két 5-öst dob (1 eset), vagy egy 6-ost és egy 4-est (2 eset). A pontok összege 3-féleképpen lehet 10.
- A dobott pontok összege 9. Ekkor vagy egy 6-ost és egy 3-ast dob (2 eset), vagy egy 5-öst és egy 4-est (2 eset). Összesen 4 esetben lehet a dobott pontok összege 9.

Anna legalább 9-et $1 + 2 + 3 + 4 = 10$-féleképpen dobhat, ezért nyerésének valószínűsége: $\frac{10}{36} \approx 0{,}2778$.

18. *a)* Az adatok átlaga 99,8 gramm, az adatok szórása körülbelül 2,3. A termék nem kerülhet forgalomba.

b) Az adatok nagyság szerinti sorrendben:

97, 97, 98, 98, 99,
100, 101, 101, 103, 104.



Az adatok mediánja 99,5.

A minta alsó kvartilise 98, felső kvartilise pedig 101.

3. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Van, aki nem kiváló matematikából.
Nem mindenki kiváló matematikából.

2. $\frac{1}{12}$-dik hatvány.

3. 1 mérföld = 63 360 inch.

4. $a \neq 2$, $a \neq -2$, a tört: $\frac{3}{a-2}$.

5. $A \cup B = [-6; 4[$ és $A \cap B = [-3; 2]$.

6. $\alpha = 150°$.

7. $x \in \left]\frac{2}{5}; \infty\right[$.

8. Az átlag 15, a módusz 12, a medián 14.

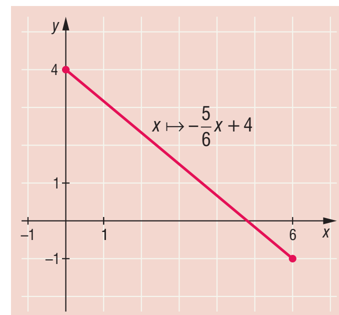
9. 66°, 66°, 48° vagy 54°, 54°, 72°.



10. Mindkét nyelvet beszéli: $0,85 + 0,75 - 1 = 0,6$, a lakosok 60%-a. A keresett valószínűség 0,6.

11. Koszinusztétellel számolva a legnagyobb oldallal szemközti szöget: $\gamma = 97,98°$.

12. Értékkészlet: $[-1; 4]$.



3. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* Az értelmezési tartomány: $x \geq \frac{13}{7}$, négyzetre emelés után: $x_1 = 7$, $x_2 = 2$, mindkettő megoldás.

b) Minden tényezőt írjunk át 2 hatványára:

$$(2^x)^x \cdot (2^{-2})^5 = 2^8 \cdot (2^5)^2 \cdot (2^{-3})^x.$$

A zárójeleket felbontva és a szorzásokat elvégezve:

$$2^{x^2-10} = 2^{18-3x}.$$

Az exponenciális függvény monotonitása miatt:

$$x^2 - 10 = 18 - 3x.$$

Rendezve: $x^2 + 3x - 28 = 0$, aminek megoldásai $x_1 = 4$ és $x_2 = -7$.
Ellenőrzéssel megmutatható, hogy mindkét szám megoldás.

14. *a)* A kamatozott összeg mértani sorozatot alkot: $x = 150\,000 \cdot 1,05^{12} = 269\,378$ Ft lesz a felvehető összeg. A haszon 119 378 Ft lesz.

b) A kivehető összeg:

$$150\,000 \cdot 1,05^{12} + 150\,000 \cdot 1,05^{11} + 150\,000 \cdot 1,05^{10} + \ldots + 50000 \cdot 1,05.$$

Ebből:

$$150\,000(1,05^{12} + 1,05^{11} + \ldots + 1,05) = 150\,000 \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{12} - 1}{1,05 - 1} = 2\,506\,947 \text{ Ft}.$$

Mivel összesen $12 \cdot 150\,000 = 1\,800\,000$ Ft-ot fektetett be, a haszon 706 947 Ft.

15. *a)* A teljes gráfhoz 8 él hiányzik, ennyi kézfogás lesz.

b) Nem, mert Antinak csak egy ismerőse van.

c) Tibi két oldalára $3 \cdot 2$-féle módon kerülhet egy-egy lány, a kimaradó 3 emberrel együtt 4! a leülések lehetséges száma, tehát:

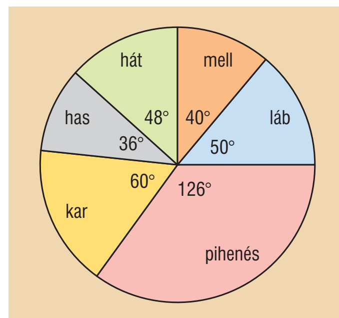
$$p = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{5}.$$



3. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Az edzésformák heti összesítése:

	Összes idő (perc)	Középponti szög (fok)
Lábizom	75	50
Mellizom	60	40
Hátizom	72	48
Hasizom	54	36
Karizom	90	60
Pihenés (összesen)	189	126



b) $\frac{189}{540} = 0{,}35,$ tehát az idő 35%-ában pihen.

c) A négyféle edzéstípus lehetséges sorrendje $4!,$ amikor két kiválasztott egymás után van, a lehetőségek száma $2 \cdot 3!.$

A feltételnek megfelelő esetek száma a kettő különbsége: $4! - 2 \cdot 3! = 12.$

17. 1 csepp víz térfogata: $V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 1{,}5^3}{3} \approx 14{,}14 \text{ mm}^3.$

a) $2 \text{ dl} = 200\,000 \text{ mm}^3,$ ez 14144,27 csepp víz, ennyi csepp ≈ 3536 perc ≈ 58 óra 56 perc alatt csöpög le.

b) 1 év alatt $4 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 2\,102\,400$ csepp esik le, ennek a térfogata kb. 29,7 liter.

c) 1 évben 52 dl tisztítószer fogy el, ehhez 11 flakont kell megvenni, amelynek az ára: 9020 Ft.

18. *a)* A piros, a zöld és a citromsárga részek területe:

$$T_{\text{piros}} = r^2 \cdot \pi = 113{,}10 \text{ cm}^2,$$

$$T_{\text{zöld}} = T_{\text{citrom}} = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 93{,}53 \text{ cm}^2.$$

A narancssárga szabályos sokszög 12 darab egyenlő szárú háromszögre bontható, a háromszög magassága:

$$m = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg} 15°} \approx 11{,}2.$$

Ebből adódik:

$$T_{\text{narancs}} = 12 \cdot \frac{a \cdot m}{2} - r^2 \cdot \pi = 289{,}96 \text{ cm}^2.$$

b) A $12 \cdot \frac{a \cdot m}{2} - x^2 \cdot \pi = x^2 \cdot \pi$ egyenletből $x \approx 8$ cm.

c) A belső kör színezésére 4 lehetőség van, a körülötte levő részre 3 színből választhatunk, és a külső háromszögeket a maradék két színnel csak egyféleképpen színezhetjük ki.

Tehát $4 \cdot 3 = 12$ különböző, a feltételeknek megfelelő színezés lehetséges.



4. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $A \cap B = \{36; 81\}$.

2. 50°, 50°, 80° vagy 50°, 65°, 65°.

3. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

4. A tagadás a *c)*.

5. $36^{3\cdot\log_6 2} = 2^6 = 64$.

6. Az első szám a 63, a második a 64, ez a nagyobb.

7. $\frac{3\cdot 0{,}88 + 9\cdot 0{,}44}{12} = 0{,}55$, az éves kihasználtság 55%-os.

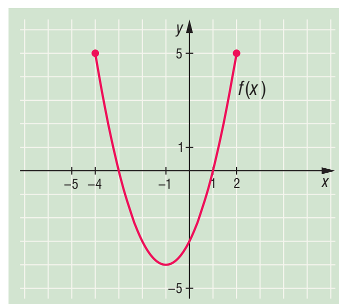
8. 4,8 m, 6,4 m, 3,2 m.

9. Egy 0-ra, hiszen csak egy darab 2-es és 5-ös van a szorzatban.

10. $x \in \left]\frac{11}{8}; \infty\right[$.

11. A függvény átalakításával: (➡)

$$f(x) = (x + 1)^2 - 4.$$



12. Szinusztétellel számolva a 28°-kal szemközti oldalt:

$$b = 14{,}63 \text{ cm}.$$

4. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* A $3\cdot\frac{x}{100} = 0{,}5\cdot\frac{10}{100}$ egyenletből $x = \frac{5}{3}$, tehát 1,67%-os oldatot kapunk.

b) A $3\cdot\frac{2}{100} = x\cdot\frac{10}{100}$ egyenletből $x = 0{,}6$, tehát 0,6 liter ecethez 2,4 liter vizet kell öntenünk.

14. A naponta elolvasott oldalak száma számtani sorozatot alkot, amelyben $a_1 = 15$.

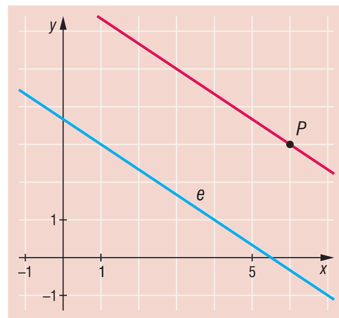
a) Az $S_n = \frac{30 + 12d}{2}\cdot 13 \ge 413$ egyenlőtlenség megoldása: $d \ge 2{,}79$.

Tehát ha naponta legalább 3 oldallal növeli az elolvasott mennyiséget, be tudja fejezni a könyvet a határidőre.

b) Ha $d = 4$, $S_{12} = 444$, tehát az utolsó napra már nem marad olvasnivaló. Mivel $S_{11} = 385$, már a tizenkettedik napon is csak 28 oldalt kell elolvasnia.



15. *a)* Az e egyenes meredeksége $-\frac{2}{3}$.



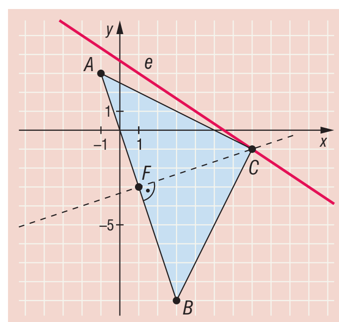
A vele párhuzamos egyenes meredeksége szintén ennyi, egyenlete $y=-\frac{2}{3}x+b$.

Mivel illeszkedik rá a P pont, ezért $3=-\frac{2}{3}\cdot 6+b$, amiből $b=7$.

A párhuzamos egyenes egyenlete:

$$y=-\frac{2}{3}x+7 \quad \text{vagy} \quad 2x+3y=21.$$

b) Mivel $AC=BC$, ezért C rajta van az AB szakasz felezőmerőlegesén.



Az AB szakasz felezőpontja $F(1;-3)$.

Az $\overrightarrow{AB}(4;-12)$ merőleges a keresett egyenesre, ezért annak meredeksége: $m=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

Mivel átmegy az F ponton, ezért $-3=\frac{1}{3}\cdot 1+b$, amiből $b=-\frac{10}{3}$.

A felezőmerőleges egyenlete $y=\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$ vagy beszorozva: $-x+3y=-10$.

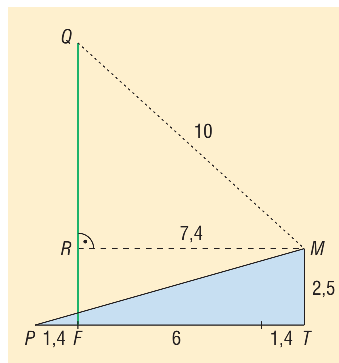
Meg kell oldani a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y&=11 \\ -x+3y&=-10 \end{aligned}\right\}.$$

Az első egyenletből kivonva a másodikat, adódik a megoldás: $x=7$ és $y=-1$.
A megoldás: $C(7;-1)$.

4. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Az ábra alapján számolható a PM távolság. Az $MTP_{\triangle}$-ben, Pitagorasz-tétellel:



$$PM^2=2{,}5^2+8{,}8^2, \quad \text{ebből} \quad PM\approx 9{,}15 \text{ m}.$$

Tehát a készülék érzékeli a macska mozgását.

b) Az MRQ háromszögben szintén Pitagorasz-tétellel számítható az RQ szakasz hossza:

$$RQ^2=10^2-7{,}4^2, \quad \text{ebből} \quad RQ\approx 6{,}73 \text{ m}.$$

Az $FQ=2{,}5+6{,}73=9{,}23$ m.

Tehát ha a szemközti fára 9,23 méternél magasabb helyre száll a bagoly, akkor a készülék nem érzékeli.



c) Készítsünk új ábrát. A keresett AB szakasz az ABT egyenlő szárú háromszögben található, melynek magassága $FT = 7{,}4$ m.

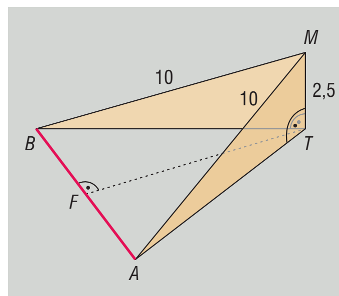
A BT hossza az $MTB_{\triangle}$-ben Pitagorasz-tétellel számítható:

$$BT^2 = 10^2 - 2{,}5^2, \quad \text{ebből} \quad AT = BT = 9{,}68 \text{ m.}$$

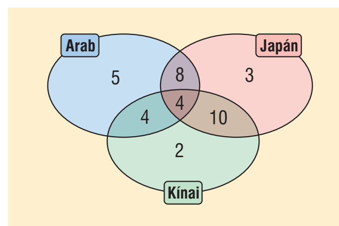
Az $ABT_{\triangle}$ alapja, szintén Pitagorasz-tétellel:

$$BF^2 = 9{,}68^2 - 7{,}4^2, \quad BF = 6{,}24 \text{ m}, \quad AB = 2BF = 12{,}48 \text{ m.}$$

Tehát a készülék a járda szélén egy 12,48 m hosszú szakaszt „tart megfigyelés alatt".



17. A szöveg alapján a következő halmazábra készíthető el:



a) $p = \dfrac{16}{36} = 0{,}44;$ *b)* $p = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{36}{2}} = \dfrac{1}{105} = 0{,}0095.$

c) Az ábra alapján 10 olyan tanuló jár az osztályba, aki csak egy nyelvet tanul a fentiek közül.

18. A vásárolt edény térfogata:

$$V = \frac{m \cdot \pi}{3} \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) \approx 89{,}6 \text{ liter.}$$

Ebbe az edénybe

$$\frac{89{,}6 - 17}{0{,}90} \approx 80{,}7 \text{ liter}$$

földet kell vásárolnia.

a) Több megoldás is lehetséges, például egy 50 literes, egy 20 literes, egy 10 literes és egy 5 literes csomag megfelel.

b) Az előbbiek ára összesen: 1477 Ft, a legolcsóbb a két darab 50 literes virágföld, 1450 Ft.

c) Ebben az esetben 89,6 liter földet kell vásárolnia, s ez most is többféleképpen lehetséges. Például vehet négy 20 literes és egy 10 literes csomagot.

A legolcsóbb ebben az esetben is a két 50 literes csomag.

5. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Normálalakban:

a) $A \cdot B = 1 \cdot 10^{24};$ *b)* $A + B = 5{,}2 \cdot 10^{12}.$

2. A síkon 8 különböző pont legfeljebb $\binom{8}{2}$, azaz 28 egyenest határoz meg.

3. A függvény

a) értelmezési tartománya: $x \in [-4; 4];$ *b)* értékkészlete: $y \in [-1; 4].$

4. Az eredeti háromszög kerülete 30 cm.



5. A túra teljes hossza 30 km.

6. Az ábrán jelölt tartomány:

$$C \cup (B \setminus A) \quad \text{vagy} \quad (A \cup B \cup C) \setminus (A \setminus C).$$

7. A paralelogramma átlóinak metszéspontjából a csúcsokba mutató vektorok:

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad -\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \quad \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}.$$

8. A háromszög két adott oldala által bezárt szög lehet $30°$ vagy $150°$.

9. A mondat tagadása B: „Van olyan erdész, akinek nincs zöld kalapja.”

10. Az egyenlőtlenség megoldása: $x \in \left]-\infty; -2\right[\cup \left]5; \infty\right[$.

11. Az AB szakasz felezőpontja K. Ha a B végpont $B(b_1; b_2)$, akkor a szakasz felezőpontjának kooordinátáira vonatkozó összefüggés alapján:

$$\frac{5+b_1}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 1 \quad \text{és} \quad \frac{7+b_2}{2} = 4 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 1.$$

A másik végpont koordinátái $B(1; 1)$.

12. A valószínűség:

$$P(\text{30-cal osztható}) = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}, \quad P(\text{30-cal nem osztható}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

5. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* A hatványozás azonosságainak és a törtkitevős hatvány definíciójának a használatával az egyenlet mindkét oldalát fel lehet írni 2 hatványaként:

$$2^{\frac{x}{3}} = 2^2 \cdot \left(2^3\right)^{2x},$$

$$2^{\frac{x}{3}} = 2^2 \cdot 2^{6x},$$

$$2^{\frac{x}{3}} = 2^{2+6x}.$$

Az exponenciális függvény kölcsönösen egyértelműsége alapján:

$$\frac{x}{3} = 2 + 6x, \quad \text{ahonnan } x \text{ értéke: } x = -\frac{6}{17}.$$

Ellenőrzés után ez megoldása az egyenletnek.

b) Az zárójelek felbontása után másodfokú egyenlet kapunk:

$$2x^2 + 2 = x^2 - 1 + 4x,$$

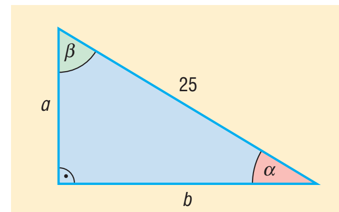
$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

A megoldóképlet alapján ez utóbbi egyenlet megoldásai: 1 és 3.

Ellenőrzés után mindkét megoldás megfelelő.



14. Legyen a derékszögű háromszög két befogójának hossza a és b.



a) A szokásos jelölésekkel a hegyesszögek koszinuszainak aránya:

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{25}}{\frac{b}{25}} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{3}{4}.$$

A Pitagorasz-tétel alapján $a^2 + b^2 = 25^2$. A két összefüggésből $a = 15$ és $b = 20$. A háromszög befogói 15 cm és 20 cm hosszúak.

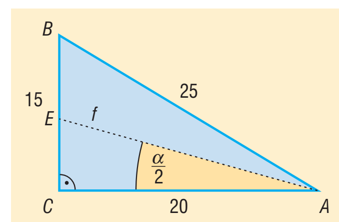
b) A kisebb hegyesszög koszinusza:

$$\cos\alpha = \frac{20}{25} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 36{,}87°,$$

a másik hegyesszög pedig $\beta = 90° - \alpha = 53{,}13°$.

c) Az AEC derékszögű háromszögben:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{20}{f} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{20}{\cos\frac{36{,}87°}{2}} \approx 21{,}08 \text{ cm}.$$



15. A befektetni kívánt pénz legyen a forint.

a) Az (1) lehetőség szerint három év múlva $a \cdot 1{,}08^3 \approx 1{,}2597a$ forintot kapunk.
A (2) lehetőség szerint három év múlva $a \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}15 \approx 1{,}2544a$ forintot kapunk.
Takarékos Oszkár az első befektetési forma esetén jut több pénzhez 3 év letelte után.

b) Tegyük fel, hogy n év múlva legalább 5 000 000 forint áll majd rendelkezésére. Ez akkor következik be, ha

$$2 \cdot 10^6 \cdot 1{,}08^n + 10^6 \cdot 1{,}08^{n-1} \geq 5 \cdot 10^6.$$

Osztva mindkét oldalt 10^6-nal és az egyenlőtlenséget rendezve:

$$2 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}08^{n-1} + 1{,}08^{n-1} \geq 5,$$
$$3{,}16 \cdot 1{,}08^{n-1} \geq 5,$$
$$1{,}08^{n-1} \geq \frac{5}{3{,}16}.$$

Mindkét oldal pozitív, így vehetjük a tízes alapú logaritmusát:

$$\lg 1{,}08^{n-1} \geq \lg\frac{5}{3{,}16}, \qquad \text{amiből} \qquad n \geq 6{,}96.$$

Takarékos Oszkárnak hét évet kell várni hogy év végén legalább 5 000 000 forintot vehessen fel.

5. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Számítsuk ki 8, 12 és 14 legkisebb közös többszörösét: $[8; 12; 14] = 168$.
A buszok a megállóból 168 percenként indulnak egyszerre. Reggel 5-től délelőtt 10-ig 300 perc, 11-ig 360 perc telik el. Mivel $2 \cdot 168 = 336$, 10 és 11 óra között van olyan időpont, amikor a megállóból egyszerre indul mind a három járat, és ez az időpont 10 óra 36 perc.

b) Minden várakozó 3-féle buszra szállhat fel, ezért 3^{35}-féleképpen szállhatnak fel a buszokra.



c) A 70-es buszra $35 \cdot 0{,}2 = 7$ ember, a 71-esre $35 \cdot \frac{2}{7} = 10$, a 72-esre $35 - 7 = 18$ utas száll fel.

A kedvező esetek száma $\binom{35}{7} \cdot \binom{28}{10} \cdot \binom{18}{18}$, az összes eset a *b)* rész alapján 3^{35}.

A keresett valószínűség $\dfrac{\binom{35}{7} \cdot \binom{28}{10} \cdot \binom{18}{18}}{3^{35}} \approx 0{,}0018$.

d) A kiindulási pont $K(0; 0)$, az első megálló $E(-2; 3)$, a második megálló $M(2; 5)$, a harmadik $H(3; 3)$. A kiindulási helyétől a harmadik megállóig megtett út:

$$s = KE + EM + MH = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} + \sqrt{(2-(-2))^2 + (5-3)^2} + \sqrt{(3-2)^2 + (3-5)^2} =$$
$$= \sqrt{13} + \sqrt{20} + \sqrt{5} = \sqrt{13} + 3\sqrt{5} \approx 10{,}31 \text{ km}.$$

17. *a)* A stadion egyes soraiban levő ülőhelyek számai olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első eleme 200, differenciája 4. Tegyük fel, hogy n sor van a stadionban. A számtani sorozat első n elemének összegére vonatkozó összefüggés alapján:

$$11500 < n \cdot \frac{400 + (n-1) \cdot 4}{2} < 12000.$$

Az egyenlőtlenség-rendszert rendezve:

$$11500 < n \cdot (200 + (n-1) \cdot 2) < 12000,$$
$$5750 < n^2 + 99n < 6000.$$

A sorok n számára teljesülnie kell, hogy (1) $0 < n^2 + 99n - 5750$ és (2) $n^2 + 99n - 6000 < 0$.

Az (1) egyenlőtlenség megoldása:

$$n < \frac{-99 - \sqrt{32801}}{2} \approx -140{,}06 \quad \text{vagy} \quad n > \frac{-99 + \sqrt{32801}}{2} \approx 41{,}06.$$

A (2) egyenlőtlenség megoldása:

$$-141{,}43 \approx \frac{-99 - \sqrt{33801}}{2} < n < \frac{-99 + \sqrt{33801}}{2} \approx 42{,}43.$$

Mivel n pozitív egész, a két feltételt csak $n = 42$ teljesíti, tehát a stadionban 42 sor van.

b) Az összes lehetőség száma $\binom{8}{3}$.

Ha az első három között nincs angol versenyző, akkor 5 versenyző közül került ki a három dobogós helyezett. A kedvezőtlen esetek száma $\binom{5}{3}$.

Annak a valószínűsége, hogy valamelyik dobogós helyre angol futó került:

$$p = 1 - \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{23}{28} \approx 0{,}82.$$

c) Az eladott jegyek árainak átlaga:

$$\frac{4740 \cdot 0{,}4 \cdot 3200 + 4740 \cdot 0{,}3 \cdot 4000 + 4740 \cdot 0{,}3 \cdot 4700}{4740} = 3890 \text{ forint}.$$

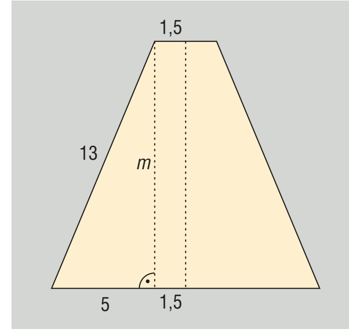
Az eladott jegyek árainak módusza 3200 forint, mediánja pedig 4000 forint.



18. *a)* Először az alsó egyenes csonka kúp alakú rész térfogatát számítjuk ki.

A csonka kúp alapkörének sugara $R = 6{,}5$ cm, fedőkörének sugara $r = 1{,}5$ cm. A kúp magasságát a tengelymetszetből számíthatjuk:

$$m = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}.$$



A csonka kúp térfogata:

$$V_{\text{csonka kúp}} = \frac{m \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right) \cdot \pi}{3} = 217\pi.$$

A felső hengeres rész térfogata:

$$V_{\text{henger}} = r^2 \cdot \pi \cdot m' = 27\pi.$$

A flaska teljes űrtartalma:

$$V = V_{\text{csonka kúp}} + V_{\text{henger}} = 244\pi \approx 766{,}55 \text{ cm}^3.$$

A 7,5 dl = 750 cm^3 bort beleöntve a flaskába: 766,55 – 750 = 16,55 cm^3 térfogatnyi hely marad. Mivel ez kisebb, mint a felső hengeres rész térfogata, az üvegben a bor szintje a felső hengeres résznél van, felülről számítva a következő magasságban:

$$h = \frac{V_{\text{hiány}}}{r^2 \cdot \pi} = \frac{16{,}55}{1{,}5^2 \cdot \pi} \approx 2{,}34 \text{ cm}.$$

b) Ha az üvegből annyit kiöntünk, hogy a bor szintje 3 centiméterrel csökkenjen, akkor ez

$$V^* = 1{,}5^2 \cdot \pi \cdot 3 \approx 21{,}21 \text{ cm}^3$$

bor kiöntését jelenti. A bor alkoholtartalma eredetileg $750 \cdot 0{,}125$ cm^3. Az alkoholtartalom minden kiöntés után $\frac{750 - 21{,}21}{750} = \frac{728{,}79}{750}$-szeresére változik.

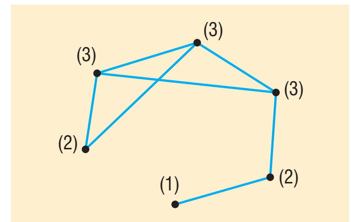
A kínált bor alkoholtartalma végül $750 \cdot 0{,}125 \cdot \left(\frac{728{,}79}{750}\right)^4$ cm^3.

A vendégeket Vendel $\frac{750 \cdot 0{,}125 \cdot \left(\frac{728{,}79}{750}\right)^4}{750} \cdot 100 \approx 11{,}14\%$-os borral kínálta.

6. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $\frac{1001!}{999!} = 1001 \cdot 1000 = 1001000$

2. Kössük össze a haragosokat éllel. Az ábrán egy lehetséges megoldást látunk. (➡)



3. A szavazáson 7 530 000 fő vehetett volna részt.

4. A sorozat első 5 elemének összege 459.

5. *a)* Igaz. *b)* Hamis.

6. A focilabdát 5,73°-ban látjuk.



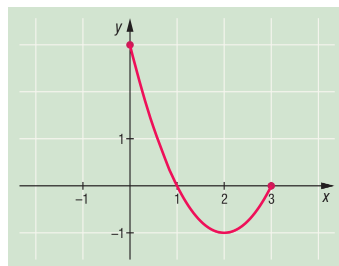
7. A megoldás kettő tizedesjegyre kerekítve: $x = 3{,}32$.

8. Az $ABC\sphericalangle = 21°$.

9. A fizetések átlaga 126 571 forint, módusza 90 000 forint, mediánja pedig 105 000 forint.

10. Az egyenlet diszkriminánsa $4\sqrt{2}$.

11. A függvény grafikonja az ábrán látható. (➡)



12. Annak a valószínűsége, hogy Ambrus Adri mellett ül:

$$\frac{2\cdot 5!}{6!} = \frac{1}{3}.$$

6. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

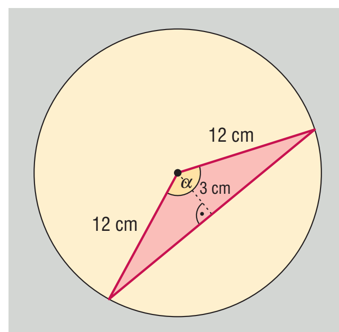
13. *a)* A 24 cm-es pizza átlagára négyzetcentiméterenként: $\frac{1150}{12^2\pi} \approx 2{,}54$ forint.

A 32 cm-es pizza átlagára négyzetcentiméterenként: $\frac{1650}{16^2\pi} \approx 2{,}05$ forint.

A 40 cm-es pizza átlagára négyzetcentiméterenként: $\frac{2650}{20^2\pi} \approx 2{,}11$ forint.

A 24 cm átmérőjű pizzának a legmagasabb az átlagos ára négyzetcentiméterenként.

b) A Hajni öccse által elfogyasztott pizza egy körszelet területének felel meg.



A körszelet α középponti szögére felírható:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{12} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 151°.$$

A körszelet területét megkapjuk úgy, hogy a körcikk területéből kivonjuk a háromszög területét:

$$T_{\text{körszelet}} = 12^2\cdot\pi\cdot\frac{151°}{360°} - \frac{12^2\cdot\sin 151°}{2} \approx 154{,}75\ \text{cm}^2.$$

Hajni öccse a pizza $\frac{154{,}75}{12^2\cdot\pi}\cdot 100 \approx 34{,}22$ százalékát ette meg.

c) Az 10110_2 kettes számrendszerbeli szám tízes számrendszerben: $16 + 4 + 2 = 22$.
Ez a futár az adott napon 22 címre szállított pizzát.

14. A kutya az első nap $2(20 + 60) = 160$ m utat tesz meg.

A második nap $2(20 + 50) + 160 = 300$ m utat tesz meg, mivel az első háztömb szélességét és még két háztömb közti távot kétszer kell megtennie az előző napihoz képest.

A harmadik nap $2(20 + 50 + 20 + 50) + 160 = 440$ m utat tesz meg, az előző napinál ismét $2(20 + 50) = 140$ méterrel többet.

A kutya által naponként megtett távolságok egy számtani sorozat tagjai. A sorozat első tagja 160, differenciája 140.



a) A kutya a hetedik napon $a_7 = a_1 + 6d = 160 + 6 \cdot 140 = 1000$ méter utat tesz meg.

b) Húsz nap alatt a kutya összesen $S_{20} = 20 \cdot \frac{2a_1 + 19d}{2} = 29800$ métert, azaz 29,8 km-t fut.

15. Az első kép alapján az első fájl 25%-a az összes másolás 7%-a, tehát az első fájl az összes másolandónak $\frac{7}{25} \cdot 100 = 28\%$-a.

Ezért és a második kép alapján a második fájl 15%-a az összes másolás $37\% - 28\% = 9\%$-a.

A második fájl az összes másolandó anyagnak $\frac{9}{15} \cdot 100 = 60\%$-a.

A harmadik fájl mérete tehát az összesnek $100\% - 28\% - 60\% = 12\%$-a.

Ha a teljes másolás a 91%-ánál tart, akkor a harmadik fájlból akkora rész másolása történt meg, amennyi az összes másolandónak $91\% - 28\% - 60\% = 3\%$-a.

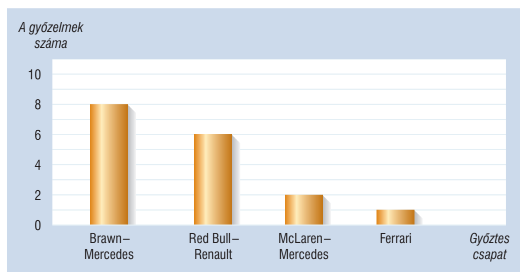
A 3% a 12%-nak $\frac{3}{12} \cdot 100 = 25\%$-a.

A harmadik fájl másolása során, ha a felső sávban 91% látható, akkor az alsó sávban 25%-ot láthatunk.

6. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Az átlagpontszám 53,95. Az átlagpontszámhoz Lewis Hamilton pontszáma van a legközelebb.

b) Az adatsor módusza a Brawn–Mercedes csapata, ők nyertek legtöbbször futamot.



c) Az összes helyszín száma 17, ebből a két megszüntetendő helyszínt $\binom{17}{2}$-féleképpen lehet kiválasztani, tehát az összes esetek száma $\binom{17}{2}$.

Ha Magyarországot kiválasztanák, akkor a másik helyszín a fennmaradó 16 másik közül kerülne ki, tehát a kedvező esetek száma 16.

Annak a valószínűsége, hogy Magyarország a két kiválasztott közt lenne:

$$\frac{16}{\binom{17}{2}} = \frac{2}{17} \approx 0{,}12.$$

d) Mivel Schumacher 3 perc 20 másodpercenként körözi le a másik autót, ennyi idő alatt Schumacher a pálya hosszával, azaz 4381 méterrel több utat tesz meg.

Legyen az autó sebessége v. Mivel 3 perc 20 másodperc az $\frac{1}{18}$ óra, az $s = v \cdot t$ összefüggés alapján a megtett utak különbsége:

$$199 \cdot \frac{1}{18} - v \cdot \frac{1}{18} = 4{,}381, \quad \text{ebből} \quad v = 120{,}142.$$

A másik autó sebessége megközelítőleg 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.



17. *a)* A B helyen dolgozó régészek száma legyen b. Ha a számtani sorozat differenciája d, akkor az A helyen dolgozók száma $b-d$, a C helyen dolgozóké $b+d$.

Ekkor $b-d+b=20$, valamint $b+b+d=28$.

A két egyenlet összadásából $4b=48$, tehát $b=12$ és $d=4$.

Az A helyen 8-an, a B helyen 12-en, a C helyen 16-an dolgoznak, és ez megfelel a feladat feltételeinek.

b) Elég belátni, hogy C-ből az AB egyenesre állított merőleges talppontja éppen a B pont. Ehhez pedig bizonyítani kell, hogy ABC háromszög B-ben derékszögű.

Számoljuk ki ABC háromszög oldalainak hosszát:

$$AB=\sqrt{(4-2)^2+(-3-3)^2}=\sqrt{40},$$

$$BC=\sqrt{(13-4)^2+(0-(-3))^2}=\sqrt{90},$$

$$AC=\sqrt{(13-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{130}.$$

Mivel $AB^2+BC^2=AC^2$, Pitagorasz tételének megfordítása alapján a háromszög derékszögű, és a derékszög B-nél van.

c) Az új hely az ABC derékszögű háromszög körülírható körének középpontja. Thalész tételének megfordítása alapján ez a pont az AC átfogó felezőpontja.

A felezőpont koordinátáira vonatkozó összefüggés alapján:

$$O\left(\frac{2+13}{2};\frac{3+0}{2}\right),$$

vagyis az újabb feltárandó hely a $\left(\frac{15}{2};\frac{3}{2}\right)$ koordinátájú pontban van.

d) A következő exponenciális egyenletet kell megoldani:

$$72\,000=90\,000\cdot10^{-0{,}00005\cdot t},$$

$$0{,}8=10^{-0{,}00005\cdot t},$$

$$-0{,}00005t=\lg 0{,}8,$$

$$t=\frac{\lg 0{,}8}{-0{,}00005},$$

$$t\approx1938.$$

A lelet kora megközelítőleg 2000 év.

18. *a)* A repülőgép európai idő szerint 21:15 perckor száll le. Az austini időt úgy kapjuk meg, hogy a budapesti időből kivonunk 7 órát:

(21:15 – 14:15 = 7),

azaz ha Budapesten 12 óra van, akkor Austinban reggel 5 óra.

Tehát a 2-es válasz a helyes.

b) Ha a kiválasztás sorendje nem számít, a Business Class 30 fője közül 2 embert $\binom{30}{2}$, a Prémium Economy Class 16 fője közül 2 embert $\binom{30}{2}$, a Prémium Economy Class 255 fője közül 2 embert $\binom{255}{2}$-féleképpen választhatunk ki.



Ez alapján az utasok közül mindhárom osztályból két-két főt

$$\binom{30}{2}\cdot\binom{16}{2}\cdot\binom{255}{2}\approx 1,69\cdot 10^9\text{-féleképpen}$$

választhatunk ki, ha a kiválasztás sorrendje nem számít.

Mivel hat ember sorbarendezési lehetőségeinek száma $6!$, ezért

$$\binom{30}{2}\cdot\binom{16}{2}\cdot\binom{255}{2}\cdot 6!\approx 1,22\cdot 10^{12}\text{-féleképpen}$$

történhet a kiválasztás, ha a sorrendet is figyelembe vesszük.

c) A tányér területének 87%-a: $10^2\cdot\pi\cdot 0,87\approx 273,18\ \text{cm}^2$.

Mivel a hasonlóság aránya $k=5\cdot 10^6$, Texas állam szárazföldi területe négyzetcentiméterben mérve

$$273,18\cdot k^2=273,18\cdot\left(5\cdot 10^6\right)^2=6829,5\cdot 10^{12}\ \text{cm}^2.$$

A terület négyzetkilométerben megadva $682\,950\ \text{km}^2\approx 680\,000\ \text{km}^2$.

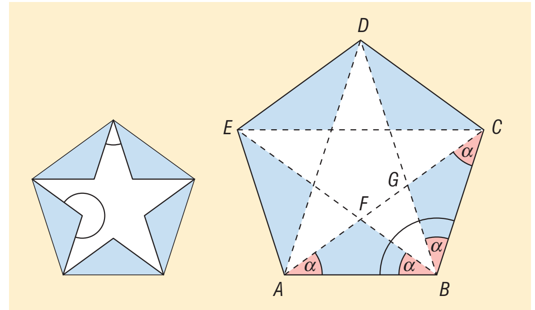
d) A csillag alakzat hegyes, illetve konkáv szögének nagyságát kell meghatározni.

Az $ABCDE$ szabályos ötszög egy belső szöge:

$$ABC\sphericalangle=\frac{3\cdot 180^\circ}{5}=108^\circ.$$

Az ABC egyenlő szárú háromszögben:

$$\alpha=BAC\sphericalangle=BCA\sphericalangle=\frac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ.$$



Hasonlóan 36°-osak az EBA és DBC szögek.

A csillag hegyesszögeinek nagysága:

$$FBG\sphericalangle=108^\circ-2\cdot 36^\circ=36^\circ.$$

A csillag konkáv szögeinek nagyságát megkaphatjuk úgy, hogy a teljes szögből kivonjuk a szabályos ötszög egy belső szögét:

$$360^\circ-108^\circ=252^\circ.$$

7. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $\dfrac{(x-y)(x+y)}{(x+y)^2}=\dfrac{x-y}{x+y}.$

2. Az összes golyó $30+50=80$ darab. Így a keresett valószínűség $\dfrac{30}{80}=0,375.$

3. 6.

4. Rangsorba rendezve: 0, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10.

Nyolc elemre az alsó kvartilis $\dfrac{2+4}{2}=3$, a felső kvartilis $\dfrac{8+9}{2}=8,5.$

5. $T=5^2\cdot\sin 60^\circ\approx 21,65\ \text{cm}^2.$



6. Az élek száma a fokszámok összegének a fele, azaz $\dfrac{2+2+2+2+4}{2}=6.$

7. A keresett egyenes egyenlete $e\colon\ y=2x-1.$

8. Az egyenlet két gyöke: $x_1=0$ és $x_2=-9.$ A megoldás: $x=-9.$

9. A megoldás: *c)*, azaz $y=2^{x+1}-1.$

10. Mivel a koszinusza negatív, a megoldás tompaszög. A keresett érték 120º.

11. Jelölje x a két halmaz metszetének elemszámát. Logikai szita alapján $14=10+10-x,$ innen $x=6.$

12. A logaritmus definíciója szerint $2x-4>0,$ innen $x>2.$ Intervallummal felírva $x\in\ ]2;\infty[.$

7. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* $\dfrac{6+9+10+8+X}{5}=8,$ vagyis $X=7.$

b) Az egyes napokon 5, 10, 9, 11 autó érkezett, a változások (+5, –1, +2) átlaga: $\dfrac{5-1+2}{3}=2.$ Ennek alapján péntekre $11+2=13$ autó várható.

c) Ha egyik napon sem érkezett olyan jármű, amelyen egyszerre végzik el a kétfajta beavatkozást, akkor a valószínűség 1. A legkisebb értéket pedig akkor kapjuk, ha minden nap a lehető legtöbb jármű vesz részt mindkét típusú beavatkozásban, azaz hétfőn 5 (1), kedden 9 (1), szerdán 9 (1), csütörtökön 8 (3). Zárójelben azon járművek száma szerepel, amelyeken csak az egyik beavatkozást végzik el. Így a kérdéses valószínűség:

$$\frac{1+1+1+3}{37}\approx 0{,}16.$$

14. *a)* $2^{2x+4}=8=2^3,$ ami csak akkor lehetséges, ha $2x+4=3.$ Innen $x=-0{,}5.$

b) $\dfrac{x}{x+3}<0$ két esetben lehetséges.

I. eset: ha $x<0$ és $x+3>0.$ Ekkor $-3<x<0.$

II. eset: ha $x>0$ és $x+3<0.$ Ilyen valós szám nincs.

Tehát a feladat megoldáshalmaza intervallummal: $]-3;0[.$

15. *a)* Az egyre növekvő kerületű körök sugarai: $r,\ 2r,\ 3r,\ \dots,\ nr,\ \dots\ (n\in\mathbb{Z}^+).$

A körök kerülete: $K_1=2r\cdot\pi,\ K_2=2\cdot(2r)\cdot\pi,\ K_3=2\cdot(3r)\cdot\pi,\ \dots,\ K_n=2\cdot(nr)\cdot\pi,\ \dots$

Számtani a sorozat, ha a szomszédos elemek különbsége állandó. Ez teljesül a kerületekre:

$$K_{n+1}-K_n=2\cdot[(n+1)\cdot r]\cdot\pi-2\cdot(nr)\cdot\pi=2r\cdot\pi=K_1=\text{állandó}.$$

b) Jelölje a_n az n-edik körgyűrűbe került darabkák számát, ami arányos a kerülettel.

Mivel $K_n=K_{n-1}+K_1,$ ezért $a_n=a_{n-1}+a_1$ (ahol $a_1=4$), tehát:

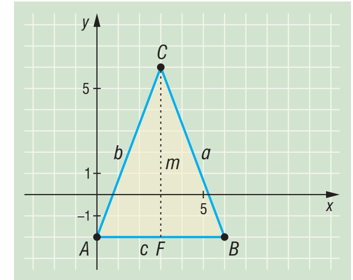
$$a_1+(n-1)d=a_1+(n-2)d+a_1,$$
$$nd-d=nd-2d+4,$$
$$d=4.$$

Így a darabkák száma: $S_{20}=840.$ Ha egy járólap 6 darabkát adott ki, akkor 140 járólapot kellett miszlikbe aprítaniuk.



7. Feladatsor II. rész / B – megoldások

16. *a)* Készítsünk ábrát.



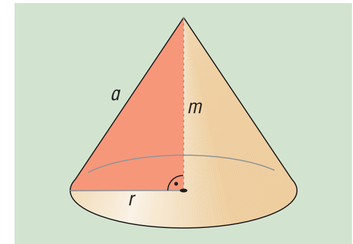
Az egyenlő szárú háromszög magassága merőlegesen felezi az alapot, így $F(3; -2)$.

Mivel $AB \parallel x$ tengellyel, F-ből felfelé kell lépnünk 8 egységet a magasság mentén, így jutunk el a C pontig: $C(3; 6)$.

b) Tudjuk, hogy $d(AB) = 6$ és $m = 8$, így

$$T_{ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ területegység.}$$

c) Készítsünk ábrát a kúpról.



Mivel $d = 6$ cm, ezért $r = 3$ cm. Tudjuk, hogy m, r, a (> 0) derékszögű háromszöget alkot:

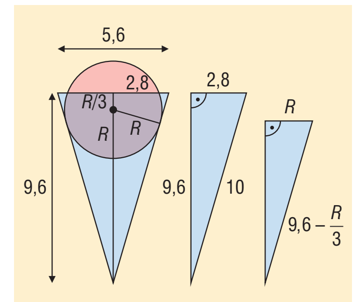
$$3^2 + 4^2 = a^2, \quad \text{innen} \quad a = 5.$$

A kúp felszíne:

$$A = r^2 \cdot \pi + ar\pi = r\pi \cdot (r + a) =$$
$$= 3\pi \cdot (3 + 5) = 24\pi \approx 75{,}4 \text{ cm}^2.$$

17. Képzeletben vágjuk el a tölcsért és a fagyit középen egy függőleges síkkal. A metszetet rajzoljuk le.

a) A rajzon kiemelt két háromszög hasonló. (A tölcsér alkotójának hosszát kiszámíthatjuk a Pitagorasz-tétellel, értéke 10 cm.)



Felírva az arányokat:

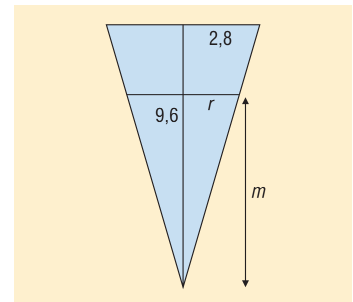
$$\frac{9{,}6 - \frac{R}{3}}{R} = \frac{10}{2{,}8}, \quad \text{ahonnan} \quad R \approx 2{,}4585 \text{ cm.}$$

Így a fagyi térfogata:

$$V_{\text{fagyi}} = \frac{4}{3} R^3 \cdot \pi \approx 62{,}24 \text{ cm}^3.$$

Kerekítve, a gombóc térfogata 62 cm^3.

b) Ha elolvad a fagyi, és az olvadt csoki „kitölti” a kúp alakú tölcsért, akkor szintén találunk két hasonló háromszöget:



$$\frac{m}{r} = \frac{9{,}6}{2{,}8} = \frac{24}{7}, \quad \text{innen} \quad m = \frac{24}{7} r.$$

Feltételezzük, hogy a fagyi térfogata nem változott (illetve a változástól eltekintünk), ezért:

$$V_{\text{olvadt csoki}} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot m}{3} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \frac{24}{7} r}{3} = \frac{8r^3 \cdot \pi}{7} = 62,$$

amiből $r \approx 2{,}58$ cm és $m \approx 8{,}86$ cm.



18. Minden esetben megfelelő módon kell behelyettesítenünk a megadott képletbe.

a) $L = 25\text{ cm} = 0{,}25\text{ m},\quad a = 0{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\quad T = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{0{,}25}{9{,}81-0{,}81}} = \frac{\pi}{3}\,(\text{s}).$

b) $T = 2\,(\text{s}),\quad a = 8{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\quad 2 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{9{,}81-8{,}81}}\quad\Rightarrow\quad L = \frac{1}{\pi^2}\approx 0{,}1013\,(\text{m}).$

c) $T = 3\text{ s},\quad L = 1\text{ m}.\quad 3 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{1}{9{,}81-a}}\quad\Rightarrow\quad a = 9{,}81-\frac{4\pi^2}{9}\approx 5{,}42\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

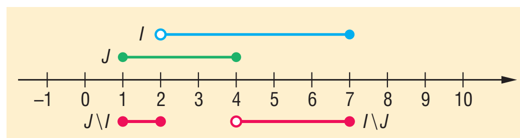
8. Feladatsor I. rész – megoldások

1. A végződés lehet 12, 32, 52, 72, 92, tehát X lehet 1, 3, 5, 7, 9.

2. A külső pontból a körhöz húzott érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. A Pitagorasz-tételből $x^2 + 6^2 = 10^2$, ebből $x = 8$.

3. Az első állítás megfordítása igaz. A második állítás megfordítása igaz. A harmadik állítás megfordítása hamis, mert az 1 önmagával és 1-gyel is osztható, mégsem prím.

4. Az intervallumok az ábrán láthatók.



5. $\binom{10}{4}\cdot 4! = \frac{10!}{(10-4)!} = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = 5040.$

6. $\frac{\frac{15}{100}+\frac{62}{80}+\frac{58}{100}+\frac{n}{80}}{4} = \frac{15+77{,}5+58+1{,}25n}{400}\geq 0{,}6,$ innen $n \geq 71{,}6.$

Ha a tanár csak egész pontokat ad, akkor legalább 72 pontost.

7. Mivel $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ezért negatív.

8. Az előjel miatt $f(x)$ lefelé nyíló parabola, a zárójelben levő +4 miatt eltoltuk vízszintesen negatív irányba 4-gyel. Tehát a $]-\infty; -4]$-on monoton növő.

9. Ha eredetileg x árú az áru, akkor a vásárt követő csökkentés után $x\cdot 1{,}4\cdot 0{,}6 = x\cdot 0{,}84$ az ára, s ez az eredeti árnál kisebb. Mégpedig 16%-kal.

10. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9.$

11. A logaritmus definíciója szerint $2^p = 3$.

12. A valószínűség a területek aránya. A keret és a kép konkrét nagysága nem számít, tekintsük a kör sugarát egynek, így:

$$T_{\text{képkeret}} = 4 \quad\text{és}\quad T_{\text{körkép}} = 1^2\cdot\pi.$$

A találati valószínűség:

$$p = \frac{\pi}{4}\approx 0{,}7854.$$



8. Feladatsor II. rész / A – megoldások

13. *a)* $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \dfrac{5 \pm 1}{6}$. $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{2}{3}$.

b) A 2. egyenletből kifejezve y-t $(y = 2 + x)$ és visszahelyettesítve az 1. egyenletbe:

$$3(2 + x) + 2x = 4 + 7x,$$
$$6 + 3x + 2x = 4 + 7x,$$
$$6 + 5x = 4 + 7x \qquad / -5x, -4$$
$$2 = 2x,$$
$$1 = x,$$

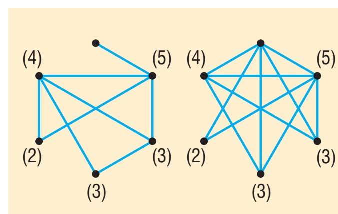
amit visszahelyettesítve a kifejezésbe: $y = 2 + 1 = 3$.

Ellenőrzés: $9 + 2 = 4 + 7$ és $3 - 1 = 2$.

14. *a)* A három házaspár összesen hat fő. Ha valakinél elvágjuk a kört és „kiterítjük” az ülésrendet, akkor az eredmény $5! = 120$.

b) Most az egyik pár első tagjánál vágjuk el a sort és kiterítjük az ülésrendet, akkor 2-féle módon lehet a másik két párt leültetni, illetve minden páron belül 2-2-féleképpen a házastársakat. Így az eredmény $2 \cdot 2^3 = 16$.

c) Képzeljük el a hat személyt, mint egy gráf hat pontját. A gráf élei azt reprezentálják, hogy két személy egymás között kicserélte a salátástálat (az mindegy, hogy ki kinek adta). Ekkor az 5 fokú pont minden más ponttal szomszédos, tehát a hatodik pont fokszáma is legalább 1.



A 4 fokú pontból tudunk éleket rajzolni csak a többi ponthoz, illetve a leendő két 3 fokú pontot összekötve fokszámuk 3 lesz. Tehát az utolsó pont minimális fokszáma 1.

Másodszorra kössük össze a 4 fokú pontot a hatodik ponttal és a két 3 fokú ponttal. Végül kössük össze a 2 fokú pontot is a hatodik ponttal. Így a hatodik pont fokszáma 5 lesz. Tehát ennyi információ birtokában csak annyit állíthatunk, hogy a hatodik személy az asztalnál legalább egyszer, legfeljebb ötször adta-vette a salátástálat.

15. *a)* Ha egy $y = f(x)$ függvény áthalad az $(x'; y')$ ponton, akkor teljesül rá, hogy $f(x') = y'$. Azaz $f(4) = 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + c = 16$, innen $c = 4$.

b) A $g(x)$ függvény pontosan ott metszi az x tengelyt, ahol $y = g(x) = 0$. Azaz $x^2 - 6x + 10 = 0$.

A másodfokú egyenletnek nincs megoldása, hiszen $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4 < 0$.

Mivel normál állású parabola, eszerint végig az x tengely felett halad, nem metszi azt.

c) Mivel $g(x)$ függvény képe normál állású, azaz felfelé nyíló parabola, ezért az értékkészlete a minimum értékétől tart végtelenig.

A minimum pontját úgy határozhatjuk meg, ha teljes négyzetté alakítjuk:

$$g(x) = x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 - 9 + 10 = (x - 3)^2 + 1.$$

A felfelé nyíló parabola minimum pontja $x = 3$; $y = 1$ pontban van, így $g(x)$ értékkészlete az $[1; \infty[$ intervallum.



8. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. Készítsünk a hotelszobákról egy összefoglaló táblázatot.

	Egy szinten található azonos típusú		Összesen a hotelben	
	szobák	közülük konyhával rendelkezik	szoba	konyhával
2 személyes	7	2	91	26
4 személyes	8	2	104	26
6 személyes	5	2	65	26
Összesen	20	6	260	78

a) A 8 párnak kétszemélyes szobákat utalnak ki a hotel 91 szobájából valamilyen sorrendben. Erre $\frac{91!}{(91-8)!}$-féleképpen kerülhet sor.

A kétgyermekes pároknak négyszemélyes szobákra van szükségük, ezért számukra $\frac{104!}{(104-3)!}$ lehetőség adódik. (A szobákat és a párokat is megkülönböztetjük.)

A kérdésre a válasz ezek szorzata, hiszen függetlenek:

$$\frac{91!}{(91-8)!}\cdot\frac{104!}{(104-3)!}.$$

b) A felső öt emeleten összesen $5\cdot 8=40$ négyszemélyes szoba van. Hogy pont ilyenbe kopog be az illető, annak valószínűsége:

$$P_1=\frac{40}{260}.$$

Az alsó nyolc emeleten $8\cdot 5=40$ hatszemélyes szoba van, így utóbbi

$$P_2=\frac{40}{260}$$

valószínűsége megegyezik az előbbivel.

c) Mivel a feladat szövege tartalmazza a „legalább” szót, érdemes megvizsgálni a komplementer eseményre való áttérés lehetőségét. 39 szobát választunk ki összesen, közülük legalább egy konyhával rendelkezik: akkor rendelkezhet azzal 1, 2, 3, 4 stb. Ez nagyon sok lehetőség, megéri áttérni a komplementer eseményre!

Ha a kiválasztás után nincs konyhás szoba, akkor szintenként a kétszemélyesek közül 5, a háromszemélyesek közül 6, a hatszemélyesek közül 3 szoba jöhet szóba $\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{5}$ valószínűséggel.

Ugyanez érvényes mind a 13 szintre, tehát az ellentett esemény valószínűsége $\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{5}\right)^{13}$.

Magának a kérdezett eseménynek a valószínűsége:

$$1-\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{5}\right)^{13}.$$

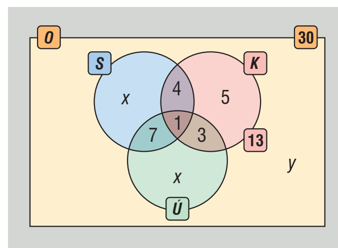


17. Az osztályt (O) tekintsük alaphalmaznak (univerzumnak), elemszáma $|O| = 30$. Ebben megkülönböztetünk három halmazt: a szépirodalmat (S), a képregényeket (K) és az online újságokat ($Ú$) olvasókat. Tudjuk, hogy

$$|S \cap K \cap Ú| = 1, \quad |S \cap K| = 5, \quad |S \cap Ú| = 8,$$

$$|Ú \cap K| = 4 \quad \text{és} \quad |K| = 13.$$

Egy halmazábrába belülről kifelé haladva írva őket az alábbi ábrát kapjuk.



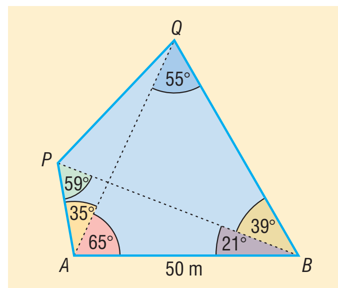
a) Csak képregényeket 5 fő olvas, akik az osztály $\left(\frac{5}{30} \approx 0{,}166667\right)$ 16,67%-át alkotják.

b) Az eddig beírt számok összege 20, tehát 10 fő van még „függőben”. Egyenlőtlenségként felírva

$$0 \le 2x \le 10, \quad \text{azaz} \quad 0 \le x \le 5.$$

Ebből $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ esetén y-ra $10, 8, 6, 4, 2, 0$ fő adódik. Tehát ennyien lehetnek azok, akik a fenti három kategória közül egyiket sem olvassák.

18. A következő ábrát rajzolhatjuk fel:



Felírva a szinusztételt az APB és QAB háromszögekben, kiszámíthatjuk AP és AQ hosszát:

$$\frac{AP}{50} = \frac{\sin 21^\circ}{\sin 59^\circ} \quad \text{és} \quad \frac{AQ}{50} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 55^\circ},$$

ahonnan $AP \approx 20{,}9$ m és $AQ \approx 52{,}861$ m.

Alkalmazzuk a koszinusztételt APQ háromszögben:

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cdot \cos 35^\circ \approx 1421{,}1$$

amiből $PQ \approx 37{,}7$ m.

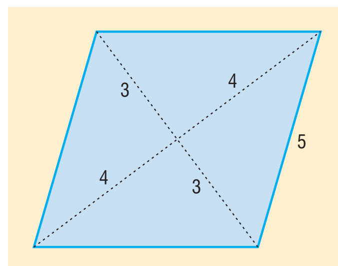
Nagy Papucsnak közelítőleg 37,7 m hosszú szárítókötelet kell sodornia.

9. Feladatsor I. rész – megoldások

1. Az emelés mértéke 4536 Ft. $\frac{4\,536}{37\,800} = 0{,}12$, tehát 12%-os az áremelés.

2. $90^\circ : 6 = 15^\circ$. A hegyesszögek 15° és 75°.

3. A rombusz átlói felezik egymást, és merőlegesek is egymásra. Pitagorasz tétele szerint a rombusz oldala 5 egység, így kerülete 20 egység.

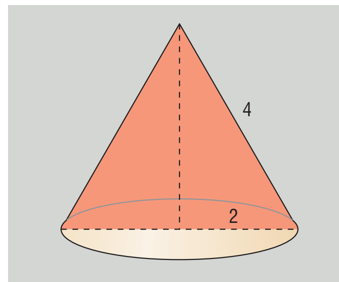




4. A forgáskúp tengelymetszete az ábrán látható. (➡)

A kúp felszíne:

$$A = 2^2 \cdot \pi + 2\pi \cdot 4 = 12\pi.$$



5. Zárójelfelbontás, beszorzás és összevonás után:

$$7x^2 + 4x - 3 = 0.$$

Ennek megoldásai: $x_1 = \frac{3}{7}$ és $x_2 = -1$.

6. A kedvező esetek száma 3 (prímszámok: 2, 3, 5), az összes esetek száma 6, így a prímszám dobásának valószínűsége:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

7. Ha a sorozat ötödik tagja a_5 és a differencia d, akkor a következő összeget kell kiszámítanunk:

$$3 - 4d + 3 - 3d + 3 - 2d + 3 - d + 3 + 3 + d + 3 + 2d + 3 + 3d + 3 + 4d = 9 \cdot 3 = 27.$$

8. Az $y = 2x + 1$ egyenletű egyenes meredeksége 2, ezért a rá merőleges egyenes meredeksége $-\frac{1}{2}$, így az egyenlete:

$$y - 2 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1), \quad \text{vagy más alakban:} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

9. Az utak egyenlőségéből:

$$\frac{v_t}{v_{gy}} = \frac{t_{gy}}{t_t} = \frac{45}{75} = 0,6,$$

tehát 60%.

10. $1,4^3 = 2,744$-szeresére.

11. Az 1-től 100-ig terjedő egész számok között 50 db osztható 2-vel, 33 db osztható 3-mal, és 16 db osztható 2-vel is meg 3-mal is, tehát 6-tal.

Így $50 + 33 - 16 = 67$ olyan szám van, amely vagy 2-vel, vagy 3-mal osztható, tehát 33 olyan van, amely nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal.

12. Alkalmazzuk azt a területképletet, amely szerint a háromszög területe két oldalának és a közbezárt szög szinuszának szorzata osztva 2-vel:

$$t = \frac{3 \cdot 8 \cdot \sin 120^\circ}{2} = 6\sqrt{3}.$$

9. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* A $2\,800\,000 = 2\,000\,000 \cdot q^8$ egyenletből $q = 1,043$, tehát az éves kamat 4,3%.

b) A $2\,800\,000 = 2\,000\,000 \cdot 1,03^n$ egyenlet megoldása: $n = \frac{\lg 1,4}{\lg 1,03} \approx 11,38$, tehát 12 év múlva éri el a 2 800 000 Ft-ot a betét.



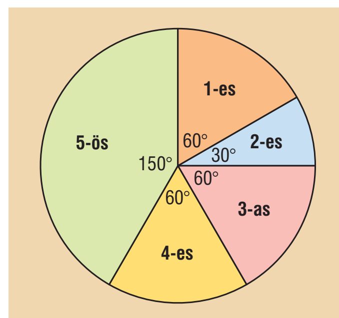
14. *a)* Az adatok táblázatba foglalva:

Érdemjegy	1-es	2-es	3-as	4-es	5-ös
Darab	2	1	2	2	5

Egy adathoz tartozó középponti szög:

$$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ.$$

A kördiagram jobbra látható.



b) Az átlag:

$$\frac{2\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 5\cdot 5}{12} \approx 3{,}583.$$

A medián 4. A módusz: 5.

A szórás:

$$\sqrt{\frac{2\cdot(1-3{,}583)^2 + 1\cdot(2-3{,}583)^2 + 2\cdot(3-3{,}583)^2 + 2\cdot(4-3{,}583)^2 + 5\cdot(5-3{,}583)^2}{12}} \approx 1{,}498.$$

15. *a)* A Thalész-tétel megfordítása miatt a háromszög köré írható kör sugara megegyezik az átfogó felével és az átfogóhoz tartozó súlyvonal hosszával.

A válasz: a súlyvonal 12,5 cm hosszú.

b) Mivel az átfogó 25 cm, Pitagorasz-tétellel:

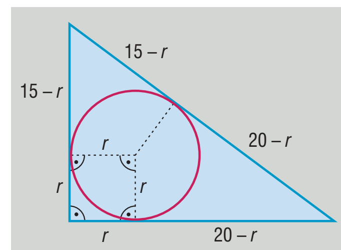
$$15^2 + b^2 = 25^2, \quad \text{amiből} \quad b = 20 \text{ cm}.$$

A kerület:

$$K = 15 + 20 + 25 = 60 \text{ cm}.$$

c) A terület:

$$T = \frac{a\cdot b}{2} = \frac{15\cdot 20}{2} = 150 \text{ cm}^2.$$



d) A külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők.

Az átfogóra felírható:

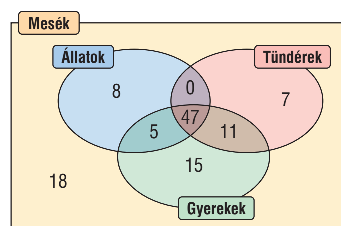
$$25 = (15 - r) + (20 - r), \quad \text{amiből} \quad r = 5 \text{ cm}.$$

9. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* A halmazábra:

b) A logikai szita alapján a mesék száma:

$$18 + 60 + 65 + 78 - (47 + 52 + 58) - 47 = 111.$$





c) A valószínűség: $\dfrac{7}{65} \approx 0{,}108.$

d) A valószínűség: $\dfrac{\binom{47}{2}}{\binom{111}{2}} \approx 0{,}177.$

17. *a)* $p = 0{,}94^{25} \approx 0{,}213.$

b) $p = \binom{40}{5} \cdot 0{,}06^5 \cdot 0{,}94^{35} \approx 0{,}0587.$

c) Az arányossági tényezőt x-szel jelölve, a bevont felület:

$$A = 2x \cdot 3x + 2 \cdot (x \cdot 2x + x \cdot 3x) = 400.$$

Megoldva: $x = 5$ cm.
A doboz élei: 10 cm, 15 cm, 5 cm.
A térfogata: $750\ \text{cm}^3 = 0{,}75$ liter.

18. *a)* $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 \cdot 2$ jegyű lesz a szám.

Ez az összeg $\dfrac{1+9}{2} \cdot 9 + 20 = 45 + 20 = 65.$

Tehát a leírt szám 65 jegyű.

b) Az egyesek helyén: 3; 13-ban 13-szor; 23-ban 23-szor; …
Összesen:

$$1 + 13 + 23 + 33 + 43 + 53 + 63 + 73 + 83 + 93 = 1 + \frac{13+93}{2} \cdot 9 = 478.$$

A tízesek helyén 30-ban 30-szor; 31-ben 31-szer; 32-ben 32-szer; …
Összesen:

$$30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 = \frac{30+39}{2} \cdot 10 = 345.$$

Tehát az egy- és kétjegyű számok leírásakor 823-szor kell leírni a 3-as számjegyet.

c) Az egy- és kétjegyű számok leírásával kapott szám jegyeinek száma:

$$45 + 2 \cdot \frac{10+99}{2} \cdot 90 = 9855,$$

ami azt jelenti, hogy a 2023 jegyű számban csak egy- és kétjegyű számok vannak.
Legyen n az utolsó kétjegyű szám, amit leírunk, ekkor:

$$45 + 2 \cdot \frac{10+n}{2} \cdot (n - 90) = 2023.$$

Ennek az egyenletnek a megoldásai: $n_1 = 44{,}9$ és $n_2 = -45{,}9$, amiből csak a pozitív lehet helyes.
Eredményünk azt jelenti, hogy a 2023 számjegyig nem kell leírni az összes 45-öt.
Mivel az egyjegyűek leírásával 45 jegyű lesz a szám, a páratlan helyen a kétjegyű számok második számjegye szerepel, ezért a keresett számjegy: 5.



10. Feladatsor I. rész – megoldások

1. $x = 135°$.

2. $\frac{4}{9}$.

3. $A'(-7; 9)$.

4. A dobott számok összege 11 vagy 12 lehet. 11-et úgy lehet dobni, hogy egyik kockán 5-öst, a másikon 6-ost dobunk, ennek valószínűsége $\frac{2}{36}$. 12-t csak úgy, hogy mindkét kockán 6-ost dobunk, ennek valószínűsége $\frac{1}{36}$, tehát a keresett valószínűség: $\frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

5. A két keresett szög mértéke $6x$ és $7x$, ezek összege: $6x + 7x = 130°$. Ebből $x = 10$, tehát a két szög nagysága 60° és 70°.

6. A gömb sugarát jelölje r, akkor a térfogata:

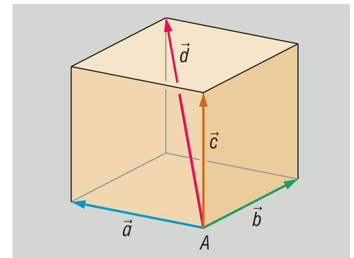
$$\frac{4r^3\pi}{3} = \frac{9}{2}\pi \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{27}{8} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{2}.$$

A gömb felszíne:

$$4r^2\pi = 4 \cdot \frac{9}{4} \cdot \pi = 9\pi.$$

7. Az ábrán az adott három vektor $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. A keresett testátló vektor:

$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$



8. Az életkorok összege: $7 \cdot 26 = 182$, a kiállítás után: $6 \cdot 27 = 162$. A kiállított játékos 20 éves.

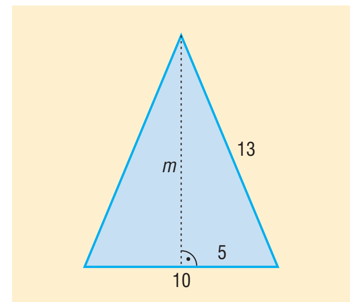
9. Az $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 66$ egyenlet megoldásai: $n_1 = 12$ és $n_2 = -11$. Tehát a teljes gráfnak 12 csúcsa van.

10. A háromszög magassága Pitagorasz tételével kiszámítható:

$$m = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}.$$

A háromszög területe:

$$t = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ cm}^2.$$



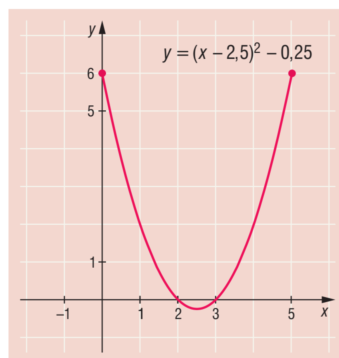
11. A szám 70%-a a szám 0,7-szerese, tehát $0{,}7 \cdot \frac{a}{5} = 35$, amiből $a = 250$.



12. Átalakítva a hozzárendelési szabályt:

$$x \mapsto \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=(x-2{,}5)^2-0{,}25.$$

A függvény legnagyobb értéke 6, ezt a 0 és a 6 helyen veszi fel. A legkisebb értéke a parabola tengelypontjában, $x = 2{,}5$-nél van, ez $y = -0{,}25$.



10. Feladatsor II. rész / *A* – megoldások

13. *a)* 1. Hamis, ha szerepel közöttük a 0, akkor a szorzat 0.

2. Igaz, nem lehet 2 pozitív, 2 negatív.

3. Igaz, kettő páros és kettő páratlan szám négyzeteinek összege páros.

4. Hamis, lehet köztük két 3-mal osztható is, pl: 3, 4, 5, 6.

5. Igaz, minden második egész szám páros.

b) Legyen a legkisebb szám x.

Ekkor:
$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2=1374.$$

Rendezés után: $x^2+3x-340=0$, aminek a megoldásai: $x_1 = 17$ és $x_2 = -20$.

Tehát a négy szám:

17, 18, 19, 20 vagy –20, –19, –18, –17.

Ellenőrzéssel megmutatható, hogy mindegyik megoldás.

14. *a)* Legyen az eredeti háromszög alapjának hossza a, szárának hossza b.

Ekkor az eredeti háromszögben: $a + 2b = 57$.

A felcserélés után kapott háromszögben: $b + 2a = 54$.

Az $\left.\begin{aligned}a+2b&=57\\ b+2a&=54\end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása: $a = 17$ és $b = 20$.

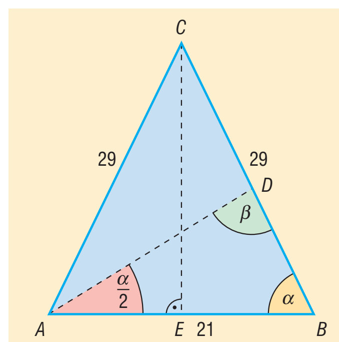
Tehát az eredeti háromszög alapja 17 cm, szára 20 cm hosszú.

b) Az EBC háromszögben:

$$\cos\alpha=\frac{10{,}5}{29}, \quad \text{amiből} \quad \alpha = 68{,}77°.$$

Az ABD háromszögben:

$$\frac{\alpha}{2}=34{,}38°, \quad \text{amiből} \quad \beta = 76{,}85°.$$





A szinusztétellel:

$$\frac{BD}{21} = \frac{\sin 34{,}38^\circ}{\sin 76{,}85^\circ}, \qquad \text{amiből} \qquad BD = 12{,}18 \text{ és } CD = 16{,}82.$$

Tehát a szögfelező a szemközti szárat 12,18 cm és 16,82 cm hosszú részekre vágja.

15. *a)* 12 óra után a 12 osztói: 01, 02, 03, 04, 06, 12.
13 óra után: 01, 13.
14 óra után: 01, 02, 07, 14.
Tehát az adott időszakban 12-szer fordul elő, hogy a percek száma osztója az órák számának.

b) 08 óra után: 08, 16, 24, 32, 40, 48, 56.

09 óra után: 09, 18, 27, 36, 45, 54.

10 óra után: 10, 20, 30, 40, 50.

Tehát az adott időszakban 18-szor fordul elő, hogy az órák száma osztója a percek számának.

10. Feladatsor II. rész / *B* – megoldások

16. *a)* Ha $x = 0$:

$$T(0) = 73 \cdot 10^0 + 22 = 95\ ^\circ\text{C}.$$

b) Ha $x = 37$:

$$T(37) = 73 \cdot 10^{-\frac{37}{37}} + 22 = 73 \cdot 10^{-1} + 22 = 7{,}3 + 22 = 29{,}3\ ^\circ\text{C}.$$

c) A $60 = 73 \cdot 10^{-\frac{x}{37}} + 22$ egyenlet megoldása:

$$\frac{38}{73} = 10^{-\frac{x}{37}},$$

$$-\frac{x}{37} = \lg\frac{38}{73},$$

$$x = -37 \cdot \lg\frac{38}{73} = 10{,}5.$$

Körülbelül 10,5 perc múlva lesz 60 °C-os a tea.

d) A tea feletti rész térfogata:

$$V = 2 \cdot 3{,}75^2 \cdot \pi \approx 88{,}36\ \text{cm}^3,$$

ennek vízzel való kitöltéséhez $\frac{88{,}36}{0{,}9} = 98{,}18\ \text{cm}^3$ jégre van szükség.
Egy jéggolyó térfogata:

$$v = \frac{4 \cdot 1{,}5^3 \cdot \pi}{3} \approx 14{,}18\ \text{cm}^3.$$

$\frac{98{,}18}{14{,}18} \approx 6{,}92$, ezért legfeljebb 6 jéggolyót tehetünk a teába anélkül, hogy kifolyna a bögréből.



17. *a)* Az összes lap 32, az összes esetek száma:

$$\binom{32}{5} = 201\,376.$$

Mindkét színből 8 lap van, a kedvező esetek száma:

$$\binom{8}{3} \cdot \binom{8}{2} = 1\,568.$$

A valószínűség:

$$p = \frac{1\,568}{201\,376} \approx 0{,}0078.$$

b) Már csak 27 lapból osztanak 5-t, az összes eset:

$$\binom{27}{5} = 80\,730.$$

A 27 lap között még 8 piros van, 19 nem piros, a kedvező esetek száma:

$$\binom{19}{5} = 11\,628.$$

A valószínűség:

$$p = \frac{11\,628}{80\,730} \approx 0{,}144.$$

c) Csak 22 lapból osztanak 5-öt, az összes eset:

$$\binom{22}{5} = 26\,334.$$

A csomagban még 4 zöld, 7 tök és 6 piros van, a kedvező esetek száma:

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{6}{1} = 756.$$

A valószínűség:

$$p = \frac{756}{26\,334} \approx 0{,}0287.$$

d) Az összes esetek száma:

$$\binom{32}{5} \cdot \binom{27}{5} \cdot \binom{22}{5} \approx 4{,}28 \cdot 10^{14}.$$

Mivel 3-szor 4 figura kiesik, a kedvező esetek száma:

$$\binom{20}{5} \cdot \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \approx 1{,}17 \cdot 10^{10}.$$

A valószínűség:

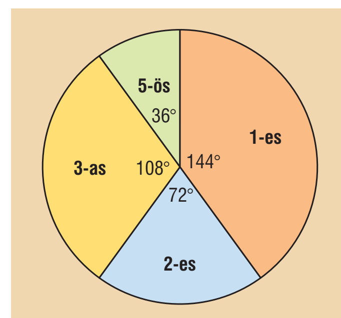
$$p \approx 0{,}27 \cdot 10^{-4}.$$



18. *a)* Maximális akkor lehet, ha minden más jegy jeles, ekkor az átlag: 3,4.
Minimális úgy lehet, ha minden más jegy elégséges, ekkor az átlag: 1,6.

b) Táblázat a jegyekről:

Érdemjegy	1-es	2-es	3-as	4-es	5-ös
Darab	12	6	9	0	3



Egy adathoz tartozó középponti szög:

$$\frac{360^{\circ}}{30} = 12^{\circ}.$$

A kördiagram jobbra látható.

c) A módusz 1, a medián 2.

d) Az átlag:

$$\frac{12 + 12 + 27 + 15}{30} = 2{,}2.$$

A szórás:

$$\sqrt{\frac{12 \cdot (1 - 2{,}2)^2 + 6 \cdot (2 - 2{,}2)^2 + 9 \cdot (3 - 2{,}2)^2 + 3 \cdot (5 - 2{,}2)^2}{30}} \approx 1{,}43.$$

e) A $[2{,}2 - 1{,}43; 2{,}2 + 1{,}43] = [0{,}77; 3{,}63]$ intervallumon kívül csak 3 adat van (az 5-ösök).



EMELT SZINTŰ FELADATSOROK

1. Feladatsor / A – megoldások

1. *a)* Az egyenlet a hatványozás azonosságai alapján átrendezve:

$$\left(2^x\right)^2 - 8 \cdot 2^x + 12 = 0.$$

Ennek megoldásai:

$$(2^x)_1 = 6 \text{ és } (2^x)_2 = 2, \quad \text{amiből} \quad x_1 = \log_2 6 \approx 2{,}585 \text{ és } x_2 = 1.$$

A lépések során ekvivalens átalakításokat végeztünk.

b) A logaritmus definíciója alapján kikötéseink $x > 0$ és $x + 3 > 0$, ezekből $x > 0$. Az azonosságok alapján az egyenlőtlenség átírható a következő alakba:

$$\log_3 \frac{x+3}{x} < \log_3 9.$$

Az $f(x) = \log_3 x$ függvény szigorúan monoton növekvő $(3 > 1)$, így $\frac{x+3}{x} < 9.$

Rendezve: $\frac{-8x+3}{x} < 0.$

Mivel a nevezőben $x > 0$ szerepel a feltétel miatt, ezért a tört értéke csak akkor lehet negatív, ha a számláló pozitív:

$$-8x + 3 < 0, \quad \text{azaz} \quad \frac{3}{8} < x.$$

A feltétellel egybevetve a megoldás: $x \in \left]\frac{3}{8}; \infty\right[.$

2. *a)* Jelölje a $h(x) = 1{,}5x$ függvény Hiper Mária talajtól való távolságát $x \geq 0$ másodperccel Boszi megjelenése után. Azt keressük, hogy mely x-ekre lesz $h(x) - g(x) > 2$. Behelyettesítve:

$$1{,}5x - (x^2 - 4x + 5) > 2,$$
$$-x^2 + 5{,}5x - 5 > 2,$$
$$-x^2 + 5{,}5x - 7 > 0.$$

A parabola lefelé nyílik, a két zérushely között találjuk a pozitív értékeket. Mivel $x_1 = 2$, $x_2 = 3{,}5$, így $x \in \left]2; 3{,}5\right[$. Ez azt jelenti, hogy 1,5 másodpercig Mari van felül: a játékosnak van lehetősége a győzelemre.

b) A játékos reakcióideje (azaz késlekedése) azt jelenti, hogy t másodpercig nem ugrik. Így $h(x) = 1{,}5(x - t)$-re módosul a Mari talajtól való távolságát leíró függvény $(x > t)$. Az előzőek alapján:

$$h(x) - g(x) - 2 = -x^2 + 5{,}5x - 7 - 1{,}5t > 0.$$

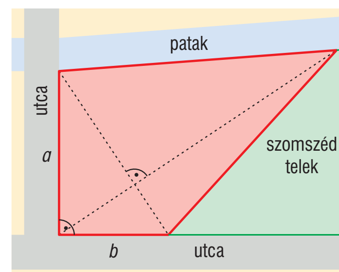
A megoldások (tfh. $x_1 < x_2$) különbsége adja meg azt az időt, amíg Mari van felül: $x_2 - x_1 \geq 1$ kell ahhoz, hogy ez legalább 1 másodperc legyen. A megoldóképletből:

$$x_2 - x_1 = \sqrt{2{,}25 - 6t} \geq 1,$$
$$1{,}25 \geq 6t,$$
$$\frac{1{,}25}{6} \geq t.$$

Tehát a játékosnak legfeljebb kb. 0,2 másodperc alatt érdemes reagálnia, ha nyerni szeretne.



3. *a)* Készítsünk ábrát, amelyen a és b jelöli az utcafronti telekoldalak hosszúságait.



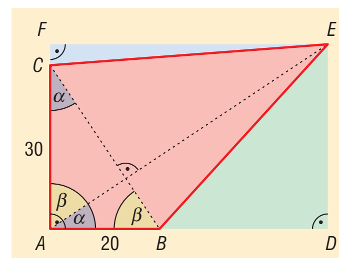
Pitagorasz tétele szerint a telek rövidebb átlója $\sqrt{a^2+b^2}$, hosszabb átlója ennek a kétszerese.

Ha négyszög átlói merőlegesek, akkor területe az átlók szorzatának fele:

$$T=\frac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot 2\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{2}=a^2+b^2.$$

Ezzel az állítást bizonyítottuk.

b) Készítsünk egy új ábrát csak a négyszögről.



Meghosszabbítva a derékszögű utcafrontokat, tekintsük a kialakuló téglalapban a következő derékszögű háromszögeket. Az ábrán jelölt szögek az átlók merőlegessége miatt egyenlők.

Így $\lambda=2$ arányossági tényezővel

$$CAB_\triangle \sim ADE_\triangle \cong EFA_\triangle.$$

A hasonlóságból adódik, hogy

$$AD=EF=2CA=60 \quad \text{és} \quad AF=ED=2AB=40.$$

Innen pedig

$$CF=AF-AC=10, \quad BD=AD-AB=40.$$

Ezek után a telek keresett oldalai:

$$CE=\sqrt{10^2+60^2}=\sqrt{3700}, \quad BE=\sqrt{40^2+40^2}=40\cdot\sqrt{2}.$$

Két tizedesjegyre kerekítve $CE=60{,}83$ m és $BE=56{,}57$ m.

4. *a)* Az $a_1, \ldots, a_9$ kilencelemű mintának a diagram alapján ismerjük öt elemét, tegyük rangsorba: 2, 4, 7, 8, 10. Mivel a diagramon nincs 10-nél nagyobb érték és $R=10$, így a rangsor első eleme 0 (0, 2, 4, 7, 8, 10). Az elemszám miatt az alábbiak igazak:

0	_		_	_	Q_2	_	_		_	10
	a_2	Q_1	a_3	a_4	$= 2\cdot Q_1$	a_6	a_7	Q_3	a_8	

A kvartilisekre vonatkozó információk alapján $\frac{a_2+a_3}{2}=Q_1>0$ egész (ha 0 lenne, akkor minden kvartilis 0, ami ellentmond a két módusznak vagy az elemeknek). Mivel legalább egy 7 és 8 elemünk is van, ezért $\frac{a_7+a_8}{2}=Q_3>7{,}5$, vagyis Q_3 csak 8, 9 vagy 10 lehet.

Elemezzük tovább a kvartiliseket! Ha $Q_1=1$ vagy 2, akkor $Q_3<7$, nem jó. Ha $Q_1=3$, akkor $Q_2=6$, $Q_3=9$, ami megfelelő. Ha $Q_1>3$, akkor $Q_3>10$, ami ismét nem jó. Tehát $Q_1=3$, $Q_2=6$, $Q_3=9$. Így aztán a minta elején $a_2=2$, $a_3=4$, a végén pedig $a_6=7$, $a_7=8$, $a_8=10$ áll.

0	2		4	_	6	7	8		10	10
		$Q_1=3$		a_4	Q_2			$Q_3=9$		

Az a_4-re nincs külön feltételünk, így az a két módusz miatt 4 vagy 6 is lehet.

Válaszunk tehát: sajnos nem tudja *egyértelműen* visszaállítani az adatelemző a mintát.



b) A három módusz gyakoriságainak száma lehet 4, 3 vagy 2. Mindhárom esetben ismétléses permutációval van dolgunk.

Ha minden módusz 4-szer szerepel, akkor nincs más elem a mintában: a lehetőségek száma

$$\frac{12!}{4!\cdot 4!\cdot 4!}=34\,650.$$

Ha a móduszok 3-szor szerepelnek, akkor lehetséges 3-3-3-1-1-1 vagy 3-3-3-2-1 egyforma elem. Ezek lehetőségeinek száma rendre

$$\frac{12!}{3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=2\,217\,600 \quad \text{és} \quad \frac{12!}{3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!}=1\,108\,800.$$

Ha a móduszok 2-szer fordulnak elő, akkor csak 2-2-2-1-1-1-1-1-1 egyforma elem lehetséges:

$$\frac{12!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=59\,875\,200.$$

Összesen a lehetőségek száma ezek összege: 63 236 250.

1. Feladatsor / *B* – megoldások

5. *a)* Jelölje a marcipános édességek darabszámát m $(\in \mathbb{Z}^+)$. Eredetileg egy marcipános édesség kiválasztásának valószínűsége $\frac{m}{68+m}$.

Mivel ugyanannyi marcipánost tettek bele, a megváltozott feltételek mellett egy csokis édesség kivételének valószínűsége $\frac{68}{68+2m}$.

Előbbi az utóbbi 30%-a:

$$\frac{m}{68+m}=\frac{68}{68+2m}\cdot 0{,}3.$$

Ez átalakítva a következő egyenletet kapjuk:

$$m^2+23{,}8\text{m}-693{,}6=0,$$

melynek megoldásai $m_1=17$ és $m_2=-40{,}8$. A megoldások közül csak a 17 felel meg a *pozitív egész* feltételnek.

Ellenőrzéssel meggyőződünk az eredmény helyességéről: $\frac{17}{85}=\frac{68}{102}\cdot 0{,}3=0{,}2.$

b) A ládában 100 édesség van, így egy marcipános kiválasztásának valószínége 0,32, egy csokisé pedig 0,68. Mivel nagyon sokféleképpen kerülhet kezükbe marcipános, térjünk át a komplementer eseményre: a „nincs marcipános” azt jelenti, hogy minden kivett csokis:

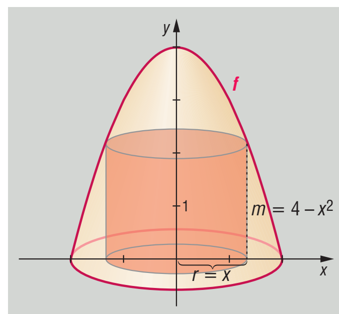
$$1-0{,}68^n\ge 0{,}99 \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}01\ge 0{,}68^n.$$

Most mindkét oldalnak vesszük a 0,68 alapú logaritmusát: mivel ez 1-nél kisebb szám ($\log_{0,68}x$ függvény szigorúan monoton csökkenő), így az egyenlőtlenség megfordul:

$$n\ge \log_{0,68}0{,}01\approx 11{,}94.$$

Vagyis legalább 12-szer kell próbálkozniuk ahhoz, hogy legalább 99%-os valószínűséggel kerüljön a kezükbe marcipános édesség.





6. *a)* Képzeljük el a megforgatott függvényt és a lehető legnagyobb felszínű hengert. Egy ilyen henger fedőköre rajta van a megforgatott parabola felszínén.

Ha az alapkör sugarát $r = x$-nek vesszük, ahol $0 < x < 2$, akkor a henger m magassága az az érték, amit a parabola helyettesítési értékeként kapunk:

$$m = f(r) = 4 - x^2.$$

Ezekkel meg tudjuk adni a henger felszínét x függvényében:

$$A(x) = 2r^2\pi + 2r\pi m = 2x^2\pi + 2x\pi(4 - x^2).$$

Átalakítva: az

$$A(x) = -2\pi(x^3 - x^2 - 4x)$$

függvénynek keressük a maximumát, ahol $D_A =]0; 2[$.

Harmadfokú függvény lehetséges szélsőértékeit legegyszerűbben deriválással találjuk meg:

$$A'(x) = -2\pi(3x^2 - 2x - 4) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2 + \sqrt{52}}{6} \approx 1{,}535 \text{ és } x_2 = \frac{2 - \sqrt{52}}{6} \approx -0{,}869 \notin D_A.$$

A második derivált segítségével eldöntjük, hogy megfelelő szélsőértéket kaptunk-e:

$$A''(x_1) = -2\pi(6x_1 - 2) \approx -45{,}3 < 0 \quad \Rightarrow \quad x_1\text{-ben a függvénynek maximuma van.}$$

Tehát Jankának a tervezett űrkapszula henger alakú kabinjának sugarát 1,535 egységnek kell választania, hogy a kabin felszíne a lehető legnagyobb legyen.

b) Elsőnek számítsuk ki az eredeti görbe alatti területet (felhasználjuk, hogy a függvény páros):

$$T_1 = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{2} (4 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2 \cdot \left[8 - \frac{8}{3}\right] = \frac{32}{3}.$$

Másodikra levágjuk az alját $y = 1$ magasságban, ami megfelel annak, mintha a függvényt eltolnánk 1 egységgel lefelé: $g(x) = 3 - x^2$ alakú lesz. Ennek kell az x tengely feletti területe: ehhez először megállapítjuk a zérushelyeit.

$$3 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{3}.$$

A lefelé való eltolás miatt g függvény is páros.

$$T_1 = 2 \cdot \int_{0}^{\sqrt{3}} (3 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \left[3x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = 2 \cdot \left[3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right] = 4\sqrt{3}.$$

A keresett százalékértékhez osszuk T_2-t T_1-gyel: $\frac{T_2}{T_1} \approx 0{,}649$, ami kerekítve 65%.

7. *a)* A logaritmus két azonosságát (áttérés más alapú logaritmusra, illetve konstans szorzó bevitele a logaritmusba) és definícióját felhasználva bizonyíthatjuk az állítást.

$$\log_{x^2} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 x^2} = \frac{2}{2 \cdot \log_2 x} = \frac{1}{\log_2 x}.$$

b) Legyen $x > 0$, ekkor a hatványozás tulajdonságai miatt $2^x < 4^x < 8^x$. Mivel háromszög oldalai, így teljesül rájuk a háromszög-egyenlőtlenség:

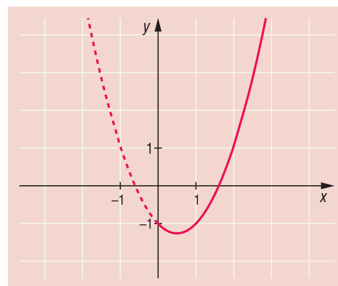
$$2^x + 4^x > 8^x.$$



Mindkét oldalt leosztva 2^x (>0) kapjuk, hogy $1+2^x>4^x$. Ez másodfokú egyenlőtlenség, 0-ra rendezve

$$0>4^x-2^x-1$$

alakú. A kifejezés 2^x-ben másodfokú: felfelé nyíló parabola, így megoldáshalmaza a zérushelyek közötti tartomány (ábra). Az egyenlőség megoldásai:



$$2_1^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad 2_2^x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Utóbbi negatív, vagyis nem eleme 2^x függvény értékkészletének. Az egyenlőtlenség megoldásai:

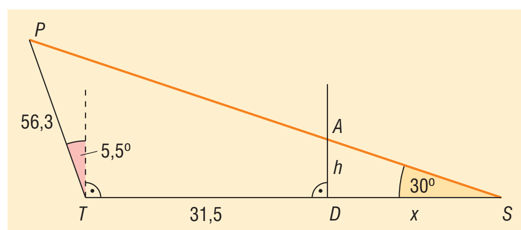
$$0<2^x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \text{ezért} \quad -\infty<x<\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

A feltételt figyelembe véve az egyenlőtlenség megoldásai:

$$x\in\left]0;\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[.$$

A bal végpont három tizedesre kerekítve 0,694. Mivel lefelé kerekítettünk, ebből még biztosan szerkeszthető háromszög és ez a legnagyobb ilyen érték.

8. *a)* A délkelet felé dőlő tornyot délkeletről érik a napsugarak, a dóm pedig tőle északnyugatra található, tehát kezelhetjük őket egy síkmetszetben. A ferde torony PT, távolsága a dómtól TD. A kérdés az $AD=h$ távolság.



Mivel $DTP\sphericalangle=95{,}5°$, így

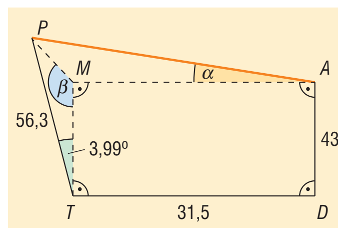
$$TPS\sphericalangle=180°-(95{,}5°+30°)=24{,}5°.$$

$PTS_\triangle$-ben alkalmazzuk a szinusztételt:

$$\frac{x+31{,}5}{56{,}3}=\frac{\sin 24{,}5°}{\sin 30°}, \quad \text{innen} \quad x\approx 15{,}19 \text{ méter.}$$

A derékszögű $ADS_\triangle$-ben pedig $\frac{h}{15{,}19}=\operatorname{tg}30°$, amiből $h\approx 8{,}77$ méter.

b) Ismét készítsünk ábrát: ebben $TDAM$ téglalap és keressük $PAM\sphericalangle=\alpha$ szöget. $MT=43$, így $PTM_\triangle$-ben alkalmazhatjuk a koszinusztételt:



$$PM^2=56{,}3^2+43^2-2\cdot 56{,}3\cdot 43\cdot\cos 3{,}99°.$$

Ebből $PM\approx 13{,}73$ méter. $PTM_\triangle$ minden oldala ismert, így akár a szinusztételt is alkalmazhatjuk (tudjuk, hogy $PMT\sphericalangle=\beta$ tompaszög):

$$\frac{\sin\beta}{\sin 3{,}99°}=\frac{56{,}3}{13{,}73}, \quad \text{amiből} \quad \beta\approx 163{,}42°.$$

Áttérünk $PMA_\triangle$-re. Ebben

$$AMP\sphericalangle=360°-(90°+\beta)=106{,}58°.$$



PM és MA szakaszok hossza már ismert, így újra a koszinusztételből:

$$PA^2 = 31{,}5^2 + 13{,}73^2 - 2 \cdot 31{,}5 \cdot 13{,}73 \cdot \cos 106{,}58°,$$

ahonnan $PA \approx 37{,}78$ m.

Végül újra szinusztételt alkalmazva:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 106{,}58°} = \frac{13{,}73}{37{,}78}, \quad \text{amiből} \quad \alpha \approx 20{,}38°.$$

Tehát a nap sugarai 20,38°-os szögben érkeznek a földre, amikor a ferde torony árnyéka pont a dóm falának tetején van.

9. Az egyenletesen gyorsuló test útját a következő képlet adja meg: $s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$.
A hátrább lévő test esetén ha $t = 1$ s, akkor $s = 25$ m, tehát:

$$25 = v_0 + \frac{a}{2}, \quad (1)$$

ha $t = 2\text{s}$, akkor $s = 50\frac{1}{3}$ m, tehát

$$50\frac{1}{3} = 2v_0 + 2a. \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenletekből $a = \frac{1}{3}$ és $v_0 = 25 - \frac{1}{6} = 24\frac{5}{6}$. Tehát $s_1 = 24\frac{5}{6} \cdot t + \frac{t^2}{6}$.

A másik test esetén ha $t = 1$ s, akkor $s = 30$ m, tehát:

$$30 = v_0 + \frac{a}{2}, \quad (3)$$

ha $t = 2\text{s}$, akkor $s = 59\frac{1}{2}$ m, tehát

$$59\frac{1}{2} = 2v_0 + 2a. \quad (4)$$

A (3) és (4) egyenletekből $a = -\frac{1}{2}$ és $v_0 = 30\frac{1}{4}$. Tehát $s_2 = 30\frac{1}{4} \cdot t - \frac{t^2}{4}$.

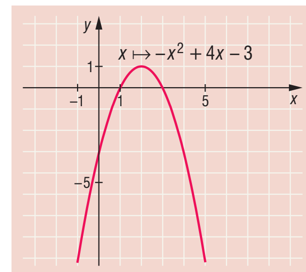
Az első test akkor éri utol a másodikat, ha $s_1 = s_2 + 20$. Ebből t-re a következő egyenletet kapjuk:

$$t^2 - 13t - 48 = 0.$$

Ennek gyökei 16 és -3. Nyilván csak a pozitív gyök jó, tehát 16 másodperc múlva éri utol az első test a másodikat.

2. Feladatsor / *A* – megoldások

1. *a)* A logaritmus értelmezése alapján $-x^2 + 4x - 3 > 0$, valamint $x - 1 > 0$. Az utóbbi egyenlőtlenség megoldása $x > 1$, míg az első egyenlőtlenség bal oldalán álló másodfokú kifejezés két zérushelye: $x_1 = 1$ és $x_2 = 3$. Az $x \mapsto -x^2 + 4x - 3$ másodfokú függvény grafikonjáról (ld. ábra) leolvasható, hogy az első egyenlőtlenség megoldása $1 < x < 3$.
A kifejezés értelmezési tartománya az $]1; 3[$ intervallum.





b) A logaritmus azonosságai és definíciója alapján az egyenlet a következő alakokban is felírható:

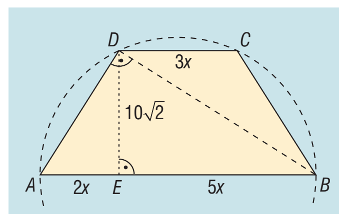
$$\log_2 \frac{-x^2+4x-3}{(x-1)^2} = 1, \quad \text{amiből} \quad \frac{-x^2+4x-3}{(x-1)^2} = 2.$$

Az *a)* feladatban kiszámoltuk a számláló gyökeit. A gyöktényezős alak alkalmazásával kapjuk, hogy $-x^2+4x-3 = -(x-1)(x-3)$, és ezért a bal oldalon álló tört egyszerűsítése után:

$$\frac{-(x-3)}{x-1} = 2, \quad \text{amiből} \quad x = \frac{5}{3}.$$

A kapott szám eleme az értelmezési tartománynak, és ellenőrzéssel meggyőződhetünk róla, hogy megoldása az egyenletnek.

2. *a)* A feltételek alapján a trapéz nem téglalap. Ekkor az ábra jelöléseit használva a trapéz alapjai $AB = 7x$, $CD = 3x$, a D csúcsból induló magasság talppontja E, továbbá az ABD háromszög derékszögű. Az ABD háromszögben a magasságtétel alapján adódik: $DE^2 = 2x \cdot 5x = 10x^2$, ebből következik, hogy $200 = 10x^2$, végül $x = 2\sqrt{5}$.



A trapéz alapjai:

$$AB = 14\sqrt{5} \approx 31{,}30 \text{ cm}, \quad CD = 6\sqrt{5} \approx 13{,}42 \text{ cm}.$$

A trapéz területe:

$$T = \frac{AB+CD}{2} \cdot DE = \frac{14\sqrt{5}+6\sqrt{5}}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 100\sqrt{10} \approx 316{,}23 \text{ cm}^2.$$

b) Thalész tételének megfordítása alapján az ABD derékszögű háromszög köré írt kör középpontja éppen az AB átfogó felezőpontja. Természetesen a C csúcs szintén illeszkedik az AB átmérőjű körre, így a trapéz köré írt kör sugara az AB átfogó fele, azaz $r = 7\sqrt{5} \approx 15{,}65$ cm.

A kör területe:

$$T = r^2\pi = 245\pi \approx 769{,}69 \text{ cm}^2.$$

3. *a)* Jelöljük p-vel annak a valószínűségét, hogy egy kiválasztott tanuló mekkora valószínűséggel oldja meg egyedül a házi feladatát, azaz $p = 0{,}65$.

Mivel független eseményekről van szó, ezért a keresett valószínűség $p^{15} \approx 0{,}0016$. Sajnálattal állapítjuk meg, hogy ez elkeserítően kicsi érték.

b) Azt a 10 diákot, aki nem önállóan dolgozott, $\binom{15}{10} = 3003$-féleképpen választhatjuk ki. A binomiális eloszlás alapján annak a valószínűsége, hogy éppen 10 diák készítette el segítséggel a házi feladatát:

$$\binom{15}{10} \cdot p^5 \cdot (1-p)^{10} \approx 0{,}0096.$$

4. *a)* A holtverseny az 1., 2., 3., 4., illetve 5. hely valamelyikén lehetett. A hat versenyző közül $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen választhatjuk ki azt a kettőt, akik holtversenyt értek el. A maradék négy helyen a többi versenyző $4! = 24$-féleképpen érhetett célba. Így összesen $5 \cdot 15 \cdot 24 = 1800$ különböző sorrendben érhettek célba a versenyzők.

b) Mivel a versenyt Andor egyedül nyerte meg, ezért az 1. helyen nem alakulhatott ki holtverseny.

I. eset: Fábián az 5. helyen holtversennyel ért célba. Ekkor Fábián mellé 4-féleképpen választhatunk 5. helyezettet. A 2., 3., 4. helyen a maradék 3 versenyző $3! = 6$-féleképpen érhetett célba, ezért az 1. eset összesen $4 \cdot 6 = 24$-féleképpen valósulhatott meg.



II. eset: Fábián egyedül ért célba az utolsó helyen. Ekkor a holtverseny a 2., a 3. vagy a 4. helyen következhetett be. Az együtt célba érkezőket $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen választhatjuk ki. A maradék két helyezésen kétféleképpen alakulhatott a sorrend, ezért a 2. eset összesen $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$-féleképpen valósulhatott meg.

A verseny végeredménye összesen $24 + 36 = 60$-féleképpen alakulhatott.

2. Feladatsor / *B* – megoldások

5. *a)* Anna a 4 év alatt 48 alkalommal fizet be 10 000 Ft-ot, ezért összesen 480 000 Ft-ot fizet be.

b) Anna az 1. évben összesen 12-szer fizet be 10 000 Ft-ot. Az első összeg 12 hónapig kamatozik, a második 11 hónapig, és így tovább; a december 1-jén befizetett 10 000 Ft után a bank már csak 1 havi kamatot fizet. Így december 31-én az Anna számláján lévő összeg:

$$10\,000 \cdot 1{,}003^{12} + 10\,000 \cdot 1{,}003^{11} + \ldots + 10\,000 \cdot 1{,}003.$$

A fenti összeg egy mértani sorozat első 12 tagjának összege. A sorozat első tagja $10\,000 \cdot 1{,}003$, hányadosa 1,003, így az összeg:

$$10000 \cdot 1{,}003 \cdot \frac{1{,}003^{12} - 1}{1{,}003 - 1} \approx 122\,365{,}93,$$

vagyis Anna számláján hozzávetőlegesen 122 366 Ft lesz.

c) A megtakarítás összegét két részre bonthatjuk.

I. rész: Anna befizetései, valamint annak kamata. Az első hónapban befizetett összeg 48 hónapig, a második hónapban befizetett összeg 47 hónapig, és így tovább; az utolsó befizetett összeg már csak 1 hónapig kamatozik. Ennek megfelelően a befizetésekből, valamint annak kamataiból Anna számláján a következő összeg íródik jóvá:

$$10000 \cdot 1{,}003^{48} + 10000 \cdot 1{,}003^{47} + \ldots + 10000 \cdot 1{,}003 =$$

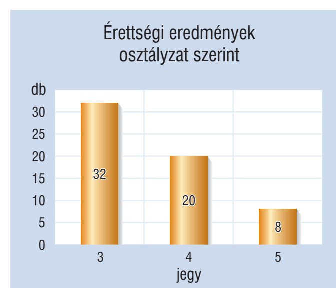
$$= 10000 \cdot 1{,}003 \cdot \frac{1{,}003^{48} - 1}{1{,}003 - 1} \approx 516\,996{,}95 \text{ Ft}.$$

II. rész: az állami támogatás, valamint annak kamatai. Az első év után az állam 36 000 Ft-ot utal a számlára. Ez az összeg 36 hónapig kamatozik. A második év után kapott 36 000 Ft 24 hónapig, míg a harmadik év után járó 36 000 Ft csak 12 hónapig kamatozik. A negyedik év után járó állami támogatás jóváíródik a számlán az 5. év első napján, de kamat már nem jár utána. Ezek alapján az állami támogatás, valamint az utána járó kamat összege:

$$36\,000 \cdot 1{,}003^{36} + 36\,000 \cdot 1{,}003^{24} + 36\,000 \cdot 1{,}003^{12} + 36\,000 \approx 152\,100{,}26 \text{ Ft}.$$

Anna a takarékoskodási időszak letelte után összesen $516\,996{,}95 + 152\,100{,}26 \approx 669\,097$ Ft összeget vehet fel.

6. *a)* Közepest a 20 diák 60%-a (12 fő), illetve a 40 diák 50%-a (20 fő) kapott, tehát összesen 32-en. Jót, azaz 4-est a 20 diák 25%-a (5 tanuló), valamint a 40 diák 37,5%-a (15 tanuló), összesen 20-an kaptak. A maradék 8 tanuló jelesre érettségizett. Az adatok szemléltetésére oszlopdiagram a legmegfelelőbb.





b) A matematikaérettségi jegyek átlaga:

$$\frac{12\cdot 3+5\cdot 4+3\cdot 5}{20}=3,55.$$

A történelemérettségi jegyek átlaga:

$$\frac{20\cdot 3+15\cdot 4+5\cdot 5}{40}\approx 3,63.$$

c) Tegyük fel, hogy legalább n diáknak kellett volna 4-est szereznie a jobb átlaghoz. Ekkor:

$$\frac{(12-n)\cdot 3+(5+n)\cdot 4+3\cdot 5}{20}\geq 3,75.$$

A műveletek elvégzése után $n\geq 4$ adódik, azaz legalább 4 embernek kellett volna 4-est elérnie a közepesre érettségizők közül a jobb átlaghoz.

d) Az átlag csak a következő esetekben nagyobb vagy egyenlő, mint 4,20:

I. eset: két ötös; II. eset: egy ötös és egy négyes tanulót választunk ki.

Az I. eset bekövetkezésének valószínűsége:

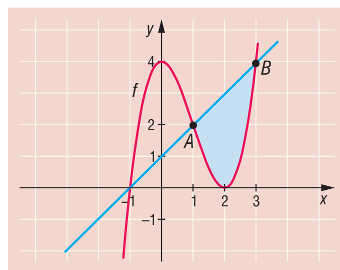
$$P(\text{két 5-ös tanulót választunk})=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{40}{2}}=\frac{10}{780}\approx 0,0128,$$

a II. eset bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(\text{egy 5-ös és egy 4-es tanulót választunk})=\frac{5\cdot 15}{\binom{40}{2}}=\frac{75}{780}\approx 0,0962.$$

A keresett valószínűség $\approx 0,1090$.

7. *a)* Mivel $1^3-3\cdot 1^2+4=2$, valamint $3^3-3\cdot 3^2+4=4$, ezért A és B egyaránt illeszkednek az f függvény grafikonjára.



b) Az AB egyenes egyenlete: $y=x+1$.

c) Az AB egyenes az x tengelyt a $(-1; 0)$ pontban metszi. Egyszerű számolás mutatja, hogy $(-1)^3-3\cdot(-1)^2+4=0$, így a $(-1; 0)$ pont illeszkedik az f függvény grafikonjára is.

d) A zérushelyeket az $x^3-3x^2+4=0$ egyenlet megoldásai adják. A *c)* feladat eredménye alapján az AB egyenes zérushelye $x=-1$. Az egyenlet bal oldalán szorzattá alakítunk:

$$x^3-3x^2+4=x^3+1-3x^2+3=(x+1)(x^2-x+1)-3(x^2-1)=$$
$$=(x+1)(x^2-x+1)-3(x+1)(x-1)=(x+1)(x^2-x+1-3x+3)=$$
$$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2.$$

A szorzattá bontásból leolvasható, hogy az egyenlet megoldásai: $x_1=-1$ és $x_2=2$.

e) Az f függvény deriváltja $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. A derivált előjelének vizsgálatából látható, hogy a függvény az $[1; 2]$-on csökken, a $[2; 3]$-on pedig növekszik. Ebből adódik, hogy az AB szakasz és a függvény grafikonja által közrefogott síkidom területe:

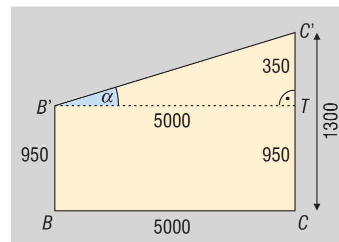
$$T=\int_1^3 (x+1)-(x^3-3x^2+4)\,\mathrm{d}x=\int_1^3 -x^3+3x^2+x-3\,\mathrm{d}x.$$



A Newton–Leibniz-formula alapján:

$$T=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{x^2}{2}-3x\right]_{x=1}^{x=3}=\left[-\frac{81}{4}+27+\frac{9}{2}-9\right]-\left[-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}-3\right]=4.$$

8. *a)* Ha a Tündér-hegy csúcsát B', a Magas-hegyét pedig C' jelöli, akkor a $BCC'B'$ derékszögű trapéz alapjai $BB' = 950$ m, $CC' = 1300$ m, míg egyik szára $BC = 5000$ m (ld. ábra).



A $B'TC'$ derékszögű háromszögben:

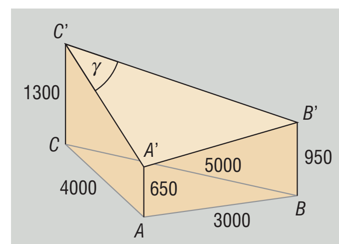
$$C'T = 1300 - 950 = 350 \text{ m},$$

így a keresett $C'B'T\sphericalangle = \alpha$ szögre:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{350}{5000},\quad \text{amiből}\quad \alpha\approx 4{,}00°.$$

A Tündér-hegy csúcsáról a Magas-hegy csúcsa $4{,}00°$-os emelkedési szögben látszik.

b) Ha a Pokol-hegy csúcsát A' jelöli, akkor az $A'C'B' = \gamma$ szög nagyságát keressük.



A γ szöget az $A'C'B'$ háromszög oldalaiból például a koszinusztétel segítségével számolhatjuk ki. Az *a)* feladat ábráján szereplő $B'C'T$ derékszögű háromszögben Pitagorasz tételével $B'C' \approx 5012{,}24$ m adódik. Hasonló számolások után:

$$A'B'=\sqrt{3000^2+(950-650)^2}\approx 3014{,}96 \text{ m},$$

$$A'C'=\sqrt{4000^2+(1300-650)^2}\approx 4052{,}47 \text{ m}.$$

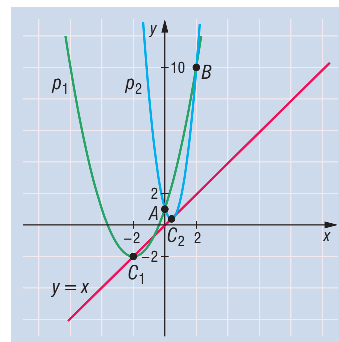
Az $A'C'B'$ háromszögre felírva a koszinusztételt kapjuk, hogy:

$$A'B'^2=A'C'^2+B'C'^2-2\cdot A'C'\cdot B'C'\cdot\cos\gamma,\quad \text{ahonnan}\quad \gamma\approx 36{,}97°.$$

A Magas-hegy csúcsáról a másik két hegycsúcsot összekötő szakasz körülbelül $36{,}97°$-os szögben látszik.

9. A második feltétel alapján a parabola áthalad a $(0; 1)$ ponton, ezért:

$$a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=1,\quad \text{amiből}\quad c=1.$$



Mivel a parabola illeszkedik a $(2; 10)$ pontra is, ezért:

$$a\cdot 2^2+b\cdot 2+1=10\quad\Rightarrow\quad 4a+2b=9.\quad (1)$$

A parabola egyenletének jobb oldalát teljes négyzetté alakítva kapjuk, hogy:

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+1,$$

$$y-\left(-\frac{b^2}{4a}+1\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

A fenti egyenletből leolvasható, hogy a parabola tengelypontjának koordinátái:

$$C\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2}{4a}+1\right).$$



Ha a tengelypont illeszkedik az $y = x$ egyenletű egyenesre, akkor koordinátái kielégítik az egyenletet, azaz:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{b^2}{4a} + 1, \qquad / \cdot 4a$$

$$-2b = -b^2 + 4a.$$

Felhasználva, hogy (1) alapján $4a = 9 - 2b$, adódik, hogy:

$$-2b = -b^2 + 9 - 2b, \quad \text{innen} \quad b_1 = 3 \quad \text{és} \quad b_2 = -3.$$

Ha $b_1 = 3$, akkor $a_1 = \frac{3}{4}$, míg ha $b_2 = -3$, akkor $a_2 = \frac{15}{4}$.

A feltételeknek két parabola tesz eleget, ezek egyenlete:

$$p_1:\ y = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 1 \quad \text{és} \quad p_2:\ y = \frac{15}{4}x^2 - 3x + 1.$$

A két parabolát és a feltételek teljesülését az ábra szemlélteti.

3. Feladatsor / *A* – megoldások

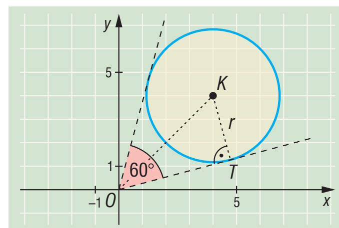
1. Legyen x a hajó sebessége állóvízben, y pedig a folyó sebessége:

$$AB = 5 \cdot (x + y), \qquad BA = \frac{17}{3} \cdot (x - y).$$

A két út egyenlőségéből: $x = 16y$.
Azaz $AB = 5 \cdot 17y = 85y$, tehát a tutaj 85 óra alatt teszi meg az AB utat.

2. A kör egyenlete $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 32 - p^2$, középpontja $K(4; 4)$.

$$OK = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$



Az OTK derékszögű háromszögben:

$$\sin 30° = \frac{r}{4\sqrt{2}}, \quad \text{ebből} \quad r = 2\sqrt{2}.$$

Mivel $r^2 = 32 - p^2$, adódik, hogy $p^2 = 24$.

Tehát $p_1 = 2\sqrt{6}$ és $p_2 = -2\sqrt{6}$ értékei esetén látszik 60°-os szögben az origóból a kör.

3. Számítsuk ki a játékosok nyerési esélyeit.

Attila: az ellentett esemény alapján $1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{16}{36} \left(= \frac{4}{9} = 0,\dot{4}\right)$.

Balázs: a kedvező számhármasok:

(1; 2; 3), (1; 2; 5), (1; 3; 4), (1; 3; 5), (1; 4; 5), (1; 5; 6), (2; 3; 5), (3; 4; 5),

a nyerés esélye: $\frac{8 \cdot 3!}{6^3} = \frac{8}{36}$.

Csanád esélye pedig a maradék $\frac{12}{36}$.

A játék akkor igazságos, ha a tétek a nyerési esélyekkel arányosak, tehát Attila tétje 20 zseton, Csanádé pedig 15 zseton.

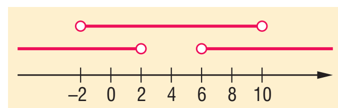


4. Oldjuk meg az első egyenletet:

$$\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x,$$
$$0 = \cos^2 x - \cos x \cdot \sin x,$$
$$0 = \cos x \cdot (\cos x - \sin x).$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát $\cos x = 0$, vagy $\cos x - \sin x = 0$.
A $\cos x = 0$ megoldásai a $[0; 2\pi]$-ban: $x_1 = \frac{\pi}{2}$ vagy $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. A $\cos x - \sin x = 0$-ból $\sin x = \cos x$.
Az egyenletet $\cos x$-szel osztva (a $\cos x = 0$ nem megoldás, mivel ilyen x-ekre $\sin x$ nem lehet 0) $\operatorname{tg} x = 1$ egyenlethez jutunk. Ennek megoldásai a $[0; 2\pi]$-ban: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ vagy $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.
Tehát $A = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.
Oldjuk meg a második egyenlőtlenséget.
Mivel $-5 = \log_{\frac{1}{2}} 32$, elég a $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 12) > \log_{\frac{1}{2}} 32$ egyenlőtlenséggel foglalkoznunk.
Figyelembe véve az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény értelmezési tartományát és szigorú monoton csökkenését, x-re a következő feltételeket kapjuk: $0 < x^2 - 8x + 12 < 32$.
A bal oldali $0 < x^2 - 8x + 12$ egyenlőtlenség megoldásai:

$$x \in]-\infty; 2[\cup]6; \infty[.$$

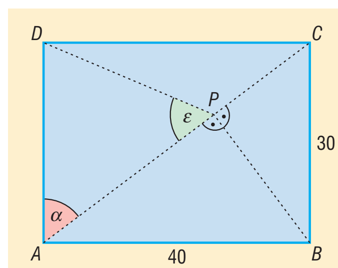


A jobb oldali $x^2 - 8x + 12 < 32$ egyenlőtlenséget rendezve kapjuk: $x^2 - 8x - 20 < 0$, ennek megoldásai: $x \in]-2; 10[$.
Az egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $B =]-2; 2[\cup]6; 10[$.
A π közelítő értékét felhasználva:

$$A \cap B = \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}, \qquad A \cup B =]-2; 2[\cup]6; 10[\cup \left\{\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

3. Feladatsor / *B* – megoldások

5. A keresett pont a téglalap átlóján található.



a) Az ABC derékszögű háromszög, átfogója $AC = 50$ m, átfogóhoz tartozó magassága: $PB = 24$ m. A Pitagorasz-tétellel számolható $AP = 32$ m és $PC = 18$ m.

A PD szakasz koszinusztétellel számítható az APD háromszögből, ha ismernénk a $DAP\sphericalangle$-et. Ez viszont a CDA derékszögű háromszögből: $\alpha = 53{,}13°$.

Ezt felhasználva: $PD = 27{,}78$ m.

b) Az ADP háromszög P-nél lévő szöge szinusztétellel számítható: $\varepsilon = 59{,}76°$, ekkora szögben látszik az AD oldal. A CD oldal pedig $180° - \varepsilon = 120{,}24°$ szögben látszik P-ből.

6. *a)* Az átlag alapján $S_{11} = 154$, ebből $a_1 = 4$ és $a_{11} = 24$. A mért legnagyobb csapadékmennyiség 24 mm volt.

b) A számtani sorozat 11 eleme és a 10 darab 0 lehetséges sorrendje:

$$21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 11 = \frac{21!}{10!} = 42\,325\,920.$$



c) Az a_1 helyzete és a sorban mögötte található 0-k elhelyezkedése egyértelműen adja a sorozat elemeinek helyét. Az a_1 csak a hiányzó első 10 helyre kerülhet.

Ha a_1 november 1-jén van, mögötte a 10 darab 0 helyét $\binom{20}{10}$-féleképpen választhatjuk ki.

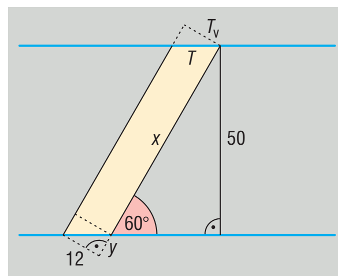
Ha a_1 november 2-án van, a mögötte lévő 9 darab 0 helyét $\binom{19}{9}$-féleképpen adhatjuk meg. És így tovább, összesen:

$$\binom{20}{10}+\binom{19}{9}+\binom{18}{8}+\binom{17}{7}+\binom{16}{6}+\binom{15}{5}+\binom{14}{4}+\binom{13}{3}+\binom{12}{2}+\binom{11}{1}+\binom{10}{0}=352\,716.$$

7. *a)* A cső teljes hossza két részből tevődik össze, az ábra alapján:

$$x=\frac{50}{\sin 60^\circ}=57{,}74\text{ cm},\qquad y=12\cdot\operatorname{tg}30^\circ=6{,}93\text{ cm},$$

tehát $x+y=64{,}67$ cm hosszú csőre van szükség.



b) Az egyenes henger térfogata:

$$V_e=6^2\cdot\pi\cdot 50=5654{,}9\text{ cm}^3.$$

A ferde henger egy x magasságú egyenes hengerré darabolható át, térfogata:

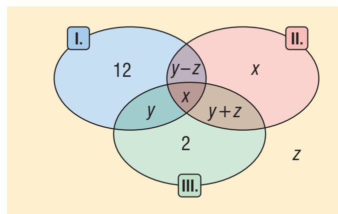
$$V_f=6^2\cdot\pi\cdot 57{,}74=6530{,}2\text{ cm}^3,$$

ami 15,5%-kal több, mint az egyenes hengeré.

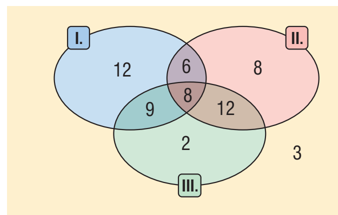
8. *a)* Szemléltessük az igennel szavazók halmazát.

A feltételek szerint:

$$\left.\begin{aligned}12+2y+x-z&=35\\14+z+y&=26\\x+2y+z+2&=31\end{aligned}\right\}.$$



Az első és harmadik egyenlet kivonásából $z=3$, ezt a másodikba helyettesítve: $y=9$. Mindkettőt az elsőbe helyettesítve: $x=8$. A kapott értékeket beírva a halmazábrába, kiderül, hogy 60 fő vett részt a szavazáson.



b) A lehetséges eredmények száma: $\binom{35}{7}=6\,724\,520.$

c) A keresett valószínűség: $\dfrac{\dfrac{30!}{10!\cdot 10!\cdot 10!}}{3^{30}}=0{,}02696.$

9. Az autónak 100 km úton a literekben mért fogyasztását keressük $f(v)=av^2+bv+c$ alakban v sebességének függvényeként. A megadott táblázat alapján a sebességet $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ban mérve:

$$\begin{aligned}f(50)&=5{,}5 &\Rightarrow\quad 5{,}5&=a\cdot 50^2+b\cdot 50+c &\Rightarrow\quad 5{,}5&=a\cdot 2500+b\cdot 50+c,\\ f(100)&=7 &\Rightarrow\quad 7&=a\cdot 100^2+b\cdot 100+c &\Rightarrow\quad 7&=a\cdot 10\,000+b\cdot 100+c,\\ f(150)&=9{,}5 &\Rightarrow\quad 9{,}5&=a\cdot 150^2+b\cdot 150+c &\Rightarrow\quad 9{,}5&=a\cdot 22\,500+b\cdot 150+c.\end{aligned}$$

Az egyenletrendszert megoldva $a=\dfrac{1}{5000}$, $b=0$, $c=5$ adódik, vagyis $f(v)=\dfrac{1}{5000}\cdot v^2+5.$



a) Az autó fogyasztása 100 kilométeren $90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességnél:

$$f(90)=\frac{1}{5000}\cdot 90^2+5=6{,}62 \text{ liter.}$$

b) A 300 km-es utazás $\frac{300}{v}$ óra időt vesz igénybe v sebesség esetén, tehát a sofőrnek kifizetett költség $\frac{300}{v}\cdot 2000$ forint. A 300 km megtételéhez szükséges benzin mennyisége literben:

$$\frac{300}{100}\cdot\left(\frac{1}{5000}\cdot v^2+5\right)=\frac{3}{5000}\cdot v^2+15.$$

Mivel a benzin literenkénti ára 320 Ft, az üzemanyag $320\cdot\left(\frac{3}{5000}\cdot v^2+15\right)$ forintba kerül.
Az összköltség a sebesség függvényében:

$$k(v)=\frac{300}{v}\cdot 2000+320\cdot\left(\frac{3}{5000}\cdot v^2+15\right)=\frac{600\,000}{v}+\frac{96}{500}\cdot v^2+4800.$$

A $k(v)$ függvénynek ott lehet minimuma, ahol az első deriváltja 0:

$$k'(v)=-\frac{600\,000}{v^2}+\frac{96}{250}\cdot v \quad\Rightarrow\quad 0=-\frac{600\,000}{v^2}+\frac{96}{250}\cdot v \quad\Rightarrow\quad v\approx 116.$$

Ha $v<116$, akkor $k'(v)<0$, ha $v>16$, akkor $k'(v)>0$, tehát a függvénynek $v=116$ helyen minimuma van.
Az utazás költsége $116\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebesség esetén lesz minimális.

4. Feladatsor / *A* – megoldások

1. Az egyenletrendszer az $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, $y>-1$ számokon van értelmezve.
A második egyenlet alapján $y+1=3^x$.
Ezt felhasználva, az első egyenlet:

$$3\cdot(y+1)^3=3y^3+8y^2+8y+9,$$
$$3y^3+9y^2+9y+3=3y^3+8y^2+8y+9,$$
$$y^2+y-6=0,$$
$$(y+3)\cdot(y-2)=0.$$

Az egyenlet megoldása: $y_1=2$ és $y_2=-3$. Ez utóbbi nem eleme az értelmezési tartománynak.
Az $y=2$ értéket a második egyenletbe helyettesítve $x=1$ adódik.
Az egyenletrendszer megoldása: $x=1$ és $y=2$.

2. Mivel $a_n=2a_{n+1}-a_{n+2}$, ebből $a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$.

Az a sorozat, amelynek bármely tagja (a másodiktól kezdve) előáll a két szomszédos tag számtani közepeként, számtani sorozat.
Ha a sorozat első eleme a_1, differenciája d, akkor:

$$a_3+a_7=a_1+2d+a_9-2d=a_1+a_9=12.$$

A sorozat első 9 tagjának összege:

$$S_9=9\cdot\frac{a_1+a_9}{2}=54.$$



3. A szekszárdi borászok száma legyen s, a villányiaké v, az egrieké e.

a) A feladat szövege szerint:

$$5s + 4v + 2e = 25 \quad \text{és} \quad s + v + e = 8.$$

A második egyenletből e-t kifejezve és beírva az elsőbe:

$$3s + 2v = 9, \qquad \text{ebből} \qquad v = \frac{9-3s}{2},$$

vagyis $9 - 3s$ páros és pozitív, tehát $9 - 3s > 0$, azaz $3 > s$. Tehát s lehet 1 vagy 2, de csak 1 esetén lesz a $9 - 3s$ páros. Így $s = 1 \;\Rightarrow\; v = 3$ és $e = 4$.

A borversenyen 1 szekszárdi, 3 villányi és 4 egri borász vett részt.

b) A binomiális eloszlás alapján annak a valószínűsége, hogy 10 ember közül 7-en mondják, hogy a vörösbort jobban szeretik:

$$p = \binom{10}{7} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \binom{10}{7} \cdot \frac{2^7}{3^{10}} \approx 0{,}26.$$

4. A keresett egyenesnek az x tengellyel való metszéspontja legyen $(a; 0)$, az y tengellyel pedig $(0; b)$.

Ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor az egyenes áthalad az origón, és egyenlete: $y = \frac{7}{2}x$.

Ha a és b közül egyik sem 0, az egyenes tengelymetszetes alakjából következően egyenlete:

$$1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad (a, b \neq 0).$$

Az egyenes illeszkedik az $A(2; 7)$ pontra, ezért $1 = \frac{2}{a} + \frac{7}{b}$.

Alakítsuk át az egyenlet:

$$ab = 2b + 7a, \quad \text{átalakítás után} \quad ab - 2b - 7a + 14 - 14 = 0, \quad \text{vagyis} \quad (a-2)(b-7) = 14.$$

Mivel a és b egész számok, 14-et kell egész számok szorzataként felírnunk.

Ezeket a lehetőségeket a következő táblázat mutatja:

$a - 2$	1	14	2	7	–1	–14	–2	–7
$b - 7$	14	1	7	2	–14	–1	–7	–2
a	3	16	4	9	1	–12	0	–5
b	21	8	14	9	–7	6	0	5

Nyolc egyenes tesz eleget a feltételeknek, ezek egyenletei:

$$y = \frac{7}{2}x, \qquad 1 = \frac{x}{3} + \frac{y}{21}, \qquad 1 = \frac{x}{16} + \frac{y}{8}, \qquad 1 = \frac{x}{4} + \frac{y}{14},$$

$$1 = \frac{x}{9} + \frac{y}{9}, \qquad 1 = x - \frac{y}{7}, \qquad 1 = -\frac{x}{12} + \frac{y}{6}, \qquad 1 = -\frac{x}{5} + \frac{y}{5}.$$

4. Feladatsor / *B* – megoldások

5. Mivel a nevező minden x-re pozitív értéket vesz fel, a függvény az intervallum minden pontjában értelmezve van.

Ha $2 \le x \le 5$, akkor:

$$f(x) = \frac{x + x + 2}{x + x - 2} = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton csökkenő, ebből következik, hogy

$$f(5) = \frac{3}{2} \le f(x) \le 3 = f(2).$$



Ha $0 \le x < 2$, akkor:

$$f(x) = \frac{x + x + 2}{x - x + 2} = x + 1.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton növekvő, ebből következik, hogy

$$f(0) = 1 \le f(x) < 3 = f(2).$$

Ha $-2 \le x < 0$, akkor:

$$f(x) = \frac{-x + x + 2}{-x - x + 2} = \frac{2}{-2x + 2} = -\frac{1}{x - 1}.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton növekvő, ebből következik, hogy

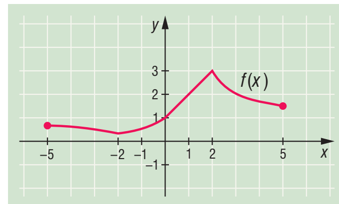
$$f(-2) = \frac{1}{3} \le f(x) < 1 = f(0).$$

Ha $-5 \le x < -2$, akkor:

$$f(x) = \frac{-x - x - 2}{-x - x + 2} = \frac{-2x - 2}{-2x + 2} = \frac{x + 1}{x - 1} = 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Az adott intervallumon a függvény szigorúan monoton csökkenő, ebből következik, hogy

$$f(-2) = \frac{1}{3} < f(x) \le \frac{2}{3} = f(-5).$$



A függvény minimuma $\frac{1}{3}$, az $x = -2$ helyen, maximuma pedig 3, az $x = 2$ helyen.

6. A motor sebessége legyen $x\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, az autóé $y\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a Bélatelep és Andrásfalva közti távolság s km.

a) Míg az autó visszaér Andrásfalvára, $2s$ utat tesz meg, ha pedig onnan visszafordulna, akkor a motorral való találkozásig újabb $\frac{2s}{3}$ utat tenne meg, azaz összesen $2s + \frac{2s}{3} = \frac{8s}{3}$ km-t haladna. Ez idő alatt a motor által megtett út $s + \frac{s}{3} = \frac{4s}{3}$ km, vagyis feleannyi, mint az autósé.

Mivel az út és a sebesség egyenesen arányos, az autó sebessége kétszerese a motorénak, vagyis $y = 2x$.

b) Az első találkozásig az autó a két helység közti távolságnál 5 kilométerrel többet, a motor 5 kilométerrel kevesebbet tesz meg. Mivel az első találkozásig ugyanannyi ideig mozogtak, a $t = \frac{s}{v}$ öszefüggés alapján felírható: $\frac{s-5}{x} = \frac{s+5}{y}$. Felhasználva, hogy $y = 2x$:

$$\frac{s-5}{x} = \frac{s+5}{2x} \quad \Rightarrow \quad 2s - 10 = s + 5 \quad \Rightarrow \quad s = 15.$$

Az Andrásfalva és Bélatelep közti távolság 15 km.

c) Mivel a két helység közti kétszeres $2s = 30$ km távolságot az autó 20 perccel, azaz $\frac{1}{3}$ órával rövidebb idő alatt teszi meg, mint a motor, a mozgásuk idejére a $t = \frac{s}{v}$ összefüggés alapján felírható:

$$\frac{30}{x} = \frac{30}{y} + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{30}{x} = \frac{30}{2x} + \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 45.$$

A motor sebessége $45\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, az autó sebessége $90\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.



7. Alkalmazva a megfelelő trigonometrikus összefüggéseket, a feladat másodfokú egyenletre vezet:

$$\sin 2x - 2\cdot\sin x - 2\cdot\cos x - 2 = 0,$$
$$2\cdot\sin x\cdot\cos x - 2\cdot(\sin x + \cos x) - 2 = 0,$$
$$\sin^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x - 2\cdot(\sin x + \cos x) - 3 = 0,$$
$$(\sin x + \cos x)^2 - 2\cdot(\sin x + \cos x) - 3 = 0.$$

A $(\sin x + \cos x)$-re másodfokú egyenlet megoldásai: $\sin x + \cos x = -1$ vagy $\sin x + \cos x = 3$.

Ha $\sin x + \cos x = -1$, akkor mindkét oldalt $\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel beszorozva:

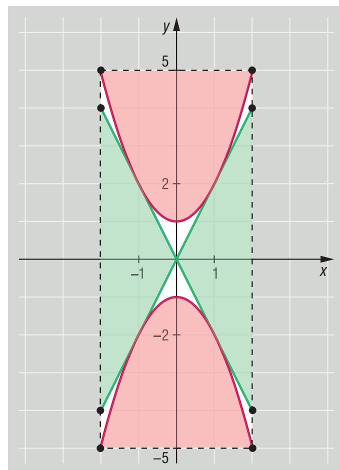
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow\quad x_1 = \pi + 2k\pi,\ \ x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

$\sin x + \cos x = 3$ nem lehet, mert $\sin x + \cos x$ kifejezés értéke legfeljebb $\sqrt{2}$.

Az egyenlet megoldásai:

$$x_1 = \pi + 2k\pi,\ \ x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

8. Helyezzük el a céltáblát egy olyan koordináta-rendszerbe, amelyben 1 egység 10 centiméternek felel meg, és a koordináta-rendszer kezdőpontja legyen a céltábla középpontja.



A két parabolaív egyenlete: $y = x^2 + 1$, illetve $y = -x^2 - 1$.

A parabolaívekhez az origóból húzott érintők egyenleteit keressük $y = mx$ alakban. Az érintés feltétele, hogy a parabola és az érintő egyenletéből alkotott egyenletrendszernek egy megoldása legyen.

Az első és második síknegyedben levő parabola esetén az

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 1 \\ y = mx \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert kell vizsgálni. Az egyenletrendszerből y-t kiküszöbölve, az $x^2 - mx + 1 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek akkor van egy megoldása, ha diszkriminánsa 0, vagyis:

$$m^2 - 4 = 0 \quad\Rightarrow\quad m = \pm 2.$$

A tengelyes szimmetria miatt a két parabolaív érintőinek egyenletei: $y = 2x$, illetve $y = -2x$.

- Először számítsuk ki a zöld terület nagyságát. Az első síknegyedbe eső területrész olyan derékszögű háromszög, amelynek befogói 2 és 4, területe tehát 4 egység. Az egész céltáblán a zöld terület nagysága: $T_{\text{zöld}} = 4\cdot 4 = 16$ területegység.
- Az első síknegyedbe eső piros területrészt megkapjuk úgy, hogy egy 2 és 5 egység oldalú téglalap területéből kivonjuk a $[0; 2]$-on a parabolaív alatti területet:

$$2\cdot 5 - \int_0^2 (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = 10 - \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 = 10 - \frac{14}{3} = \frac{16}{3}.$$

  A piros terület nagysága a tengelyes szimmetria miatt: $T_{\text{piros}} = 4\cdot\frac{16}{3} = \frac{64}{3}$ területegység.
- A fehér terület nagyságát megkapjuk úgy, hogy a céltábla teljes területéből kivonjuk a piros és zöld területek nagyságát: $T_{\text{fehér}} = 10\cdot 4 - 16 - \frac{64}{3} = \frac{8}{3}$ területegység.

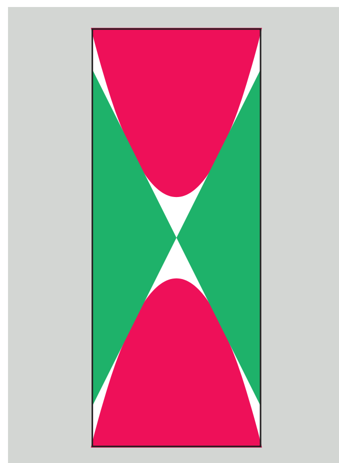


a) A geometriai valószínűség fogalmából adódóan a céltáblára véletlenszerűen érkező lövések akkora valószínűséggel érkeznek a zöldre festett területre, amekkora része a zöld rész területe az egész céltábla területének, tehát:

$$P(\text{zöld}) = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}.$$

Hasonlóan:

$$P(\text{piros}) = \frac{\frac{64}{3}}{40} = \frac{8}{15}, \quad \text{illetve} \quad P(\text{fehér}) = \frac{\frac{8}{3}}{40} = \frac{1}{15}.$$



b) Az egy lövésért kapható pont várható értéke:

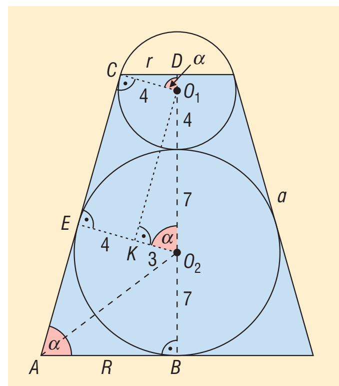
$$4 \cdot \frac{2}{5} + 5 \cdot \frac{8}{15} + 6 \cdot \frac{1}{15} = \frac{70}{15} \approx 4{,}67.$$

9. A szoknya felszínének kiszámításához egy csonka kúp palástjának felszínét kell meghatároznunk.

Tekintsük a csonka kúp ábrán látható tengelymetszetét, és használjuk az ábra jelöléseit. A csonka kúp fedőlapjának sugara $r = CD$, az alaplapjának sugara $R = AB$, valamint a csonka kúp alkotójának hossza $a = AC$.

Húzzunk EC-vel párhuzamost a középső gömb O_1 középpontján keresztül. Mivel egy kör érintője merőleges az érintési pontba húzott sugárra, az EKO_1C négyszög téglalap.

A KO_1O_2 derékszögű háromszög átfogója a két érintő gömb középpontjának távolsága $O_1O_2 = 7 + 4 = 11$. A háromszög KO_2 befogója pedig a gömbök sugarainak különbsége $KO_2 = 7 - 4 = 3$.



A Pitagorasz-tétel alapján a másik befogó:

$$KO_1 = EC = \sqrt{11^2 - 3^2} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}.$$

Az ábrán a $KO_2O_1\sphericalangle = CO_1D\sphericalangle$, mivel egyállású szögek, valamint $KO_2O_1\sphericalangle = EAB\sphericalangle$, mivel hegyesszögű merőleges szárú szögek. Jelöljük ezeket a szögeket α-val.

A KO_1O_2 derékszögű háromszögből $\cos\alpha = \frac{3}{11}$, és $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{7}}{11}$.

A csonka kúp fedőlapjának r sugarát az O_1DC derékszögű háromszögből számíthatjuk:

$$r = CD = 4 \cdot \sin\alpha = 4 \cdot \frac{4\sqrt{7}}{11} = \frac{16\sqrt{7}}{11}.$$

Mivel az AB, illetve az AE egyenesek érintik az O_2 középpontú kört, az AO_2 egyenes az A csúcsnál lévő α szög felezője. Az ABO_2 derékszögű háromszögből $AB = O_2B \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Ismert, hogy $\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$, és mivel $\frac{\alpha}{2}$ hegyesszög, és $\cos\alpha = \frac{3}{11}$, ezért:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{11}}{1-\frac{3}{11}}} = \sqrt{\frac{14}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \quad \text{amit felhasználva} \quad R = AB = O_2B \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 7 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{7\sqrt{7}}{2}.$$



Az AE és az AB érintőszakaszok egyenlősége alapján a csonka kúp alkotójának hossza:

$$a = AC = AE + EC = AB + EC = \frac{7\sqrt{7}}{2} + 4\sqrt{7} = \frac{15\sqrt{7}}{2}.$$

A csonka kúp palástjának felszíne:

$$A = (R + r) \cdot a \cdot \pi = \left(\frac{7\sqrt{7}}{2} + \frac{16\sqrt{7}}{11}\right) \cdot \frac{15\sqrt{7}}{2} \cdot \pi = \frac{11445}{44} \cdot \pi \approx 817{,}17\ \text{cm}^2.$$

A szoknya elkészítéséhez $817{,}17\ \text{cm}^2$ területű karton szükséges.

5. Feladatsor / *A* – megoldások

1. Az egyenlet értelmezési tartománya $x^2 - 1$ miatt: $-1 \le x \le 1$.
Figyeljük meg, hogy két gyökjel alatt is nevezetes szorzat áll:

$$\sqrt{(x-1)(x+1)} + \sqrt{x+1} = \sqrt{(x+1)^2}.$$

Mivel minden tagban megtaláljuk az $x + 1$ tényezőt, ezért az egyenlet egyik megoldása $x_1 = -1$.
Így akár le is oszthatunk $\sqrt{x+1}$-gyel (feltesszük, hogy $x \ne -1$):

$$\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x+1}.$$

Mindkét oldal négyzetre emelése, majd az egyenlet rendezése után:

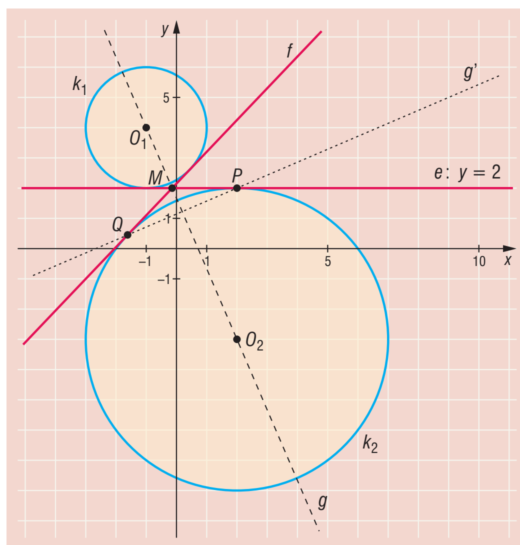
$$2\sqrt{x-1} = 1, \quad \text{ahonnan} \quad x_2 = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

Ellenőrzés:

$$\sqrt{1{,}25^2 - 1} + \sqrt{1{,}25 + 1} = 0{,}75 + 1{,}5 = \sqrt{1{,}25^2 + 2 \cdot 1{,}25 + 1} = 2{,}25.$$

Az egyenletnek nincs más megoldása.

2. A körök elhelyezkedése miatt két közös belső érintőt keresünk.



Az ábra alapján azt sejtjük, hogy az e: $y = 2$ egyenes egyike a két keresett belső érintőnek. Behelyettesítve a körök egyenleteibe, a következő egyenleteket kapjuk:

$$(x+1)^2 = 0 \quad \text{és} \quad (x-2)^2 = 0.$$

Mindkettőnek csak 1-1 megoldása van, tehát e valóban közös belső érintő, k_2-vel vett érintési pontja $P(2; 2)$.

Az ábra szimmetrikus a körök középpontjain áthaladó g egyenesre. Ezért g és e olyan M pontban metszik egymást, amely rajta van f-en is.

Írjuk fel g egyenletét:

$$O_1O_2(3; -7) = \vec{v}_g \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_g(7; 3),$$
$$g\colon\ 7x + 3y = 5,$$

ebből (y helyére 2-t írva): $x = -\frac{1}{7}$. A három egyenes közös metszéspontja: $M\left(-\frac{1}{7}; 2\right)$.



Ismét használjuk ki a szimmetriát! P és Q érintési pontok is szimmetrikusak g-re, ezért ha P-ből g' merőlegest állítunk g-re, az Q-ban fogja metszeni k_2-t. g'-t g-ből könnyen megkapjuk:

$$g'\colon\ 3x - 7y = -8.$$

Meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} g'&\colon & 3x - 7y &= -8 \\ k_2&\colon & (x-2)^2 + (y+3)^2 &= 25 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 2 \quad \text{és} \quad y_2 = \frac{13}{29}.$$

Az első megoldás a már ismert P pontot adja vissza, a második pedig $Q\left(-\frac{47}{29}; \frac{13}{29}\right)$-t.

Két pontból (M és Q) már fel tudjuk írni a keresett f egyenes egyenletét:

$$f\colon\ -21x + 20y = 43.$$

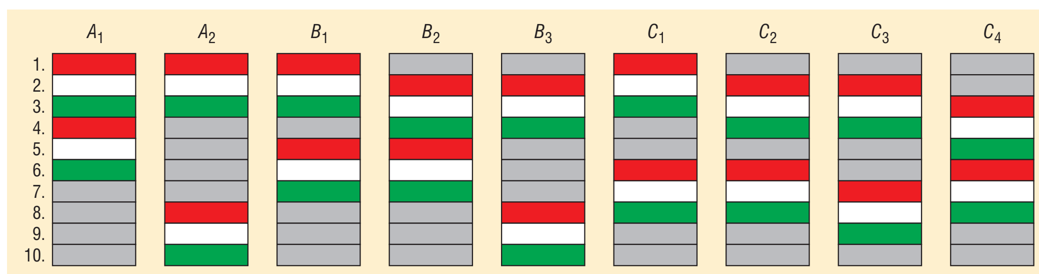
Megjegyzés: A feladatot más úton is megoldhatjuk, például MO_2 fölé írt Thalész-körrel.

3. *a)* (3; 4; 3) típusú ismétléses permutációt kell elszámolnunk: $\frac{10!}{3!\cdot 4!\cdot 3!} = 4200.$

b) A 10 papírdarabkából három magyar zászlót rakhatunk ki, és marad egy fehér lapocska. Ezt a lapot vagy az első zászló elé, vagy az első után a második elé, vagy a második után a harmadik elé, vagy a harmadik után a negyedik elé, vagy a negyedik után húzhatjuk. Ez összesen 4 lehetőség.

c) A két zászló elhelyezésére összesen $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ lehetőségünk van.

Vázoljuk az eseteket! Lehetséges, hogy a két zászló mellett 4 egybefüggő szürke „nem-zászló" rész marad (A esetek), illetve $1 + 3$ (B), vagy 3-nál kevesebb szürke rész (C). Minden esetben a szürke részt 1 piros, 2 fehér és 1 zöld színű lappal töltjük ki.



***A* esetek.** Ilyen három van, mert A_1 „tükrözhető" (a szürke résszel kezdjük), A_2 viszont szimmetrikus. Bármelyiket is tekintjük, a 4 helyen 2 módon jelenhet meg újra zászló, vagyis a lehetőségek száma:

$$3\cdot\left(\frac{4!}{1!\cdot 2!\cdot 1!} - 2\right) = 30.$$

***B* esetek.** Ilyen hat eset van, mert mindegyik „tükrözhető". Most minden esetben csak egyféleképpen kerülhet zászló a szürke mezőkbe, ezért a lehetőségek száma:

$$3\cdot 2\cdot\left(\frac{4!}{1!\cdot 2!\cdot 1!} - 1\right) = 66.$$

C esetek. Itt C_1, C_2 „tükrözhető", C_3 és C_4 szimmetrikus, így összesen 6 eset van. Zászló egyikben sem alakulhat ki, hiszen elapróztuk a szürke lapokat. Az esetek száma itt:

$$6\cdot\frac{4!}{1!\cdot 2!\cdot 1!} = 72.$$

Az esetek száma összesen 168.



4. *a)* A függvény az $x = -1$ helyen metszi az x tengelyt, azaz:

$$f(-1) = -a + b - c + d = 0.$$

Ahol szélsőértéke van, ott az $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ deriváltja 0, vagyis

$$f'(1) = 3a + 2b + c = 0 \quad \text{és} \quad f'(3) = 27a + 6b + c = 0.$$

Más információnk nincs a függvényről. Ha négy ismeretlen és három egyenlet áll csak rendelkezésünkre, akkor csak valamelyik paraméter függvényében tudunk nyilatkozni a többiről.

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & -a + b - c + d = 0 \\ (2) & 3a + 2b + c = 0 \\ (3) & 27a + 6b + c = 0 \end{array}\right\}.$$

Vonjuk ki a (2)-t a (3)-ból: $24a + 4b = 0$, így $b = -6a$.

Helyettesítsünk vissza (2)-be: $3a - 12a + c = 0$, így $c = 9a$.

Végül helyettesítsünk vissza (1)-be: $-a - 6a - 9a + d = 0$, így $d = 16a$.

Tehát $f(x)$ függvényünk a következő:

$$f(x) = ax^3 - 6ax^2 + 9ax + 16a = a(x^3 - 6x^2 + 9x + 16).$$

b) $a = 1$ esetén $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$. Azt már tudjuk, hogy a függvény szélsőértékei az $x = 1$ és $x = 3$ helyeken vannak. Tekintsük a deriváltat:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3).$$

Mivel a derivált felfelé nyíló parabola, ezért előjelviszonyai a következők:

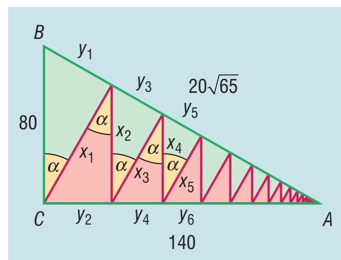
	$x < 1$	1	$1 < x < 3$	3	$3 < x$
$f'(x)$	pozitív	0	negatív	0	pozitív
$f(x)$	monoton növő	MAXIMUM	monoton csökkenő	MINIMUM	monoton növő

Innen leolvasható, hogy a függvénynek $x = 3$ helyen van a lokális minimuma.

5. Feladatsor / *B* – megoldások

5. *a)* Sorban véve a kis háromszögekben az $x_1, x_2, \ldots$ szakaszokat, kapjuk:

$$x_1 = 80 \cdot \cos\alpha,$$
$$x_2 = x_1 \cdot \cos\alpha = 80 \cdot \cos^2\alpha,$$
$$x_3 = x_2 \cdot \cos\alpha = 80 \cdot \cos^3\alpha,$$
$$x_4 = x_3 \cdot \cos\alpha = 80 \cdot \cos^4\alpha \text{ stb.}$$



A töröttvonal hossza a mértani sorozatot alkotó szakaszok összege (mértani sor):

$$80 \cdot \cos\alpha(1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \ldots) = 80 \cdot \cos\alpha \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \cos^i\alpha = \frac{80 \cdot \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}.$$

Mivel a nagy háromszögben az átfogó $20\sqrt{65}$, így

$$\cos\alpha = \frac{140}{20\sqrt{65}} = \frac{7}{\sqrt{65}}.$$

Behelyettesítve, a vonal hosszára kapjuk:

$$\frac{7 \cdot 80}{\sqrt{65} - 7} = 35\left(\sqrt{65} + 7\right) \approx 527{,}18 \text{ cm}.$$



b) Tudjuk, hogy a derékszögű háromszög területe a befogók szorzatának fele. Vegyük sorban az y_1, y_2, … szakaszok hosszait a kis háromszögekben:

$$y_1 = 80 \cdot \sin\alpha;$$
$$y_2 = x_1 \cdot \sin\alpha = 80 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha;$$
$$y_3 = x_2 \cdot \sin\alpha = 80 \cdot \cos^2\alpha \cdot \sin\alpha;$$
$$y_4 = x_3 \cdot \sin\alpha = 80 \cdot \cos^3\alpha \cdot \sin\alpha \text{ stb.}$$

A zöld háromszögek területei a páratlan sorszámú x-ek és y-ok szorzatai felének az összege (mértani sor):

$$T_{\text{zöld}} = \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2} \cdot (1 + \cos^4\alpha + \cos^8\alpha + \ldots) =$$
$$= \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\cos^4\alpha)^i = \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2(1 - \cos^4\alpha)}.$$

A piros háromszögek területei a páros sorszámú x-ek és y-ok szorzatai felének az összege (mértani sor):

$$T_{\text{piros}} = \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha}{2} \cdot (1 + \cos^4\alpha + \cos^8\alpha + \ldots) =$$
$$= \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (\cos^4\alpha)^i = \frac{80^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^3\alpha}{2(1 - \cos^4\alpha)}.$$

A hányadosuk pedig:

$$\frac{T_{\text{zöld}}}{T_{\text{piros}}} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{65}{49}.$$

6. *a)* Az n pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$, az n pontú fának pedig $(n-1)$ éle van. Hányadosuk $\frac{n}{2}$.

b) Mivel a teljes gráfban bármely két pont szomszédos, így az őket összekötő utak hosszának minimuma mindig 1. A teljes gráfok átmérőinek maximuma 1. Az n pontú fagráfok lehetnek teljesen különbözőek is. A legszélesebb fákat akkor kapjuk, ha a pontokat egyetlen vonalra fűzzük fel (lánc). Ekkor a legtávolabbi pontok között $(n-1)$ él fut, azaz az ilyen gráfok átmérőinek maximuma $(n-1)$.

c) Tudjuk, hogy minden pont foka kettő, továbbá a gráf egyszerű és összefüggő. Vegyük észre, hogy az ilyen gráf „kör" alakú! A 8 pontú körben a szemközti pontok legkisebb távolsága 4, azaz a gráf átmérője is 4.

A „kör" alak igazolásához válasszuk ki az egyik pontot és annak egyik élét. A pontot satírozzuk be, és induljunk el az élen. A következő pontba jutva satírozzuk be azt is, majd menjünk tovább a másik élen. Ismételjük ezt addig, míg satírozott pontba nem érünk. Belátjuk, hogy ekkor minden pontot érintettünk: a satírozott pontok összefüggő gráfot alkotnak és ha lenne satírozatlan pont, akkor az eredeti gráfunk nem lenne összefüggő.

d) Ha minden pont foka 6, akkor bármely pontot is tekintve, van pontosan egy olyan, amellyel nem szomszédos. Azonban a többi hat ponttal ez is szomszédos, azaz a két említett pont távolsága 2. Ilyen feltételek mellett bármely két pont távolsága vagy 1, vagy 2. A gráfok átmérője 2.



e) A gondolatmenet nagyon hasonló a *d)* ponthoz, kis különbséggel. Induljunk ki pl. az A pontból, 4 szomszédos pontját jelölje S_A. B jelöljön olyan pontot, amely nem szomszédos A-val (három ilyen is van). Mivel B foka is 4, ezért maximum 2 olyan pont lehet vele szomszédos, amely nincs S_A-ban. Tehát B legalább két olyan ponttal szomszédos, amelyek A-val szomszédosak. Így most is bármely két pont távolsága vagy 1, vagy 2. Az ilyen gráfok átmérője is 2.

Megjegyzés: Ha minden pont foka 3, akkor nehezebb a helyzet. Lehetséges, hogy S_A egyik pontja sem szomszédos S_B egyik pontjával sem. Nem összefüggő gráfnak pedig nincs átmérője.

7. Jelölje a két ismeretlen értéket x és y. Az $]A-s; A+s[\ =\ ]2{,}5941; 9{,}4059[$-ból kiindulva használjuk ki, hogy az intervallum középpontja a számtani átlag. Tehát:

$$A=\frac{A-s+A+s}{2}=6.$$

Ebből négy tizedesjegyre megadhatjuk a szórást is:

$$6+s=9{,}4059 \quad\Rightarrow\quad s=3{,}4059.$$

Ennyi információ már elegendő egy kétismeretlenes egyenletrendszer felírásához:

$$\left.\begin{aligned} 6&=\frac{1+2+4+5+8+9+9+10+x+y}{10}\\ 3{,}4059&=\sqrt{\frac{5^2+4^2+2^2+1^2+(-2)^2+(-3)^2+(-3)^2+(-4)^2+(6-x)^2+(6-y)^2}{10}}\end{aligned}\right\}.$$

Rendezzük mindkét sort. Mivel tudjuk, hogy x és y egészek, ezért 3,4059 négyzetét kerekítjük:

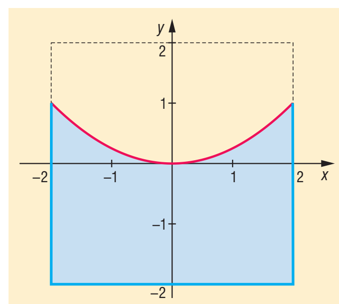
$$\left.\begin{aligned} 12&=x+y\\ 32&=(6-x)^2+(6-y)^2\end{aligned}\right\} \quad\Rightarrow\quad x_1=10,\quad x_2=2,\quad y_1=2,\quad y_2=10.$$

A minta hiányzó két eleme tehát a 10 és a 2.

8. Egy másodfokú függvénynek pontosan akkor van két zérushelye, ha a polinomból alkotott másodfokú egyenlet diszkriminánsa pozitív szám:

$$D=p^2-4q>0, \qquad \text{azaz} \qquad q<\frac{p^2}{4}.$$

Tudjuk, hogy $(p; q)\in I^2$, ahol $I=[-2; 2]$. A $(p; q)$ rendezett párt és a fenti feltételt legegyszerűbben koordináta-rendszerben ábrázolhatjuk. A kék színű rész jelenti azokat a pontokat, melyekre a kérdéses $g(x)$ függvénynek két különböző zérushelye van. A valószínűség a kék színű terület és a négyzet területének aránya. A parabolagörbe és az x tengely közötti terület:

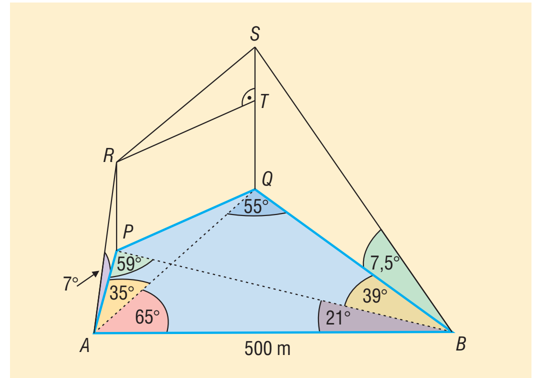


$$\int_{-2}^{2}\frac{p^2}{4}\,\mathrm{d}p=\left[\frac{p^3}{12}\right]_{-2}^{2}=\frac{8}{12}+\frac{8}{12}=\frac{4}{3}.$$

A valószínűség:

$$\frac{T_{\text{kék}}}{T_{\text{négyzet}}}=\frac{8+\frac{4}{3}}{16}=\frac{7}{12}.$$





9. Feltételezhetjük, hogy a fák függőlegesen nőttek, ezért $RPQT$ négyszög téglalap, és RTS háromszög derékszögű. $APB\sphericalangle$ és $AQB\sphericalangle$ szögeket az adatokból kiszámíthatjuk. Mivel ismertek a szögek, $APB_{\triangle}$ és $AQB_{\triangle}$ oldalait kiszámíthatjuk szinusztétellel:

$$\frac{PA}{500} = \frac{\sin 21^\circ}{\sin 59^\circ} \quad \Rightarrow \quad PA \approx 209{,}04 \text{ m},$$

$$\frac{PB}{500} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 59^\circ} \quad \Rightarrow \quad PB \approx 574{,}45 \text{ m},$$

$$\frac{BQ}{500} = \frac{\sin 65^\circ}{\sin 55^\circ} \quad \Rightarrow \quad BQ \approx 553{,}2 \text{ m}.$$

Trigonometrikus összefüggések alapján:

$$\frac{PR}{PA} = \operatorname{tg} 7^\circ \quad \Rightarrow \quad PR \approx 25{,}67 \text{ m}, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{QS}{QB} = \operatorname{tg} 7{,}5^\circ \quad \Rightarrow \quad QS \approx 72{,}83 \text{ m}.$$

Ekkor $ST = QS - PR = 47{,}16$ m. A $PQB_{\triangle}$-ben koszinusztétellel kiszámítható PQ:

$$PQ^2 = PB^2 + QB^2 - 2PB \cdot QB \cdot \cos 39^\circ \quad \Rightarrow \quad PQ \approx 376{,}95 \text{ m}.$$

Végül egy Pitagorasz-tétellel megadhatjuk RS értékét:

$$RS^2 = RT^2 + ST^2 = PQ^2 + (QS - PR)^2 \quad \Rightarrow \quad RS \approx 379{,}89 \text{ m}.$$

Ahhoz, hogy a kötélre rögzített tárgy a pálya egyik végpontjából a másikba jusson, a kötélnek legalább kétszer olyan hosszúnak kell lennie, mint a pálya hossza. Azaz a kérdésre a válasz:

$$2RS \approx 759{,}78 \text{ m}.$$